Jurnal Matematika UNAND
Vol. **11** No. **2** Hal. 95 – 103
Edisi April 2022
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF LOBSTER $L_{n,m,1}$ UNTUK $m = 6$ DAN $n = 2, 3, 4$

TIKA APRILIZA*, DES WELYYANTI, LYRA YULIANTI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163, Indonesia
email :tikaapriliza03@gmail.com, wely@sci.unand.ac.id, lyra@sci.unand.ac.id

Diterima 27 September 2021 Direvisi 2 Maret 2022 Dipublikasikan 30 April 2022

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ graf terhubung dan c suatu k-pewarnaan dari G. Kelas warna pada G adalah himpunan titik-titik yang berwarna i, dinotasikan dengan S_i untuk $1 \leq i \leq k$. Misalkan Π adalah suatu partisi terurut dari $V(G)$ kedalam kelas-kelas warna yang saling bebas $S_1, S_2, \cdots, S_k$, dengan titik-titik di S_i diberi warna i, $1 \leq i \leq k$. Jarak suatu titik v ke S_i dinotasikan dengan $d(v, C_i)$ adalah $\min\{d(v, x)|x \in S_i\}$. Kode warna dari suatu titik $v \in V$ didefinisikan sebagai $k-$vektor yaitu:

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x : x \in S_i)\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π, maka c disebut pewarnaan lokasi untuk G. Banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi untuk G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Pada tulisan ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi graf lobster $L_{n,m,1}$ untuk $6 \leq m \leq 16$ dan $n = 2, 3, 4$.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi, Graf Lobster, Kode Warna.

1. Pendahuluan

Salah satu kajian dalam teori graf yang menarik untuk dikaji yaitu bilangan kromatik lokasi. Konsep bilangan kromatik lokasi pertama kali dikenalkan oleh Chartrand dkk. [2] sebagai pengembangan dari konsep pewarnaan titik dan dimensi partisi pada graf. Pewarnaan titik suatu graf adalah pemberian warna ke semua titik-titik pada suatu graf dengan ketentuan setiap titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan titik pada suatu graf disebut bilangan kromatik lokasi yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

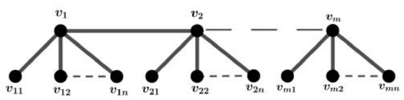
Berdasarkan penelitian Asmiati pada tahun 2013 [1], diperoleh bilangan kromatik lokasi pada graf lobster $L_{n,m,1}$ dengan $m = 2$. Selanjutnya, pada tahun 2018,

*penulis korespondensi

Silvia [5] membahas mengenai bilangan kromatik lokasi pada graf lobster $L_{n,m,1}$ untuk $m = 3$ dan $n = 2, 3, 4$. Sebagai lanjutan dari [5], pada artikel ini akan dibahas tentang bilangan kromatik lokasi pada graf lobster $L_{n,m,1}$ untuk $6 \leq m \leq 16$ dan $n = 2, 3, 4$.

2. Beberapa Konsep Dasar

Definisi dan terminologi graf berikut dikutip dari [4]. Graf lintasan P_m adalah graf dengan m titik dan $m - 1$ sisi, dengan titik-titiknya adalah $v_1, v_2, \cdots, v_m$ dan sisi-sisinya adalah $v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{m-1}v_m$. Graf ulat (*caterpillar*) $C_{m,n}$ adalah sebuah graf yang terbentuk dari graf lintasan P_m, dengan menambahkan sejumlah titik anting (titik yang berderajat satu) pada setiap titik pada graf lintasan tersebut. Lintasan P_m pada graf ulat dinamakan sebagai lintasan utama. Pada Gambar 1 diberikan graf ulat $C_{m,n}$ untuk $m, n \geq 2$.



