

ALJABAR MAX-PLUS SERTA APLIKASINYA PADA SISTEM ANTRIAN

RAXA RAGANA SAKTA, YANITA*, MONIKA RIANTI HELMI

*Departemen Matematika dan Sains Data,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : raxaragana@gmail.com, yanita@sci.unand.ac.id, monikariantihelmi@sci.unand.ac.id*

Diterima 2 November 2021 Direvisi 12 Juni 2022 Dipublikasikan 21 Oktober 2022

Abstrak. Aljabar max-plus adalah suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan operasi maksimum dan penjumlahan. Di antara beberapa masalah pada aljabar max-plus adalah masalah penentuan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus. Nilai eigen dan vektor eigen dapat diterapkan dalam keperiodikan sistem antrian. Dalam tulisan ini akan dibahas masalah penentuan nilai eigen dan vektor eigen, serta aplikasinya pada keperiodikan sistem antrian. Nilai eigen dicari berdasarkan bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam graf yang terkait dengan matriks atas aljabar max-plus. Nilai eigen ini akan digunakan untuk menentukan vektor eigen berdasarkan matriks B^* dan titik penyusun sirkuit kritis dari graf yang bersesuaian dengan matriks atas aljabar max-plus. Suatu sistem antrian periodik dengan perioda sebesar nilai eigen, maka saat keberangkatan awal pelanggan haruslah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen.

Kata Kunci: Aljabar max-plus, Nilai eigen, Vektor eigen, Lintasan, Sirkuit, Sistem antrian

1. Pendahuluan

Aljabar linier dan aljabar abstrak merupakan bidang kajian dalam ilmu aljabar. Aljabar linier mempelajari beberapa hal, diantaranya vektor dan fungsi linier, sedangkan pada aljabar abstrak dipelajari tentang grup, ring, lapangan, modul dan lainnya. Aljabar abstrak juga mempelajari semigrup, semiring dan semilapangan. Salah satu contoh dari semilapangan adalah aljabar max-plus. Aljabar max-plus merupakan himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon = -\infty$, dinotasikan $\mathbb{R}_\varepsilon$, dilengkapi operasi maksimum $\oplus$ dan operasi penjumlahan $\otimes$. Aljabar max-plus dengan pasangan operasi $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ didefinisikan dengan $a \oplus b = \max(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ yang selanjutnya ditulis dengan $\mathbb{R}_{\max}$.

Salah satu masalah pada aljabar max-plus adalah masalah nilai dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus. Salah satu aplikasi nilai dan vektor eigen atas aljabar

*Penulis Korespondensi

max-plus adalah pada keperiodikan sistem antrian. Satu siklus layanan jaringan antrian adalah proses dari masuknya pelanggan ke pelayan awal sampai meninggalkan pelayan akhir. Jika waktu pelayanan ke- k lebih besar dari waktu pelayanan ke- $(k-1)$, maka akan terjadi *stuck* pada pelayanan ke- k . Keperiodikan sistem antrian ini telah dibahas sebelumnya oleh Krivulin [5].

Dalam artikel ini akan dikaji masalah penentuan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atas aljabar max-plus serta penerapan nilai eigen dan vektor eigen dalam keperiodikan sistem antrian.

2. Landasan Teori

2.1. Semi-Lapangan Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus merupakan himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon = -\infty$, dinotasikan $\mathbb{R}_\varepsilon$, dilengkapi operasi maksimum ($\oplus$) dan operasi penjumlahan biasa pada bilangan riil ($\otimes$). Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ dijelaskan pada Definisi 2.1.

Definisi 2.1. [?] Diberikan himpunan tak kosong $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$, dimana $\mathbb{R}$ adalah bilangan riil, $\varepsilon = -\infty$, dan didefinisikan dua operasi biner:

(1) operasi $\oplus$, dimana untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$, berlaku:

$$a \oplus b = \max(a, b),$$

(2) operasi $\otimes$, dimana untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$, berlaku:

$$a \otimes b = a + b.$$

Definisi 2.2. [3] Suatu grup yang ditulis $(G, *)$, dimana G adalah suatu himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner pada G memenuhi aturan berikut.

