REALISASI SISTEM LINIER *INVARIANT* WAKTU

ANGGI SYAPUTRA

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 chova_putra91@yahoo.co.id*

Abstrak. Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai realisasi sistem linier *invariant* waktu. Permasalahannya adalah menentukan matriks A , B , dan C dari suatu fungsi transfer $G(s)$ yang diberikan di mana fungsi transfernya adalah *strictly proper*. Matriks A , B dan C adakalanya tidak unik. Dalam penelitian ini juga dibahas permasalahan realisasi minimal untuk mengetahui apakah suatu matriks A , B dan C unik atau tidak. Suatu contoh diberikan untuk mengilustrasikan realisasi dan realisasi minimal dari sistem linier *invariant* waktu.

Kata Kunci: Fungsi transfer *strictly proper*, realisasi, realisasi minimal

1. Pendahuluan

Misalkan diberikan sistem persamaan linier *invariant* waktu dalam bentuk,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{1.1}$$

di mana $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, dengan variabel $\mathbf{x}$ menyatakan variabel keadaan, variabel $\mathbf{u}$ menyatakan variabel kontrol(*input*) dan variabel $\mathbf{y}$ menyatakan variabel *output*. Dalam beberapa literatur, sistem (1.1) disebut sebagai representasi ruang keadaan dari sistem kontrol linier *invariant* waktu [5].

Fungsi Transfer suatu sistem linear dinotasikan dengan $G(s)$, didefinisikan sebagai perbandingan transformasi Laplace sinyal *output* terhadap sinyal *input* dengan asumsi semua kondisi awal sama dengan nol, yaitu

$$\mathbf{Y}(s) = G(s)\mathbf{U}(s),\tag{1.2}$$

di mana $\mathbf{Y}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\}$ dan $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\}$. Fungsi *transfer* untuk sistem di atas adalah

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.\tag{1.3}$$

Dalam penelitian ini akan dikaji permasalahan realisasi dari suatu sistem linier *invariant* waktu, yaitu jika diberikan suatu fungsi transfer $G(s)$, bagaimana bentuk representasi ruang keadaannya yang berkaitan dengan bentuk matriks A, B, C dari representasi ruang keadaan tersebut. Jika matriks A, B, C dapat ditentukan, maka

realisasi dari fungsi transfer $G(s)$ dinotasikan dengan $\{A, B, C\}$. Adakalanya realisasi $\{A, B, C\}$ yang diperoleh tidak unik, sehingga dapat dicari realisasi minimal dari $\{A, B, C\}$, yaitu matriks A yang berdimensi terkecil [3].

2. Realisasi Sistem Linier Invariant Waktu

Pada bab ini akan dibahas mengenai realisasi model ruang keadaan dari matriks fungsi transfer untuk sistem linier *invariant* waktu *Multi Input Multi Output*. Model ruang keadaan untuk persoalan ini mempunyai bentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t).\end{aligned}\quad (2.1)$$

di mana

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Realisasi model ruang keadaan dapat dikonstruksi dari sebarang matriks fungsi transfer yang *strictly proper*, yaitu matriks fungsi transfer di mana entri-entri dari matriks fungsi transfer memiliki polinomial numeraturnya berderajat lebih kecil dari pada polinomial denominatornya [3].

Teorema 2.1. [3] Diberikan suatu matriks fungsi transfer $G(s)$. Realisasi dari $G(s)$ ada jika dan hanya jika $G(s)$ adalah *strictly proper*.

Bukti. ($\Leftarrow$) Misalkan $G(s)$ merupakan matriks fungsi transfer *strictly proper*, yaitu polinomial numeraturnya berderajat lebih kecil dari polinomial denominatornya untuk setiap entri g_{ij} , sebagaimana dapat ditulis

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{s^{n-1}N_{n-1} + s^{n-2}N_{n-2} + \cdots + sN_1 + N_0}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1s + d_0} \\ &= \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \cdots & N_{n-2} & N_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ s^2I_m \\ \vdots \\ s^{n-1}I_m \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

di mana $d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1s + d_0$ dan $N(s) = N_{n-1}s^{n-1} + N_{n-2}s^{n-2} + \cdots + N_1s + N_0$ serta $N_0, N_2, \cdots, N_{n-1}$ adalah matriks berukuran $p \times m$.