Gambar 1. Graf Ulat

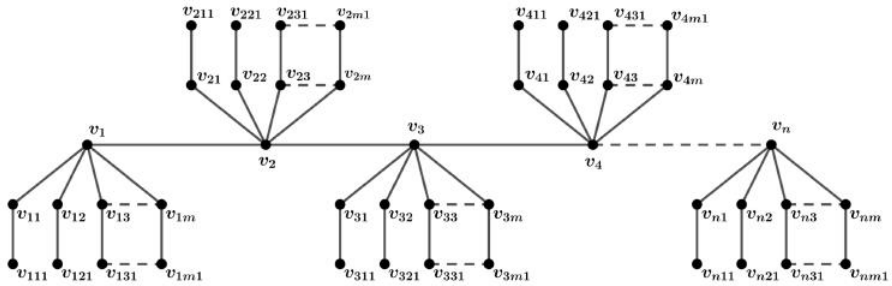
Graf lobster $L_{n,m,k}$ adalah graf yang jika dihapus semua titik berderajat satu pada graf tersebut, akan menghasilkan graf ulat. Graf lobster dinotasikan dengan $L_{n,m,k}$ untuk $n \geq 2$,$m \geq 1$ dan $k \geq 1$, dimana n adalah banyaknya titik di lintasan utama, m adalah banyaknya titik berjarak satu dari lintasan utama, k adalah banyaknya titik berjarak dua dari lintasan utama.

Himpunan titik dan himpunan sisi dari graf lobster $G = L_{n,m,k}$ dengan $n \geq 2$ adalah:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq n \ dan \ 1 \leq j \leq m\} \cup \\ &\quad \{v_{i,j,k} | 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m, \ 1 \leq k \leq n\} \\ E(G) &= \{v_iv_{i+1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i,j} | 1 \leq i \leq n \ dan \ 1 \leq j \leq m\} \cup \\ &\quad \{v_{i,j}v_{i,j,k} | 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m, \ 1 \leq k \leq n\} \end{aligned}$$

Pada artikel ini graf lobster yang dibahas adalah graf $L_{n,m,k}$ dengan $k = 1$. Pada Gambar 2 diberikan graf lobster $L_{n,m,k}$ dengan $k = 1$.

Dalam **??**, Chartrand dkk. memberikan definisi bilangan kromatik lokasi sebagai berikut. Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$, untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i adalah himpunan titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut **kelas warna**, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. **Kode warna** $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k))$ dimana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum



Gambar 2. Graf Lobster $L_{n,m,1}$

yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut **bilangan kromatik lokasi** dari G dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Berikut adalah teorema dan akibat yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi suatu graf.

Teorema 2.1. [3] *Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

Akibat 2.2. [3] *Misalkan G adalah graf terhubung dengan satu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k+1$.*

3. Pembahasan

Pada Teorema 3.1 akan dibahas tentang bilangan kromatik lokasi pada graf lobster $L_{n,m,1}$ untuk $m = 6$ dan $n = 2, 3, 4$.

Teorema 3.1. *Jika $L_{n,m,1}$ adalah graf lobster,maka*

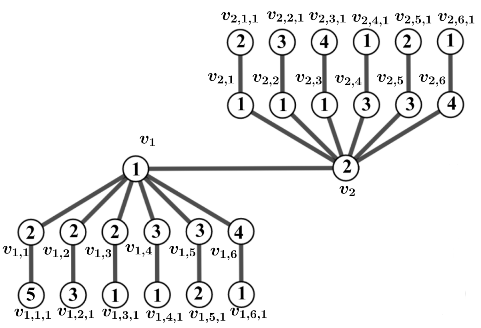
$$\chi_L(L_{n,6,1}) = 5 \text{ untuk } n = 2, 3, 4.$$

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf $L_{n,m,1}$ dengan $\Pi = \{S_1, S_2, S_4, S_5\}$ adalah partisi titik-titik pada graf $L_{n,6,1}$ dengan S_i menyatakan kelas warna ke-i untuk $1 \leq i \leq 5$. Akan ditentukan bilangan kromatik dari graf lobster $L_{n,6,1}$ untuk $n = 2, 3, 4$. Pandang tiga kasus sebagai berikut:
Kasus 1. $n = 2$.
Akan ditentukan $\chi_L(L_{n,6,1}) = 5$ untuk $n = 2$. Akan ditunjukkan $\chi_L(L_{2,6,1}) \leq 5$.