- (1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap unsur $a, b, c \in G$ (G dikatakan asosiatif terhadap operasi $*$),
- (2) terdapat suatu unsur e di G yang memenuhi $a * e = e * a = a$ untuk semua unsur a di G (e disebut identitas dari G), dan
- (3) untuk setiap $a \in G$, terdapat unsur a^{-1} di G yang memenuhi $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Definisi 2.3. [1] Suatu semiring $(S, \bullet, *)$, adalah suatu himpunan takkosong S , yang disertai dengan dua operasi biner $\bullet$ dan $*$, dan memenuhi aturan berikut.

- (1) operasi $\bullet$ bersifat asosiatif dan komutatif dengan elemen netral $\mathbf{0}$ (identitas terhadap $\bullet$), yaitu untuk setiap $a, b, c \in S$ dan $\mathbf{0} \in S$ berlaku:
 - (a) $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$,
 - (b) $a \bullet b = b \bullet a$,
 - (c) $\mathbf{0} \bullet a = a \bullet \mathbf{0} = a$.
- (2) operasi $*$ bersifat asosiatif dengan elemen satuan $\mathbf{1}$ (identitas terhadap $*$), yaitu untuk setiap $a, b, c \in S$ dan $\mathbf{1} \in S$ berlaku:
 - (a) $(a * b) * c = a * (b * c)$,

- (b) $a * \mathbf{1} = \mathbf{1} * a = a$.
- (3) operasi $*$ bersifat distributif terhadap operasi $\bullet$, yaitu untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku:
- (a) $(a \bullet b) * c = (a * c) \bullet (b * c)$,
- (b) $a * (b \bullet c) = (a * b) \bullet (a * c)$.
- (4) sifat penyerapan elemen netral $\mathbf{0}$ terhadap operasi $*$, yaitu untuk setiap $a \in S$ dan suatu $\mathbf{0} \in S$ memenuhi $a * \mathbf{0} = \mathbf{0} * a = \mathbf{0}$.

Definisi 2.4. [7] Suatu semiring $(S, \bullet, *)$ dikatakan semilapangan bila setiap elemen x di $S - \{\mathbf{0}\}$ mempunyai invers terhadap operasi $*$, yaitu untuk setiap $x \in S - \{\mathbf{0}\}$ terdapat $x^{-1} \in S - \{\mathbf{0}\}$ sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = \mathbf{1}$.

Definisi 2.5. [1] Suatu semilapangan $(S, \bullet, *)$ adalah komutatif jika operasi $*$ bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in S$ memenuhi $a * b = b * a$.

Definisi 2.6. [1] Suatu semilapangan S dikatakan idempoten jika operasi $\bullet$ bersifat idempoten, yaitu untuk setiap $a \in S$ berlaku $a \bullet a = a$.

2.2. Matriks pada Aljabar Max-Plus

Definisi 2.7. [4] Sebuah matriks didefinisikan menjadi suatu susunan nilai berbentuk persegi yang disusun dalam bentuk baris dan kolom. Suatu matriks ditulis sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Didefinisikan matriks $R_{\max}^{n \times m}$ sebagai matriks berukuran $n \times m$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$. Beberapa operasi terkait matriks pada aljabar max-plus adalah penjumlahan dan perkalian dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.8. [6] Penjumlahan matriks $A, B \in R_{\max}^{n \times m}$, didefinisikan dengan:

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij}).$$

Definisi 2.9. [6] Perkalian matriks $A \in R_{\max}^{n \times m}$ dengan skalar $\alpha \in R_{\max}$ didefinisikan oleh

$$[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}.$$

Definisi 2.10. [6] Perkalian matriks $A \in R_{\max}^{n \times l}$ dengan matriks $B \in R_{\max}^{l \times m}$ didefinisikan dengan:

$$[A \otimes B]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes b_{jk}.$$

Definisi 2.11. [2] Diberikan $A \in R_{\max}^{n \times n}$, matriks $\mathcal{E}$ adalah matriks dengan semua elemennya sama dengan ε (identitas terhadap $\oplus$), dan matriks E adalah matriks

dengan elemen ke $n = m$ bernilai 0 (identitas terhadap $\otimes$) dan elemen ke $n \neq m$ bernilai ε . Dinotasikan operasi:

- (1) $A \oplus \mathcal{E} = \mathcal{E} \oplus A = A$,
- (2) $A \otimes \mathcal{E} = \mathcal{E} \otimes A = \mathcal{E}$,
- (3) $E \otimes A = A \otimes E = A$,

$$\text{dengan } \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ dan } E = \begin{bmatrix} 0 & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & 0 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.12. [7] *Semimodul $\mathbf{M}$ atas semilapangan $\mathbb{R}_{\max}$ dengan operasi perkalian skalar $*$: $\mathbb{R}_{\max} * \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ sebagai $(a, x) \rightarrow a * x$ adalah himpunan yang memenuhi aksioma berikut.*

$\forall a, b \in \mathbb{R}_{\max}, \forall x, y \in \mathbf{M}$, berlaku:

- (1) semimodul $\mathbf{M}$ dengan operasi internal $\bullet$ bersifat asosiatif dan komutatif, yaitu
 - (i) $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$, dan
 - (ii) $a \bullet b = b \bullet a$,
- (2) $a * (x \bullet y) = a * x \bullet a * y$,
- (3) $(a \bullet b) * x = a * x \bullet b * x$,
- (4) $a * (b * x) = (a * b) * x$,
- (5) $\mathbf{1} * x = x$,
- (6) $\mathbf{0} * x = \mathbf{0}$,

untuk semua $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$ dan semua $x, y \in \mathbf{M}$.

2.3. Terminologi dalam Graf

Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ adalah pasangan terurut dari $V(G)$, yaitu himpunan titik (*vertex*) di G yang tak kosong, dan $E(G)$, yaitu himpunan sisi (*edge*) pada graf G [2]. Suatu graf berarah adalah pasangan terurut (V, A) dengan V adalah suatu himpunan titik dan A adalah suatu jalan atau busur. Suatu graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik di graf G . Graf $G = (V, A)$ dikatakan **terhubung kuat** jika untuk setiap $i, j \in V$, terdapat suatu lintasan dari i ke j , di mana $i \neq j$. Setiap sisi $(j, i) \in E$ pada G mempunyai nilai riil yang disebut **bobot**, selanjutnya dinotasikan dengan $w(j, i)$ atau $w(e)$. Graf G dengan setiap sisinya memiliki bobot disebut graf berbobot. Graf berarah berbobot dinotasikan $G(V, A)$, dimana setiap sisi $(j, i) \in A$ memiliki bobot. Bobot suatu lintasan $p = (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ merupakan jumlah dari bobot busur atau sisi penyusun lintasan tersebut. Bobot dari suatu lintasan p dinotasikan dengan $|p|_w = (A_{s, i_{(k-1)}} + \dots + A_{i_2, i_1} + A_{i_1, t})$. Bobot rata-rata dari lintasan p adalah bobot dari $|p|_w$ dibagi dengan panjang lintasan $|p|_l$.

Definisi 2.13. [6] *Diberikan $A \in R_{\max}^{n \times n}$ dengan semua sirkuit dalam $G(A)$ berbobot*

tak positif, maka:

$$\begin{aligned} A^* &= E \oplus A \oplus A^{\oplus 2} \oplus \dots, \\ A^+ &= A \otimes A^*. \end{aligned}$$

2.4. Representasi Graf pada Aljabar Max-Plus

Setiap matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ bersesuaian dengan dengan suatu graf berarah berbobot seperti yang diberikan pada definisi berikut.

Definisi 2.14. [6] Diberikan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Graf berbobot dari A adalah graf berarah berbobot $G(A) = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dan $A = \{(j, i) | w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$.

Graf berarah yang berbobot juga dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks atas aljabar max-plus, yaitu:

$$[A]_{ij} = \begin{cases} w(j, i), & \text{jika } (j, i) \in A \\ \varepsilon & \text{jika } (j, i) \notin A \end{cases}$$

Definisi 2.15. [6] Suatu matriks $A \in R_{\max}^{n \times n}$ dikatakan irreduisibel jika graf berbobot yang bersesuaian dengan A terhubung kuat.