Definisikan,

$$\mathbf{Z}(s) = (sI - A)^{-1}B = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ s^2I_m \\ \vdots \\ s^{n-1}I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \\ Z_n \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Berdasarkan persamaan (2.4), diperoleh

$$Z_1 = \frac{1}{d(s)} I_m \quad (2.5)$$

dan

$$\mathbf{Z}_{i+1} = s\mathbf{Z}_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.6)$$

Dari persamaan (2.5) dan (2.6) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} I_m &= d_0 Z_1 + d_1 Z_2 + d_2 Z_3 + \dots + d_{n-1} Z_n + sZ_n, \\ sZ_n &= I_m - d_0 Z_1 - d_1 Z_2 - d_2 Z_3 - \dots - d_{n-1} Z_n. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dengan demikian, persamaan (2.7) dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} sZ_1 \\ sZ_2 \\ \vdots \\ sZ_{n-1} \\ sZ_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \cdots & 0_m & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \cdots & 0_m & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \cdots & 0_m & I_m \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n-2} & -d_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \\ Z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix}$$

atau dapat juga ditulis

$$s\mathbf{Z} = A\mathbf{Z} + B, \quad (2.8)$$

di mana

$$A = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \cdots & 0_m & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \cdots & 0_m & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \cdots & 0_m & I_m \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n-2} & -d_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Dari persamaan (1.3), diketahui bahwa

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Berdasarkan persamaan (2.3), maka

$$\frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \cdots & N_{p-2} & N_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ s^2 I_m \\ \vdots \\ s^{p-1} I_m \end{bmatrix} = C(sI - A)^{-1}B,$$

di mana

$$C = \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \cdots & N_{n-2} & N_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Jadi, diperoleh Matriks A, B, C yang merupakan realisasi dari $G(s)$.

($\Rightarrow$) Misalkan A, B, C merupakan realisasi dari $G(s)$, akan ditunjukkan bahwa $G(s)$ merupakan matriks fungsi transfer yang *strictly proper*. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= C \left(\frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \right) B. \end{aligned}$$

Karena $\left(\frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \right)$ merupakan matriks yang polinomial denominaturnya berderajat lebih tinggi dari pada polinomial numeraturnya untuk setiap entri-entri-nya, maka matriks fungsi transfer $G(s)$ merupakan matriks fungsi transfer yang *strictly proper*. $\square$

3. Realisasi Minimal

Definisi 3.1. [3] Suatu realisasi minimal yang terkait dengan suatu fungsi transfer $G(s)$ adalah suatu model ruang keadaan di mana matriks A berdimensi terkecil.

Teorema 3.2. [3] Suatu Realisasi $\{A, B, C\}$ adalah minimal jika dan hanya jika $\{A, B, C\}$ terkontrol dan terobservasi.

Bukti. ($\Leftarrow$) Misalkan realisasi $\{A, B, C\}$ adalah terkontrol dan terobservasi dengan rank dari matriks keterkontrolan dan keterobservasiannya adalah n dan terdapat realisasi lain $\{A_1, B_1, C_1\}$ dengan rank dari matriks keterkontrolan dan keterobservasiannya adalah n_1 , di mana $n_1 < n$, sedemikian sehingga realisasi $\{A, B, C\}$ dan $\{A_1, B_1, C_1\}$ n_1 mempunyai matriks fungsi transfer yang sama, yaitu

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1. \quad (3.1)$$

Oleh karena itu,

$$g(t) = Ce^{At}B = C_1e^{A_1t}B_1. \quad (3.2)$$

Turunan persamaan (3.2) terhadap t dan dievaluasi pada $t = 0$ diperoleh,

$$CA^iB = C_1A_1^iB_1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Matriks keterkontrolan M_c dan matriks keterobservasian M_o untuk $\{A, B, C\}$ adalah