Definisikan kelas warna $\Pi = \{S_1, S_2, S_4, S_5\}$ dengan:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{v_1, v_5, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{1,3,1}, v_{1,4,1}, v_{1,6,1}, v_{2,4,1}, v_{2,6,1}\}. \\ S_2 &= \{v_2, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,5,1}, v_{2,1,1}, v_{2,5,1}\}. \\ S_3 &= \{v_3, v_{1,4}, v_{1,5}, v_{2,4}, , v_{2,5}, v_{1,2,1}, v_{2,2,1}\}. \\ S_4 &= \{v_4, v_{1,6}, v_{2,6}, v_{2,3,1}\}. \\ S_5 &= \{v_{1,1,1}\}. \end{aligned}$$

Pewarnaan lokasi pada graf $L_{n,6,1}$ untuk $n = 2$ ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Pewarnaan lokasi pada graf $L_{2,6,1}$

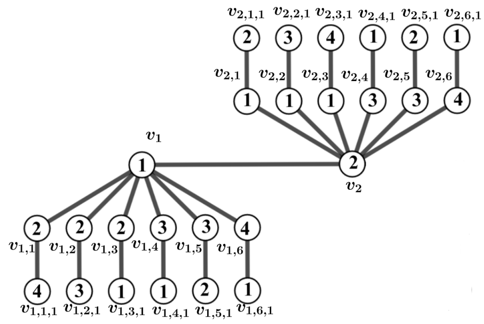
Diperoleh kode warna setiap titik di $L_{2,6,1}$ terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_4, S_5\}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c_\Pi(v_1) &= (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4), d(v_1, S_5)) = (0, 1, 1, 1, 2), \\ c_\Pi(v_2) &= (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4), d(v_2, S_5)) = (1, 0, 1, 1, 3). \end{aligned}$$

Selanjutnya juga diperoleh:
$c_\Pi(v_{1,1}) = (1, 0, 2, 2, 1)$, $c_\Pi(v_{2,3}) = (0, 1, 2, 1, 4)$, $c_\Pi(v_{1,5,1}) = (2, 0, 1, 3, 4)$,
$c_\Pi(v_{1,2}) = (1, 0, 1, 2, 3)$, $c_\Pi(v_{2,4}) = (1, 1, 0, 2, 4)$, $c_\Pi(v_{1,6,1}) = (0, 3, 3, 1, 4)$,
$c_\Pi(v_{1,3}) = (1, 0, 2, 2, 3)$, $c_\Pi(v_{2,5}) = (2, 1, 0, 2, 4)$, $c_\Pi(v_{2,1,1}) = (1, 0, 3, 3, 5)$,
$c_\Pi(v_{1,4}) = (1, 2, 0, 2, 3)$, $c_\Pi(v_{2,6}) = (1, 1, 2, 0, 4)$, $c_\Pi(v_{2,2,1}) = (1, 2, 0, 3, 5)$,
$c_\Pi(v_{1,5}) = (1, 1, 0, 2, 3)$, $c_\Pi(v_{1,1,1}) = (2, 1, 3, 3, 0)$, $c_\Pi(v_{2,3,1}) = (1, 2, 3, 0, 5)$,
$c_\Pi(v_{1,6}) = (1, 2, 2, 0, 3)$, $c_\Pi(v_{1,2,1}) = (2, 1, 0, 3, 4)$, $c_\Pi(v_{2,4,1}) = (0, 2, 1, 3, 5)$,
$c_\Pi(v_{2,1}) = (0, 1, 2, 2, 4)$, $c_\Pi(v_{1,3,1}) = (0, 1, 3, 3, 4)$, $c_\Pi(v_{2,5,1}) = (3, 0, 1, 3, 5)$,
$c_\Pi(v_{2,2}) = (0, 1, 1, 2, 4)$, $c_\Pi(v_{1,4,1}) = (0, 3, 1, 3, 4)$, $c_\Pi(v_{2,6,1}) = (0, 2, 3, 1, 5)$.