3. Aljabar Max-Plus dan Sistem Antrian

Pada Definisi 3.1 diberikan definisi nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 3.1. [6] Diberikan $A \in R_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda \in R_{\max}$ disebut nilai eigen max-plus matriks A jika terdapat suatu vektor $v \in \mathbb{R}_{\max}^n$ dengan $v_{n \times 1} \neq \varepsilon$, sehingga $A \otimes v = \lambda \otimes v$. Vektor v disebut vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ .

Berdasarkan Definisi 3.1, nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar max-plus dijamin ada, berdasarkan teorema berikut.

Teorema 3.2. [6] Misalkan diberikan matriks $A \in R_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda_{\max}(A)$, adalah bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $G(A)$, merupakan suatu nilai eigen max-plus dari matriks A .

Bukti. Didefinisikan matriks $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$. Maka

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\max}(B) &= \bigoplus_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \text{trace}(B^{\otimes k}) \right), \\
 &= \bigoplus_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \text{trace}((-\lambda_{\max}(A) \otimes A)^{\otimes k}) \right), \\
 &= \bigoplus_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \text{trace}((-\lambda_{\max}(A))^{\otimes k} \otimes A^{\otimes k}) \right), \\
 &= \bigoplus_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} ((-\lambda_{\max}(A))^{\otimes k}) \otimes \text{trace}(A^{\otimes k}) \right), \\
 &= \bigoplus_{k=1}^n ((-\lambda_{\max}(A)) \otimes \lambda_{\max}(A)), \\
 &= \bigoplus_{k=1}^n (0) = 0.
 \end{aligned}$$

Akibatnya $G(B)$ tidak memiliki sirkuit dengan bobot positif. Menurut Definisi 2.13, dapat diperoleh:

$$\begin{aligned}
 B^* &= E \oplus B \cdots \oplus B^{n-1}, \text{ dan} \\
 B^+ &= B \oplus B^{\oplus 2} \oplus \cdots \oplus B^n.
 \end{aligned}$$

Oleh karena $\lambda_{\max}(B) = 0$, maka terdapat $k \in N, k \leq n$ dan suatu $s \in \{1, 2, \dots, n\}$, sehingga $(B^{\otimes k})_{ss} = 0$. Akibatnya komponen ke- s dari $B_{.s}^+$ (kolom ke- s matriks B^+) adalah $(B^{\otimes k})_{ss} = 0$, yang berarti bahwa $B_{.s}^+ \neq \varepsilon_{n \times 1}$. Menurut Definisi 2.13, $B^+ = B \otimes B^*$ dan $B^* = E \oplus B^+$. Diketahui bahwa $(E_{ss}) = 0$, maka $B_{.s}^+ = B_{.s}^*$. Akibatnya $B_{.s}^+ = B \otimes B_{.s}^* = B_{.s}^*$, atau $(-\lambda_{\max}(A) \otimes A) \otimes B_{.s}^* = B_{.s}^*$, atau $A \otimes B_{.s}^* = \lambda_{\max}(A) \otimes B_{.s}^*$. Jadi $\lambda_{\max}(A)$ merupakan suatu nilai eigen aljabar max-plus matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$ dan $B_{.s}^*$ merupakan vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$. $\square$

Contoh 3.3. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Akan ditentukan nilai eigen dari

matriks A .

Jawab. Diperoleh bahwa $\text{trace}(A) = 2 \oplus 4 \oplus 3 \oplus 1 = 4$. Kemudian,

$$A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix},$$

dan $\text{trace}(A^{\otimes 2}) = 7 \oplus 8 \oplus 6 \oplus 7 = 8$. Selanjutnya,

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 12 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 12 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

dan $\text{trace}(A^{\otimes 3}) = 12 \oplus 12 \oplus 12 \oplus 12 = 12$. Selanjutnya,

$$A^{\otimes 4} = \begin{bmatrix} 12 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 12 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 12 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 12 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 & 16 \\ 15 & 16 & 15 & 15 \\ 16 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 16 & 15 \end{bmatrix},$$

dan $\text{trace}(A^{\otimes 4}) = 15 \oplus 16 \oplus 15 \oplus 15 = 16$.