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \text{ dan } M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Perkalian antara M_c dengan M_o adalah

$$M_oM_c = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \dots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Matriks keterkontrolan untuk $\{A_1, B_1, C_1\}$ adalah,

$$M_{c_1} = [B_1 \ A_1 B_1 \ A_1^2 B_1 \ \cdots \ A_1^{n-1} B_1]$$

dan matriks keterobservasiannya adalah

$$M_{o_1} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ C_1 A_1^2 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Perkalian dari matriks $M_{o,1}$ dan $M_{c,1}$ juga menghasilkan,

$$M_{o,1} M_{c,1} = \begin{bmatrix} C_1 B_1 & C_1 A_1 B_1 & \cdots & C_1 A_1^{n-1} B_1 \\ C_1 A_1 B_1 & C_1 A_1^2 B_1 & \cdots & C_1 A_1^n B_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} B_1 & C_1 A_1^n B_1 & \cdots & C_1 A_1^{2n-2} B_1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Berdasarkan (3.3) terlihat bahwa,

$$M_o M_c = M_{o,1} M_{c,1}. \quad (3.6)$$

Karena $\{A, B, C\}$ terkontrol dan terobservasi, maka

$$\text{rank}(M_o) = \text{rank}(M_c) = n, \quad (3.7)$$

yang mengakibatkan

$$\text{rank}(M_o M_c) = n. \quad (3.8)$$

Selanjutnya, karena realisasi $\{A_1, B_1, C_1\}$ terkontrol dan terobservasi, maka

$$\text{rank}(M_{o,1}) = \text{rank}(M_{c,1}) = n_1 \quad (3.9)$$

dan mengakibatkan

$$\text{rank}(M_{o_1} M_{c_1}) = n_1. \quad (3.10)$$

Tetapi, dari persamaan (3.6) diperoleh $n_1 = n$, yang kontradiksi dengan asumsi bahwa $n_1 < n$. Dengan kata lain, jika $\{A, B, C\}$ terkontrol dan terobservasi, maka realisasi $\{A, B, C\}$ dikatakan realisasi minimal.

($\Rightarrow$) Asumsikan bahwa $\{A, B, C\}$ tidak terkontrol dan tidak terobservasi. Dalam ([2], [3], [7]) diberikan teorema bentuk standar sistem tidak terkontrol dan tidak terobservasi yang menyatakan bahwa jika $\{A, B\}$ tidak terkontrol dan $\{A, C\}$ tidak terobservasi, maka terdapat realisasi lain dengan fungsi transfer yang sama tetapi derajatnya lebih kecil. Dengan kata lain, jika realisasi $\{A, B, C\}$ adalah minimal, maka $\{A, B, C\}$ terkontrol dan terobservasi. $\square$

Contoh 1. Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana menentukan realisasi dan realisasi minimal suatu fungsi transfer $G(s)$, di mana

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{s}{(s+1)(s+3)} & \frac{3}{(s+1)(s+3)} \\ 1 & \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} \end{array} \right].$$

Matriks fungsi transfer di atas mempunyai dua *input* dan dua *output*, sehingga $p = m = 2$. Polinomial $d(s)$ harus mengandung semua faktor dari empat polinomial denominator, yaitu

$$d(s) = (s + 1)(s + 3) = s^2 + 4s + 3.$$

Karena,

$$0_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Maka matriks A dan B dari realisasi ruang keadaan adalah

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Perkalian $G(S)$ dengan $d(s)$ menghasilkan,

$$d(s)G(s) = \begin{bmatrix} s & 3 \\ 1 & s + 4 \end{bmatrix},$$

yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} d(s)G(s) &= N_1 s + N_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh matriks output sebagai berikut,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan MATLAB, diperoleh bahwa *rank* matriks keterkontrolan dari $\{A, B\}$ adalah 4 dan *rank* matriks keterobservasian dari $\{A, C\}$ adalah 4, maka $\{A, B\}$ terkontrol dan $\{A, C\}$ terobservasi. Jadi, karena Realisasi $\{A, B\}$ terkontrol dan $\{A, C\}$ terobservasi maka realisasi $\{A, B, C\}$ adalah minimal.

Contoh 2. [5] Diberikan sebuah sistem MIMO LTI dengan matriks fungsi transfer sebagai berikut :

$$G(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{3}{s-2} \\ \frac{s+3}{(s+1)(s-2)} & \frac{2}{(s-2)^2} \end{bmatrix}.$$

Akan ditentukan realisasi minimal dari fungsi transfer tersebut.