Dapat dilihat bahwa kode warna setiap titik di $L_{2,6,1}$ berbeda terhadap Π. Jadi haruslah $\chi_L(L_{2,6,1}) \le 5$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(L_{2,6,1}) \ge 5$. Andaikan titik-titik pada graf $L_{2,6,1}$ diberikan 4-pewarnaan, maka akan terdapat dua titik yang memiliki kode warna yang sama. Sebagai contoh, pada Gambar 4 diperoleh bahwa $c_\Pi(v_{1,5}) = c_\Pi(v_{2,4}) = (1, 1, 0, 2)$. maka haruslah graf $L_{2,6,1}$ mempunyai 5-pewarnaan titik. Akibatnya $\chi_L(L_{2,6,1}) \ge 5$.



Gambar 4. 4-Pewarnaan pada graf $L_{n,6,1}$

Kasus 2. Untuk $n = 3$.
Akan ditentukan $\chi_L(L_{n,6,1}) = 5$ untuk $n = 3$. Akan ditunjukkan $\chi_L(L_{3,6,1}) \leq 5$. Definisikan kelas warna $\Pi = \{S_1, S_2, S_4, S_5\}$ dengan:

$S_1 = \{v_1, v_5, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{1,3,1}, v_{1,4,1}, v_{1,6,1}, v_{2,4,1}, v_{2,6,1}, v_{3,4,1}, v_{3,6,1}\}$.

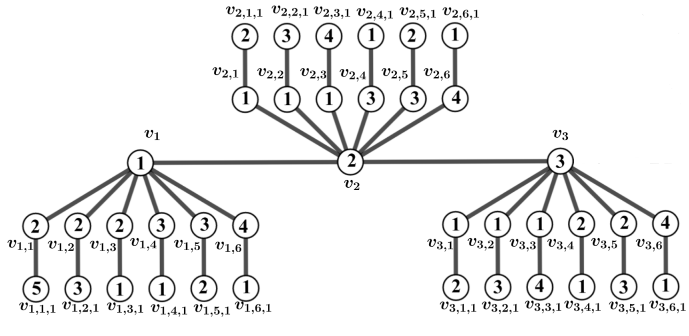
$S_2 = \{v_2, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{3,4}, v_{3,5}, v_{1,5,1}, v_{2,1,1}, v_{2,5,1}, v_{3,1,1}\}$.

$S_3 = \{v_3, v_{1,4}, v_{1,5}, v_{2,4}, v_{2,5}, v_{1,2,1}, v_{2,2,1}, v_{3,2,1}, v_{3,5,1}\}$.

$S_4 = \{v_4, v_{1,6}, v_{2,6}, v_{3,6}, v_{2,3,1}, v_{3,3,1}\}$.

$S_5 = \{v_{1,1,1}\}$.

Pewarnaan lokasi pada graf $L_{n,6,1}$ untuk $n = 3$ ditunjukkan pada Gambar 5.



