

KESTABILAN SOLUSI NOL SISTEM DISKRIT LINIER

KHOFIFA RAMADHANI, MUHAFZAN*, ZULAKMAL

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : khofifaramadhani13@gmail.com, muhafzan@sci.unand.ac.id, zulakmal@sci.unand.ac.id*

Diterima 15 November 2021 Direvisi 27 Maret 2022 Dipublikasikan 30 April 2022

Abstrak. Suatu sistem diskrit linier adalah suatu sistem persamaan beda (difference) yang memenuhi sifat kelinieran. Dalam artikel ini dikaji kestabilan solusi nol dari sistem diskrit linier. Kriteria kestabilan ditentukan menggunakan nilai eigen dari matriks keadaan. Selanjutnya disajikan beberapa contoh untuk mengilustrasikan kestabilan solusi nol dari sistem diskrit linier.

Kata Kunci: Kestabilan, solusi nol, radius spektral, titik ekuilibrium, sistem diskrit linier

1. Pendahuluan

Suatu sistem diskrit linier adalah suatu persamaan beda (*difference*) linier yang diberikan oleh persamaan berikut :

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Solusi persamaan beda (1.1) diberikan sebagai berikut [3] :

$$\mathbf{x}(k) = A^k \mathbf{x}_0 \quad (1.2)$$

Sistem diskrit linier sering digunakan sebagai suatu model matematika dalam berbagai bidang aplikasi seperti biologi, kimia, ekologi, ekonomi, dan yang lainnya [3]. Oleh karena itu kajian mengenai perilaku solusi sistem diskrit linier menjadi penting untuk dilakukan.

Salah satu kajian dari sistem diskrit linier adalah kestabilan solusi nol. Suatu titik $\mathbf{x}^*$ dikatakan titik ekuilibrium dari sistem (1.1) jika $A\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$. Jika $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ maka $\mathbf{x}^*$ disebut solusi nol dari sistem (1.1) [3]. Kajian mengenai kestabilan ini telah banyak dilakukan oleh para peneliti. Iggidr dan Bensoubaya [6] mengkaji suatu kriteria kestabilan untuk masalah kontrol. Gurvits [4] mengkaji kestabilan

*penulis korespondensi

sistem diskrit untuk inklusi linier. Debeljkovic dan Stojanovic [2] mengkaji kestabilan menggunakan metode Lyapunov, Canto dan Kostova [1] mengkaji kestabilan menggunakan metode Brauers.

Dalam artikel ini dikaji kembali kestabilan solusi nol dari sistem diskrit linier (1.1) dengan mengkaji perilaku nilai eigen matriks A . Metode nilai eigen ini merupakan metode yang relatif sederhana.

2. Landasan Teori

2.1. Teori Matriks

Definisi 2.1. [7] *Himpunan semua nilai eigen dari matriks $A_{n \times n}$, dilambangkan dengan $\sigma(A)$, disebut sebagai spektrum dari A , yaitu*

$$\sigma(A) = \{\lambda : \lambda \text{ nilai eigen } A\}$$

Definisi 2.2. [7] *Radius spektral dari $A_{n \times n}$, disimbolkan dengan $\rho(A)$, didefinisikan sebagai maksimum dari nilai mutlak nilai eigen-nilai eigen matriks A , yaitu*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Definisi 2.3. [5] *Misalkan $A_{n \times n}$ dan $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, k$ adalah nilai eigen dari A dengan pengulangan masing-masing sebanyak s_i kali sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^k s_i = n$. Suatu matriks $J_{n \times n}$ dikatakan bentuk Jordan dari matriks A jika terdapat matriks nonsingular $P_{n \times n}$ sedemikian sehingga $P^{-1}AP = J$, dengan matriks J berbentuk sebagai berikut :*

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Matriks $J_i(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ adalah matriks blok Jordan berukuran $s_i \times s_i$ yang terkait dengan nilai eigen λ_i , yang berbentuk sebagai berikut :

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Dalam [3] dinyatakan bahwa suatu nilai eigen λ dari matriks $A_{n \times n}$ dikatakan *semisimple* jika blok Jordan yang terkait dengan nilai eigen λ tersebut adalah diagonal.

2.2. Penyelesaian Sistem Beda Linier

Telah diketahui bahwa solusi persamaan beda (1.1) diberikan oleh persamaan (1.2). Untuk menghitung A^k dapat digunakan algoritma Putzer yang diberikan berikut

ini [3]. Akan ditentukan suatu representasi A^k dalam bentuk

$$A^k = \sum_{i=1}^n u_i(k)M(i-1), \quad (2.3)$$

dengan $u_i(k)$ adalah fungsi skalar yang akan ditentukan, dan

$$M(i) = (A - \lambda_i I)M(i-1), \quad M(0) = I \quad (2.4)$$

atau

$$M(i+1) = (A - \lambda_{i+1} I)M(i), \quad M(0) = I. \quad (2.5)$$

dengan

$$u_1(k) = \lambda_1^k, \quad u_i(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_i^{k-1-j} u_{i-1}(j), \quad (2.6)$$

3. Pembahasan

Berikut ini diberikan definisi kestabilan titik ekuilibrium sistem diskrit linier.