Berdasarkan Teorema 3.2, nilai eigen dan vektor eigen dari A adalah:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(A) &= \bigoplus_{k=1}^4 \left(\frac{1}{k} \text{trace}(A^{\otimes k}) \right) \\ &= (1) \text{trace}(L) \oplus \left(\frac{1}{2} \right) \text{trace}(A^{\otimes 2}) \oplus \left(\frac{1}{3} \right) \text{trace}(A^{\otimes 3}) \oplus \left(\frac{1}{4} \right) \text{trace}(A^{\otimes 4}) \\ &= (1) 4 \oplus \left(\frac{1}{2} \right) 8 \oplus \left(\frac{1}{3} \right) 12 \oplus \left(\frac{1}{4} \right) 16 \\ &= 4 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 4 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh nilai eigen dari matriks A sebesar 4.

4. Aplikasi pada Sistem Antrian

Misalkan $a_i(k)$ adalah waktu kedatangan pelanggan ke- k , dan $d_i(k)$ adalah waktu keberangkatan pelanggan ke- k untuk antrian ke i . Dapat dituliskan dengan notasi vektor matriks sebagai berikut.

$$a(k) = \begin{bmatrix} a_1(k) \\ \vdots \\ a_n(k) \end{bmatrix}, \quad d(k) = \begin{bmatrix} d_1(k) \\ \vdots \\ d_n(k) \end{bmatrix}, \quad \text{dan } T(k) = \begin{bmatrix} T_{1k} & \varepsilon \\ & \ddots \\ \varepsilon & T_{nk} \end{bmatrix}.$$

Dapat dituliskan,

$$d(k) = A \otimes d(k-1),$$

$$A = T_k \otimes (F \oplus E) = \begin{bmatrix} t_1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & t_1 \\ t_2 & t_2 & \cdots & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t_{n-1} & \varepsilon \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & t_n & t_n \end{bmatrix}.$$

Berikut diberikan algoritma untuk menentukan keperiodikan dari sistem antrian.

- (1) menentukan matriks A yang bersesuaian dengan sistem antrian;

- (2) menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A ;
- (3) menentukan matriks B^* ;
- (4) menentukan $d(0)$, yaitu vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen matriks A ;
- (5) melakukan perhitungan nilai $d_i(k)$, untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $k = 0, 1, 2, \dots$
- (6) menuliskan kembali tabel keberangkatan awal pelanggan, sehingga menghasilkan tabel perhitungan saat keberangkatan awal pelanggan yang periodik.

Contoh 4.1. Misalkan waktu layanan pada layanan ke- $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ berturut-turut adalah $t_1 = 3, t_2 = 2, t_3 = 5, t_4 = 4, t_5 = 9, t_6 = 5$. Akan ditentukan keperiodikan dari sistem antrian.

Jawab. Notasikan matriks A sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Misalkan saat keberangkatan awal pelanggan $d(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$, maka saat keberangkatan untuk $k = 1, 2, 3, \dots$ adalah:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d_1(1) \\ d_2(1) \\ d_3(1) \\ d_4(1) \\ d_5(1) \\ d_6(1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} d_1(2) \\ d_2(2) \\ d_3(2) \\ d_4(2) \\ d_5(2) \\ d_6(2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \\ 9 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} d_1(3) \\ d_2(3) \\ d_3(3) \\ d_4(3) \\ d_5(3) \\ d_6(3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \\ 9 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \\ 15 \\ 14 \\ 27 \\ 23 \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} d_1(15) \\ d_2(15) \\ d_3(15) \\ d_4(15) \\ d_5(15) \\ d_6(15) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 116 \\ 109 \\ 105 \\ 100 \\ 126 \\ 122 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 118 \\ 114 \\ 109 \\ 135 \\ 131 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} d_1(16) \\ d_2(16) \\ d_3(16) \\ d_4(16) \\ d_5(16) \\ d_6(16) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 125 \\ 118 \\ 114 \\ 109 \\ 135 \\ 131 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134 \\ 127 \\ 123 \\ 118 \\ 144 \\ 140 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Saat keberangkatan pelanggan $d(k)$ sampai $k = 16$ diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Perhitungan Saat Keberangkatan Pelanggan

k	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
0	0	0	0	0	0	0
1	3	2	5	4	9	5
2	8	5	10	9	18	14
3	17	10	15	14	27	23
4	26	19	20	19	36	32
5	35	28	25	24	45	41
6	44	37	33	29	54	50
7	53	46	42	37	63	59
8	62	55	51	46	72	68
9	71	64	60	55	81	72
10	80	73	69	64	90	86
11	89	82	78	73	99	95
12	98	91	87	82	108	104
13	107	100	96	91	117	113
14	116	109	105	100	126	122
15	125	118	114	109	135	131
16	134	127	123	118	144	140