Gambar 5. Pewarnaan lokasi pada graf $L_{3,6,1}$

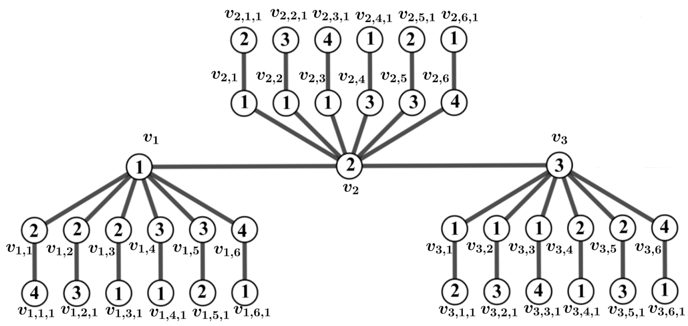
Diperoleh kode warna setiap titik di $L_{3,6,1}$ terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_4, S_5\}$ sebagai berikut:

$$c_\Pi(v_1) = (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4), d(v_1, S_5)) = (0, 1, 1, 1, 2),$$
$$c_\Pi(v_2) = (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4), d(v_2, S_5)) = (1, 0, 1, 1, 3),$$
$$c_\Pi(v_3) = (d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3), d(v_3, S_4), d(v_3, S_5)) = (1, 1, 0, 1, 4).$$

Selanjutnya juga diperoleh:
$c_\Pi(v_{1,1}) = (1,0,2,2,1)$, $c_\Pi(v_{3,1}) = (0,1,1,2,5)$, $c_\Pi(v_{2,1,1}) = (1,0,3,3,5)$,
$c_\Pi(v_{1,2}) = (1,0,1,2,3)$, $c_\Pi(v_{3,2}) = (0,2,1,1,5)$, $c_\Pi(v_{2,2,1}) = (1,2,0,3,5)$,
$c_\Pi(v_{1,3}) = (1,0,2,2,3)$, $c_\Pi(v_{3,3}) = (0,2,1,1,5)$, $c_\Pi(v_{2,3,1}) = (1,2,3,0,5)$,
$c_\Pi(v_{1,4}) = (1,2,0,2,3)$, $c_\Pi(v_{3,4}) = (1,0,1,2,5)$, $c_\Pi(v_{2,4,1}) = (0,2,1,3,5)$,
$c_\Pi(v_{1,5}) = (1,1,0,2,3)$, $c_\Pi(v_{3,5}) = (2,0,1,2,5)$, $c_\Pi(v_{2,5,1}) = (3,0,1,3,5)$,
$c_\Pi(v_{1,6}) = (1,2,2,0,3)$, $c_\Pi(v_{3,6}) = (1,2,1,0,5)$, $c_\Pi(v_{2,6,1}) = (0,2,3,1,5)$,
$c_\Pi(v_{2,1}) = (0,1,2,2,4)$, $c_\Pi(v_{1,1,1}) = (2,1,3,3,0)$, $c_\Pi(v_{3,1,1}) = (1,0,2,3,6)$,
$c_\Pi(v_{2,2}) = (0,1,1,2,4)$, $c_\Pi(v_{1,2,1}) = (2,1,0,3,4)$, $c_\Pi(v_{3,2,1}) = (1,3,0,3,6)$,
$c_\Pi(v_{2,3}) = (0,1,2,1,4)$, $c_\Pi(v_{1,3,1}) = (0,1,3,3,4)$, $c_\Pi(v_{3,3,1}) = (1,3,2,0,6)$,
$c_\Pi(v_{2,4}) = (1,1,0,2,4)$, $c_\Pi(v_{1,4,1}) = (0,3,1,3,4)$, $c_\Pi(v_{3,4,1}) = (0,1,2,3,6)$,
$c_\Pi(v_{2,5}) = (2,1,0,2,4)$, $c_\Pi(v_{1,5,1}) = (2,0,1,3,4)$, $c_\Pi(v_{3,5,1}) = (3,1,0,3,6)$,
$c_\Pi(v_{2,6}) = (1,1,2,0,4)$, $c_\Pi(v_{1,6,1}) = (0,3,3,1,4)$, $c_\Pi(v_{3,6,1}) = (0,3,2,1,6)$.