Definisi 3.1. [3] *Titik ekuilibrium $\mathbf{x}^*$ dari sistem (1.1) dikatakan*

1. *Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $k > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta$ maka $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$ untuk semua $k > 0$.*
2. *Stabil asimtotik jika ia stabil dan terdapat μ sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \mu$ maka $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*$.*

Dari Definisi (3.1), dapat dinyatakan bahwa solusi nol dari sistem (1.1) adalah stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $k > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ maka $\|\mathbf{x}_k\| < \varepsilon$ untuk semua $k > 0$. Selain itu, solusi nol tersebut adalah stabil asimtotik jika ia stabil dan terdapat μ sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{x}_0\| < \mu$ maka $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Kriteria kestabilan solusi nol sistem (1.1) diberikan berikut ini.

Teorema 3.2. [3] *Solusi nol dari sistem (1.1) adalah*

1. *Stabil jika dan hanya jika terdapat konstanta positif M sedemikian sehingga $\|A^k\| \leq M$ untuk $k > 0$.*
2. *Stabil asimtotik jika dan hanya jika $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$.*

Bukti.

1. ($\Leftarrow$) Misalkan ada $M > 0$ sedemikian sehingga $\|A^k\| \leq M$ untuk $k > 0$. Akan dibuktikan sistem (1.1) adalah stabil. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, akan dicari $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|A^k \mathbf{x}_0\| < \varepsilon, \quad \text{untuk } k > 0.$$

Karena $\|A^k\| \leq M$ maka

$$\|A^k \mathbf{x}_0\| \leq \|A^k\| \|\mathbf{x}_0\| \leq M \|\mathbf{x}_0\|. \quad (3.1)$$

Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, maka berlaku

$$\| \mathbf{x}_0 \| < \delta \implies \| A^k \mathbf{x}_0 \| < \varepsilon, \quad \text{untuk } k > 0.$$

Ini menunjukkan bahwa solusi nol dari sistem (1.1) adalah stabil.

($\Rightarrow$) Misalkan solusi nol dari sistem (1.1) adalah stabil. Akan dibuktikan terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $\| A^k \| \leq M$ untuk $k > 0$. Karena solusi nol adalah stabil, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\| \mathbf{x}_0 \| < \delta \implies \| A^k \mathbf{x}_0 \| < \varepsilon, \quad \text{untuk } k > 0. \quad (3.2)$$

Perhatikan bahwa

$$\| \mathbf{x}_0 \| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} \| \mathbf{x}_0 \| < 1.$$

Dengan menggunakan definisi norm matriks dan hubungan (3.2), diperoleh

$$\begin{aligned} \| A^k \| &= \max_{\| \frac{1}{\delta} \mathbf{x}_0 \| \leq 1} \| A^k \frac{1}{\delta} \mathbf{x}_0 \| \\ &= \frac{1}{\delta} \max_{\| \mathbf{x}_0 \| \leq \delta} \| A^k \mathbf{x}_0 \| \\ &< \frac{1}{\delta} \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Dengan memilih $M = \frac{1}{\delta} \cdot \varepsilon$, maka pernyataan terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $\| A^k \| \leq M$ terbukti.

2. ($\Rightarrow$) Misalkan solusi nol dari sistem (1.1) adalah stabil asimtotik. Akan dibuktikan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| A^k \| = 0.$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, akan dicari $K_\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga

$$k > K_\varepsilon \implies \| A^k \| < \varepsilon. \quad (3.3)$$

Karena solusi nol adalah stabil asimtotik, maka terdapat $\mu = 1$ sedemikian sehingga

$$\| \mathbf{x}_0 \| < 1 \implies \| \mathbf{x}_k \| = \| A^k \mathbf{x}_0 \| \leq \| A^k \| \| \mathbf{x}_0 \| < \| A^k \| < \varepsilon, \quad \forall k > 0. \quad (3.4)$$

Karena (3.4) berlaku untuk setiap $k > 0$, maka dari Definisi (3.1) bagian 2, K_ε dapat dipilih sedemikian sehingga $k > K_\varepsilon \implies \| A^k \| < \varepsilon$, yang menunjukkan bahwa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| A^k \| = 0.$$