Dari Tabel 1, saat keberangkatan pelanggan $d_i(k)$ tidak periodik seluruhnya, karena periode dari $d_1(0)$ ke $d_1(1)$ sebesar 3, periode dari $d_1(1)$ ke $d_1(2)$ sebesar 5, sedangkan periode dari $d_1(2)$ ke $d_1(3)$ sebesar 9. Jadi, secara keseluruhan tidak periodik pada d_1 . Selanjutnya akan dilakukan upaya agar saat keberangkatan pelanggan periodik.

Saat keberangkatan pelanggan $d(k)$ dikatakan periodik dengan periode λ apabila

$$d(k) = \lambda \otimes d(k-1).$$

Karena $d(k) = A \otimes d(k-1)$, agar $d(k)$ periodik terhadap periode λ , maka haruslah terpenuhi:

$$d(k) = A \otimes d(k-1) = \lambda \otimes d(k-1).$$

Hal ini berarti λ merupakan suatu nilai eigen dari matriks A , dan $d(k-1)$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . Karena hal ini berlaku untuk $k = 1, 2, \dots$, maka saat keberangkatan awal pelanggan haruslah merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Selanjutnya akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari A . Dengan menggunakan langkah seperti pada Contoh 3.3, diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 9$.

Kemudian, dihitung:

$$B = -\lambda(A) \otimes A = -9 \otimes \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -6 \\ -7 & -7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -4 & -4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 & -5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$B^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -12 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -10 & -10 \\ -13 & -14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -13 \\ -11 & -8 & -8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -9 & -9 & -10 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -4 & -4 & -8 \end{bmatrix}.$$

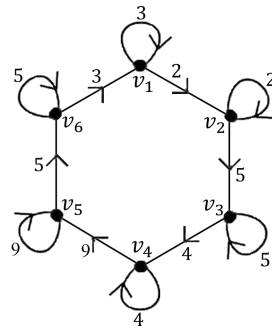
$$B^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} -18 & \varepsilon & \varepsilon & -10 & -10 & -14 \\ -19 & -21 & \varepsilon & \varepsilon & -17 & -17 \\ -15 & -12 & -12 & \varepsilon & \varepsilon & -17 \\ -16 & -13 & -13 & -15 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -9 & -5 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -9 & -4 & -4 & -12 \end{bmatrix}.$$

$$B^{\otimes 4} = \begin{bmatrix} -24 & \varepsilon & -15 & -10 & -10 & -18 \\ -25 & -28 & \varepsilon & -17 & -17 & -21 \\ -19 & -16 & -16 & \varepsilon & -21 & -21 \\ -20 & -17 & -17 & -15 & 20 & 22 \\ -16 & -9 & -5 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & -13 & -9 & -4 & -4 & -16 \end{bmatrix}.$$

$$B^{\otimes 5} = \begin{bmatrix} -30 & -19 & -15 & -10 & -10 & -22 \\ -31 & -35 & 22 & -17 & -17 & -25 \\ -23 & -20 & -20 & -21 & -21 & -25 \\ -24 & -21 & -21 & -25 & 26 & 26 \\ -16 & -9 & -5 & 0 & 0 & -22 \\ -20 & -13 & -9 & -4 & -4 & -20 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 B^* &= E \oplus B \oplus B^{\otimes 2} \oplus B^{\otimes 3} \oplus B^{\otimes 4} \oplus B^{\otimes 5}, \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -19 & -15 & -10 & -10 & -6 \\ -7 & 0 & -22 & -17 & -17 & -13 \\ -11 & -4 & 0 & -21 & -21 & -17 \\ -16 & -9 & -5 & 0 & -26 & -22 \\ -16 & -9 & -5 & 0 & 0 & -22 \\ -20 & -13 & -9 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.14, matriks A dapat direpresentasikan dalam bentuk graf pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Berarah Berbobot