Diperoleh bahwa setiap titik di $L_{3,6,1}$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi haruslah $\chi_L(L_{3,6,1}) \leq 5$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(L_{3,6,1}) \geq 5$. Andaikan titik-titik pada graf $L_{3,6,1}$ diberikan 4-pewarnaan, maka akan terdapat dua titik yang memiliki kode warna yang sama. Sebagai contoh, pada Gambar 6 diperoleh $c_\Pi(v_{1,5}) = c_\Pi(v_{2,4}) = (1,1,0,2)$. Jadi haruslah graf $L_{3,6,1}$ mempunyai 5-pewarnaan titik. Akibatnya $\chi_L(L_{3,6,1}) \geq 5$.



Gambar 6. 4-pewarnaan pada graf $L_{3,6,1}$

Kasus 3. $n = 4$.
Akan ditentukan $\chi_L(L_{n,6,1}) = 5$ untuk $n = 4$. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(L_{4,6,1}) \leq$

5. Definisikan kelas warna $\Pi = \{S_1, S_2, S_4, S_5\}$ dengan:

$S_1 = \{v_1, v_5, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{4,1}, v_{4,2}, v_{4,3}, v_{1,3,1}, v_{1,4,1}, v_{1,6,1}, v_{2,4,1}, v_{2,6,1}, v_{3,4,1}, v_{3,6,1}, v_{4,4,1}, v_{4,6,1}, v_{5,3,1}, v_{5,4,1}, v_{5,6,1}\}$.

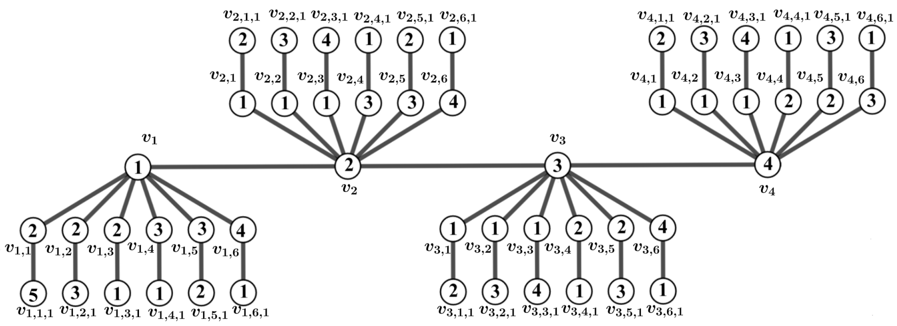
$S_2 = \{v_2, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{3,4}, v_{3,5}, v_{4,4}, v_{4,5}, v_{5,1}, v_{5,2}, v_{5,3}, v_{1,5,1}, v_{2,1,1}, v_{2,5,1}, v_{3,1,1}, v_{4,1,1}, v_{5,5,1}\}$.

$S_3 = \{v_3, v_{1,4}, v_{1,5}, v_{2,4}, , v_{2,5}, v_{4,6}, v_{5,4}, v_{5,5}, v_{1,2,1}, v_{2,2,1}, v_{3,2,1}, v_{3,5,1}, v_{4,2,1}, v_{4,5,1}, v_{5,2,1}\}$.

$S_4 = \{v_4, v_{1,6}, v_{2,6}, v_{3,6}, v_{5,6}, v_{2,3,1}, v_{3,3,1}, v_{4,3,1}, v_{5,1,1}\}$.

$S_5 = \{v_{1,1,1}\}$.

Pewarnaan lokasi pada graf $L_{n,6,1}$ untuk $n = 4$ ditunjukkan pada Gambar 7.