Matriks fungsi transfer di atas mempunyai 2 *input* dan 2 *output*, sehingga $p = m = 2$. Polinomial $d(s)$ harus mengandung semua faktor dari 4 polinomial denominator, yaitu

$$d(s) = (s + 1)^2(s - 2)^2 = s^4 - 2s^3 - 3s^2 + 4s + 4.$$

Matriks A dan B dari realisasi ruang keadaan di atas adalah

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Perkalian $G(s)$ dengan $d(s)$ menghasilkan,

$$d(s)G(s) = \begin{bmatrix} s^2 - 4s + 4 & 3s^3 - 9s - 6 \\ s^3 + 2s^2 - 5s - 6 & 2s^2 + 4s + 2 \end{bmatrix},$$

yang dapat ditulis sebagai,

$$\begin{aligned} d(s)G(s) &= N_3 s^3 + N_2 s^2 + N_1 s + N_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh matriks output sebagai berikut,

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -4 & -9 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & -5 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan MATLAB, diperoleh bahwa *rank* matriks keterkontrolan dari $\{A, B\}$ adalah 8 dan *rank* matriks keterobservasian dari $\{A, C\}$ adalah 4, maka $\{A, B\}$ terkontrol dan $\{A, C\}$ tidak terobservasi.

Jadi, karena realisasi $\{A, B\}$ terkontrol dan $\{A, C\}$ tidak terobservasi maka realisasi $\{A, B, C\}$ bukan realisasi minimal.

Karena Realisasi $\{A, B, C\}$ bukan realisasi minimal, maka untuk menentukan realisasi minimalnya dapat digunakan teorema bentuk standar sistem tidak terobservasi ([2], [3], [7]). Karena rank matriks keterobservasian dari $\{A, C\}$ adalah 4, maka entri-entri dari empat baris pertama dari matriks keterobservasian sama dengan entri-entri pada empat baris pertama untuk matrik P . Pilih entri-entri empat baris berikutnya sedemikian sehingga matriks P adalah *non singular*.

Misalkan,

$$P = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -4 & -9 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & -5 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 4 & -18 & -4 & 0 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & -10 & 2 & -2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trasnformasi dari persamaan (3.1) memberikan realisasi yang minimal dengan representasi ruang keadaan

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= A_0 \mathbf{z} + B_0 \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= C_0 \mathbf{x}.\end{aligned}$$

di mana

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2.375 & 3.375 & 1.375 & -1.6875 \\ 0.75 & 2.75 & 0.75 & 0.625 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Kesimpulan

Syarat perlu dan syarat cukup adanya realisasi sistem linier *invariant* waktu (1.1) adalah fungsi transfer $G(s)$ *stricly proper*, yaitu polinomial numeratornya berderajat lebih kecil dari pada polinomial denominatornya.

Realisasi Sistem linier invariant waktu (1.1) dari fungsi transfer $G(s)$ dinotasikan dengan $\{A, B, C\}$. Realisasi $\{A, B, C\}$ adalah minimal untuk suatu model ruang keadaan di mana matriks A , B , dan C berdimensi terkecil. Syarat cukup dan syarat perlu realisasi $\{A, B, C\}$ minimal adalah $\{A, B, C\}$ terkontrol dan terobservasi.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Muhafzan, Ibu Arrival Rince Putri, M.T, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Dr. Susila Bahri dan Bapak Efendi, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan-Jilid 1*. Penerbit Erlangga, Jakarta.
- [2] Antsaklis, Panos J dan Anthony N, Michel. 2007. *A Linear Systems Primer*. Birkhaäuser, Boston Basel Berlin.
- [3] Hendricks, Elbert, Ole Jannerup, Paul Haase Sorensen. 2008. *Linear System Control*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg.
- [4] Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra*. W. H. Freeman and Company, USA.
- [5] Ogata, K. 2002. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, New Jersey.
- [6] Remsing, C.C. 2006. *Linear Control*
- [7] Sinha, Alok. 2007. *Linear Systems Optimal and Robust Control*. CRC Press, Francis.