($\Leftarrow$) Misalkan $\lim_{k \rightarrow \infty} \| A^k \| = 0$. Akan dibuktikan bahwa solusi nol dari sistem (1.1) adalah stabil asimtotik. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $\lim_{k \rightarrow \infty} \| A^k \| = 0$, maka terdapat $K_\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga

$$k > K_\varepsilon \implies \| A^k \| < \varepsilon.$$

Pilih $M = \varepsilon$, maka menurut bagian satu sistem (1.1) adalah stabil. Selanjutnya akan dicari $\mu > 0$ sedemikian sehingga

$$\| \mathbf{x}_0 \| < \mu \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = 0. \quad (3.5)$$

Karena $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$, maka

$$\|\mathbf{x}_k\| = \|A^k \mathbf{x}_0\| \leq \|A^k\| \|\mathbf{x}_0\| < \varepsilon \|\mathbf{x}_0\|. \quad (3.6)$$

Pilih $\mu = 1$, maka berlaku (3.5). Ini menunjukkan bahwa sistem (1.1) adalah stabil asimtotik. $\square$

Teorema berikut merupakan kriteria uji kestabilan menggunakan nilai eigen dari matriks A .

Teorema 3.3. [3] *Pernyataan berikut berlaku :*

1. *Solusi nol dari sistem (1.1) adalah stabil jika dan hanya jika $\rho(A) \leq 1$, dan nilai eigen dengan modulus 1 adalah semisimple.*
2. *Solusi nol dari sistem (1.1) stabil asimtotik jika dan hanya jika $\rho(A) < 1$.*

Bukti.

1. Misalkan $A = PJP^{-1}$ untuk suatu matriks nonsingular $P_{n \times n}$, dengan $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$ adalah matriks Jordan dari A , dan

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Pada matriks J , skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ merupakan nilai eigen dari matriks A . Ingat bahwa $\sigma(A) = \sigma(J)$, oleh karena itu cukup diperhatikan matriks J saja.

Dari Teorema (3.2), solusi nol dari (1.1) stabil jika dan hanya jika terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $\|A^k\| = \|PJ^kP^{-1}\| \leq M$.

Oleh karena itu diperoleh

$$\|J^k\| \leq \widehat{M}$$

dengan

$$\widehat{M} = \frac{M}{\|P\| \|P^{-1}\|}.$$

Selanjutnya $J^k = \text{diag}(J_1^k, J_2^k, \dots, J_r^k)$ dengan

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{s_i-1} \lambda_i^{k-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa J_i^k tidak terbatas jika $|\lambda_i| > 1$ atau jika $|\lambda_i| = 1$ dan tidak semisimple. $|\lambda_i| = 1$ dan semisimple jika dan hanya jika $J_i^k \rightarrow 1$ bila $k \rightarrow \infty$. $|\lambda_i| < 1$ jika dan hanya jika $|\lambda_i^k| \rightarrow 0$ bila $k \rightarrow \infty$. Akibatnya $J_i^k \rightarrow 0$ bila $k \rightarrow \infty$ dan $\|J_i^k\| \rightarrow 0$ bila $k \rightarrow \infty$. Ini menunjukkan bahwa solusi nol dari sistem (1.1) adalah stabil jika dan hanya jika $\rho(A) \leq 1$.

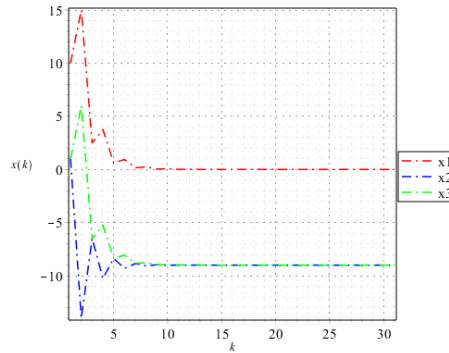
2. Bukti bagian ini sudah tercakup dalam bukti bagian pertama. $\square$

Berikut ini diberikan beberapa contoh mengenai kestabilan pada sistem (1.1).

Contoh 3.4. Akan diperiksa kestabilan solusi nol sistem (1.1) dengan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 & -1 \\ -1.5 & -0.5 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dari matriks A diperoleh $\sigma(A) = \{1, 0.5, -0.5\}$ dan $\rho(A) = 1$. Karena $\rho = 1$, berdasarkan Teorema (3.3) maka solusi nol dari sistem adalah stabil. Grafik solusi dari sistem (1.1) untuk matriks A ini diperlihatkan dalam Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Grafik sistem (1.1) yang stabil

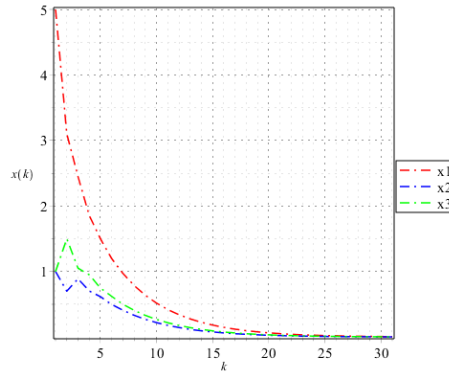
Grafik tersebut memperlihatkan bahwa jika pada awalnya solusi dekat dengan solusi nol, maka dengan berlalunya waktu solusi tersebut tetap dekat dengan solusi nol, yang memperlihatkan bahwa solusi nol dari sistem tersebut adalah stabil.