Gambar 7. Pewarnaan lokasi pada graf $L_{4,6,1}$

Diperoleh kode warna setiap titik di $L_{4,6,1}$ terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_4, S_5\}$ sebagai berikut:

$$c_\Pi(v_1) = (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4), d(v_1, S_5)) = (0, 1, 1, 1, 2),$$
$$c_\Pi(v_2) = (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4), d(v_2, S_5)) = (1, 0, 1, 1, 3),$$
$$c_\Pi(v_3) = (d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3), d(v_3, S_4), d(v_3, S_5)) = (1, 1, 0, 1, 4),$$
$$c_\Pi(v_4) = (d(v_4, S_1), d(v_4, S_2), d(v_4, S_3), d(v_4, S_4), d(v_4, S_5)) = (1, 1, 1, 0, 5).$$

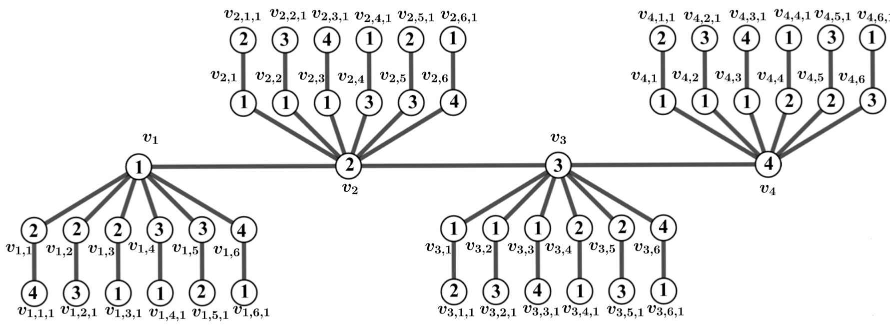
Selanjutnya juga diperoleh:

$c_\Pi(v_{1,1}) = (1, 0, 2, 2, 1)$, $c_\Pi(v_{3,5}) = (2, 0, 1, 2, 5)$, $c_\Pi(v_{2,3,1}) = (1, 2, 3, 0, 5)$,
$c_\Pi(v_{1,2}) = (1, 0, 1, 2, 3)$, $c_\Pi(v_{3,6}) = (1, 2, 1, 0, 5)$, $c_\Pi(v_{2,4,1}) = (0, 2, 1, 3, 5)$,
$c_\Pi(v_{1,3}) = (1, 0, 2, 2, 3)$, $c_\Pi(v_{4,1}) = (0, 1, 2, 1, 6)$, $c_\Pi(v_{2,5,1}) = (3, 0, 1, 3, 5)$,
$c_\Pi(v_{1,4}) = (1, 2, 0, 2, 3)$, $c_\Pi(v_{4,2}) = (0, 2, 1, 1, 6)$, $c_\Pi(v_{2,6,1}) = (0, 2, 3, 1, 5)$,
$c_\Pi(v_{1,5}) = (1, 1, 0, 2, 3)$, $c_\Pi(v_{4,3}) = (0, 2, 2, 1, 6)$, $c_\Pi(v_{3,1,1}) = (1, 0, 2, 3, 6)$,
$c_\Pi(v_{1,6}) = (1, 2, 2, 0, 3)$, $c_\Pi(v_{4,4}) = (1, 0, 2, 1, 6)$, $c_\Pi(v_{3,2,1}) = (1, 3, 0, 3, 6)$,
$c_\Pi(v_{2,1}) = (0, 1, 2, 2, 4)$, $c_\Pi(v_{4,5}) = (2, 0, 1, 2, 6)$, $c_\Pi(v_{3,3,1}) = (1, 3, 2, 0, 6)$,
$c_\Pi(v_{2,2}) = (0, 1, 1, 2, 4)$, $c_\Pi(v_{4,6}) = (1, 2, 1, 0, 6)$, $c_\Pi(v_{3,4,1}) = (0, 1, 2, 3, 6)$,
$c_\Pi(v_{2,3}) = (0, 1, 2, 1, 4)$, $c_\Pi(v_{1,1,1}) = (2, 1, 3, 3, 0)$, $c_\Pi(v_{3,5,1}) = (3, 1, 0, 3, 6)$,