Karena sirkuit $v_5 \rightarrow v_5$ adalah sirkuit kritis dalam $G(A)$, maka kolom ke-5 dari matriks $B_{\cdot 5}^*$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 9, yaitu:

$$v = \begin{bmatrix} -10 \\ -17 \\ -21 \\ -26 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned}
 A \otimes v &= \lambda_{\max}(A) \otimes v, \\
 \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -10 \\ -17 \\ -21 \\ -26 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} &= 9 \otimes \begin{bmatrix} -10 \\ -17 \\ -21 \\ -26 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ -12 \\ -17 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Karena saat keberangkatan awal pelanggan $d(0)$ adalah waktu, maka haruslah tiap entri dari $d(k)$ bernilai positif. Akan dilakukan upaya agar tiap entri dari vektor

eigen v bernilai positif dengan membentuk vektor $v^* = \beta \otimes v$, dengan $\beta = \min(v_i)$. Selanjutnya diperoleh $\beta = \min(v_i) = -26$, untuk $i = 1, 2, \dots, 5$. Jadi, saat keberangkatan tercepat pelanggan adalah:

$$d(0) = \beta \otimes v = \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \\ 5 \\ 0 \\ 26 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh saat keberangkatan pelanggan untuk $k = 1, 2, \dots, 16$ seperti tercantum dalam Tabel 2.

Tabel 2. Perhitungan Saat Keberangkatan Pelanggan

k	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
0	16	9	5	0	26	22
1	25	18	14	9	35	31
2	34	27	23	18	44	40
3	43	36	32	27	53	49
4	52	45	41	36	62	58
5	61	54	50	45	71	67
6	70	63	59	54	80	76
7	79	72	68	63	89	85
8	88	81	77	72	98	94
9	97	90	86	81	107	103
10	106	99	95	90	116	112
11	115	108	104	99	125	121
12	124	117	113	108	134	130
13	133	126	122	117	143	139
14	142	135	131	126	152	148
15	151	144	140	135	161	157
16	160	153	149	144	170	166

Pada Tabel 2, periode keberangkatan telah periodik, dengan menetapkan perhitungan berdasarkan

$$\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \text{trace}(A^{\otimes k}) \right),$$

dan

$$d(k) = A \otimes d(k-1),$$

dimana $A = T_k \otimes (G \oplus E)$. Diperoleh saat keberangkatan awal $d_i(0) = [0, 16, 9, 5, 0, 26, 22]^T$ yang periodik dengan perioda sebesar 9.

5. Kesimpulan

Pada artikel ini telah diperoleh nilai eigen dan vektor eigen dari aljabar max-plus serta aplikasinya pada sistem antrian. Nilai eigen pada aljabar max-plus dapat ditentukan dengan

$$\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \operatorname{trace}(A^{\otimes k}) \right).$$

Vektor eigen diperoleh dari kolom ke i dari B^* , di mana i adalah titik penyusun sirkuit kritis dari $G(A)$ dan $B^* = E \oplus B \oplus B^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus B^{\otimes n-1}$. Agar saat keberangkatan pelanggan periodik sebesar $\lambda_{\max}(A)$, maka haruslah waktu keberangkatan awal pelanggan sama dengan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Admi Nazra, Ibu Shelvi Ekariani, dan Ibu Des Wellyanti, yang telah memberikan kritik dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Bernd, H., Geert, J.O., Jacob., V.W., 2006, *Max Plus at Work Modelling and Analysis of Synchronized System: A Course on max-plus Algebra and Its Application*, Princeton University Press. New Jersey.
- [2] Bondy, J.A. and U.S.R. Murty. 2000. *Graph Theory with Applications*. Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York.
- [3] Dummit, D.S., Foote, R.M., 1991, *Abstract Algebra*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [4] Hadley, G., 1961, *Linear Algebra*, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [5] Krivulin, N.K., 1995, *A Max-Algebra Approach to Modeling and Simulation of Tandem Queueing Systems, Mathematical and Computer Modelling* Vol. **22**: 25 – 31
- [6] Rudhito, M.A., 2016, *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
- [7] Subiono, 2015, *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*, Version 3.0.0, ITS, Surabaya