Contoh 3.5. Akan diperiksa kestabilan solusi nol sistem (1.1) dengan matriks A sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Dari matriks A diperoleh $\sigma(A) = \{-0.3807, 0.8118, 0.3689\}$ dan $\rho(A) = 0.8118$. Karena $\rho < 1$, berdasarkan Teorema (3.3) maka solusi nol dari sistem adalah stabil

asintotik. Grafik solusi dari sistem (1.1) untuk matriks A ini diperlihatkan dalam Gambar 2 berikut. Grafik tersebut memperlihatkan bahwa jika pada awalnya solusi



Gambar 2. Grafik sistem (1.1) yang stabil asimtotik

dekat dengan solusi nol, maka dengan berlalunya waktu solusi tersebut bertambah dekat solusi nol, yang memperlihatkan bahwa solusi nol dari sistem tersebut adalah stabil asimtotik.

Contoh 3.6. Akan diperiksa kestabilan solusi nol sistem (1.1) dengan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

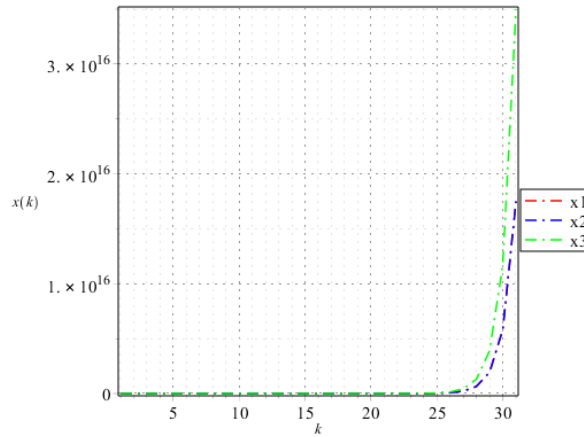
Dari matriks A diperoleh $\sigma(A) = \{3, 2\}$ dan $\rho(A) = 3$. Karena $\rho(A) > 1$, berdasarkan Teorema (3.3) maka solusi nol dari sistem adalah tak stabil. Grafik solusi dari sistem (1.1) untuk matriks A ini diperlihatkan dalam gambar berikut. Grafik tersebut memperlihatkan bahwa jika pada awalnya solusi dekat dengan solusi nol, maka dengan berlalunya waktu solusi tersebut menjauhi solusi nol, yang memperlihatkan bahwa solusi nol dari sistem tersebut adalah tak stabil.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa kestabilan solusi nol sistem diskrit linier

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dapat diperiksa menggunakan nilai dari matriks A . Solusi nol dari sistem tersebut adalah stabil jika dan hanya jika $\rho(A) \leq 1$, dan nilai eigen solusi nol dari sistem tersebut adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $\rho(A) < 1$.



Gambar 3. Grafik sistem (1.1) yang tidak stabil

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Yudiantri Asdi, Bapak Budi Rudianto, dan Bapak Admi Nazra yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Canto, B., Rafael C., dan Snezhana K. 2014. *Stabilization of Positive Linear Discrete-Time Systems by Using a Brauers Theorem*. <https://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/856356/>. Diakses pada 11 September 2021.
- [2] Debeljkovic, D dan Sreten S. 2010. *The Stability of Linear Discrete Time Delay Systems in the Sense of Lyapunov: An Overview*. <https://www.researchgate.net/publication/258995626>. Diakses pada 11 September 2021.
- [3] Elaydi, S. 1999. *An Introduction to Difference Equations*. Springe-Verlag, London.
- [4] Gurvits, L. 1995. *Stability of Discrete Linear Inclusion*. <https://core.ac.uk/download/pdf/82419057.pdf>. Diakses pada 7 September 2021.
- [5] Horn, Roger A dan Charles R. Johnson. 2013. *Matrix Analysis, Second Edition*. Cambridge University Press.
- [6] Inggidr, A dan Mohamed B. 1996. *Stability of Discrete-time Systems : New Criteria and Applications to Control Problem*. <https://hal.inria.fr/inria-00073692/document>. Diakses pada 4 September 2021.
- [7] Kelley, Walter G., dan Allan C. Petterson. 2001. *Difference Equation An Introduction with Applications*. Academic Press, London.