$c_\Pi(v_{2,4}) = (1,1,0,2,4)$, $c_\Pi(v_{1,2,1}) = (2,1,0,3,4)$, $c_\Pi(v_{3,6,1}) = (0,3,2,1,6)$,
$c_\Pi(v_{2,5}) = (2,1,0,2,4)$, $c_\Pi(v_{1,3,1}) = (0,1,3,3,4)$, $c_\Pi(v_{4,1,1}) = (1,0,3,2,7)$,
$c_\Pi(v_{2,6}) = (1,1,2,0,4)$, $c_\Pi(v_{1,4,1}) = (0,3,1,3,4)$, $c_\Pi(v_{4,2,1}) = (1,3,0,2,7)$,
$c_\Pi(v_{3,1}) = (0,1,1,2,5)$, $c_\Pi(v_{1,5,1}) = (2,0,1,3,4)$, $c_\Pi(v_{4,3,1}) = (1,3,3,0,7)$,
$c_\Pi(v_{3,2}) = (0,2,1,2,5)$, $c_\Pi(v_{1,6,1}) = (0,3,3,1,4)$, $c_\Pi(v_{4,4,1}) = (0,1,3,2,7)$,
$c_\Pi(v_{3,3}) = (0,2,1,1,5)$, $c_\Pi(v_{2,1,1}) = (1,0,3,3,5)$, $c_\Pi(v_{4,5,1}) = (3,1,0,2,7)$,
$c_\Pi(v_{3,4}) = (1,0,1,2,5)$, $c_\Pi(v_{2,2,1}) = (1,2,0,3,5)$, $c_\Pi(v_{4,6,1}) = (0,3,1,2,7)$.

Diperoleh kode warna yang berbeda pada setiap titik di $L_{2,6,1}$ terhadap Π. Jadi haruslah $\chi_L(L_{4,6,1}) \leq 5$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(L_{4,6,1}) \geq 5$. Andaikan titik-titik pada graf $L_{4,6,1}$ diberikan 4-pewarnaan, maka akan terdapat dua titik yang memiliki kode warna yang sama. Sebagai contoh, pada Gambar 8 diperoleh $c_\Pi(v_{1,5}) = c_\Pi(v_{2,4}) = (1,1,0,2)$, maka haruslah graf $L_{4,6,1}$ mempunyai 5-pewarnaan titik. Akibatnya $\chi_L(L_{4,6,1}) \geq 5$.



Gambar 8. 4-pewarnaan pada graf $L_{4,6,1}$

□

4. Kesimpulan

Graf lobster $L_{n,m,k}$ adalah graf yang apabila dihapus semua titik berderajat satu menghasilkan graf *caterpillar*. Pada penelitian ini diperoleh bilangan kromatik lokasi graf lobster $L_{n,m,k}$ untuk $k = 1$, dengan $m = 6$ dan $n = 2,3,4$, yaitu:

$$\chi_L(L_{n,6,1}) = 5 \text{ untuk } n = 2,3,4.$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Syafrizal Sy, bapak Ahmad Iqbal Baqi, dan ibu Izzati Rahmi HG yang telah memberikan kritikan dan masukan sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Asmiati. 2013. *Graf Lobster Berbilangan Kromatik Lokasi Empat. Prosiding Semirata FMIPA Universitas Lampung*

[2] Chartrand, G., M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull.Inst. Combin. Appl.* **36**: 89 – 101

[3] Chartrand, G., Zhang,P. 2005. *Introduction to Graph Teory.* McGraw-Hill, New York.

[4] Chartrand, G., Zhang, P. 2009. *Chromatic Graph Theory.* Chapman and Hall/CRC.

[5] Silvia, M., Welyyanti, D., Efendi, 2018. *Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Lobster* $L_{n,m,1}$ *dengan* $n = 2, 3, 4$ *dan* $m = 3$. Jurnal Matematika Universitas Andalas. Vol **VII** No 3: 94 – 103