Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **3** Hal. 150 – 156
ISSN : 2303–291X

BILANGAN AJAIB MAKSIMUM DAN MINIMUM PADA GRAF SIKLUS GANJIL

ANNISAH ISKANDAR
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
annisahiskandar@gmail.com

Abstrak. Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Dalam hal ini $|V(G)| = v$ dan $|E(G)| = e$. Suatu graf G merupakan graf total titik ajaib jika terdapat pemetaan bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, \cdots, v + e\}$. Pada jurnal ini penulis mengkaji kembali tentang bilangan ajaib maksimum dan minimum pada graf siklus ganjil.

Kata Kunci: Graf siklus, pelabelan ajaib, bilangan ajaib maksimum, bilangan ajaib minimum

1. Pendahuluan

Dalam teori graf, pelabelan menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah peta jaringan jalan raya, jaringan internet, sistem alamat jaringan komunikasi, dan desain sirkuit. Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif yang disebut label. Pada suatu graf siklus dengan e sisi dan v titik dapat diberikan label pada titik dan sisi mulai dari angka 1 sampai $(v + e)$ sehingga apabila label-label pada sisi yang saling bertetangga dan label titik yang terkait dengan sisi-sisi tersebut dijumlahkan, akan menghasilkan jumlah yang sama. Jumlah ini kemudian disebut sebagai bilangan ajaib *(magic number)* dan graf yang dihasilkan dikenal sebagai graf titik ajaib *(vertex magic graph)*.

Untuk menentukan suatu graf titik ajaib tidaklah mudah, diperlukan teknik atau metode-metode tertentu dalam melabelkan suatu titik dan sisi sede- mikian sehingga didapatkan suatu bilangan ajaib yang sesuai pada masing-masing titik yang berbeda. Pada pelabelan total titik ajaib dari suatu graf siklus terdapat bilangan ajaib maksimum dan bilangan ajaib minimum. Metode pelabelan titik dan sisi (pelabelan total) berbeda-beda dalam suatu graf, bergantung pada banyaknya titik dan sisi pada graf tersebut. Pada graf siklus, jika banyaknya titik berjumlah genap maka penentuan label titik dan label sisi dilakukan dengan menyesuaikan jumlah seluruh label sisi terlebih dahulu.

2. Bilangan Ajaib Maksimum pada Graf Siklus Ganjil

Bilangan ajaib maksimum pada pelabelan total titik ajaib terhadap graf siklus ganjil diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1. *Misalkan terdapat graf C_v, dengan v ganjil $v \geq 3$. Apabila terdapat pelabelan total titik ajaib dengan himpunan label $\{1, 2, \cdots, v\}$ diberikan kepada himpunan titik di C_v, maka akan diperoleh bilangan ajaib maksimum, yaitu $k = \frac{7v}{2} + \frac{3}{2}$.*

Bukti. Pelabelan total titik ajaib pada graf C_v, v ganjil dapat dikonstruksikan sebagai berikut. Sisi yang berada di sebelah kiri titik adalah sisi yang terletak berlawanan arah dengan arah jarum jam dari titik tersebut. Sisi yang berada di sebelah kanan titik adalah sisi yang terletak searah dengan arah jarum jam dari titik tersebut. Pelabelan graf G dimulai dengan memberikan label titik secara berurutan dari angka 1 sampai v yang searah dengan arah jarum jam. Kemudian dilanjutkan dengan pemberian label sisi yang berada disebelah kanan titik yang berlabel 1. Label sisi dimulai dengan $2v$ yang kemudian berkurang sesuai dengan label titik. Sehingga pelabelan titik dan sisi dapat dirumuskan seperti pada Gambar 2.1 berikut. $\square$

Kasus	Pelabelan titik (v_x)	Pelabelan Sisi Kiri (e_{lx})	Pelabelan Sisi Kanan (e_{rx})
Pelabelan titik dimulai dengan 1	$2i + 1$ $i = 0,1,\ldots,\frac{v-1}{2}$	$\frac{3v}{2} + \frac{1}{2} - i$	$2v - i$
Pelabelan titik dimulai dengan 2	$2i + 2$ $i = 0,1,\ldots,\frac{v-1}{2} - 1$	$2v - i$	$\frac{3v}{2} - \frac{1}{2} - i$

atau

Pelabelan titik dimulai dengan 3	$2i + 3$ $i = 0,1,\ldots,\frac{v-1}{2} - 2$	$\frac{3v}{2} - \frac{1}{2} - i$	$2v - 1 - i$
Pelabelan titik dimulai dengan 4	$2i + 4$ $i = 0,1,\ldots,\frac{v-1}{2} - 3$	$2v - 1 - i$	$\frac{3v}{2} - \frac{3}{2} - i$

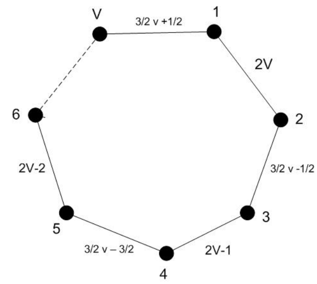
atau

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

atau

DImulai dengan $v-1$	$2i + (v-1)$ $i = 0,1,\ldots,\frac{v-1}{2} - (v-2)$	$2v + (1 - \frac{v-1}{2}) - i$	$\frac{3v}{2} + (1 - \frac{v}{2}) - i$
Dimulai dengan v	$2i + v$ $i = 0,1,\ldots,\frac{v-1}{2} - (v-1)$	$\frac{3v}{2} + (1 - \frac{v}{2}) - i$	$2v + (1 - \frac{v+1}{2}) - i$

Gambar 2.1. Pelabelan total titik ajaib dengan bilangan ajaib maksimum



Gambar 2.2. Graf C_v, v ganjil dengan himpunan label titik $\{1, 2, \cdots, v\}$

Berikut adalah contoh untuk mengilustrasikan Teorema 2.1 dengan n ganjil. Diberikan pelabelan total titik ajaib terhadap graf siklus C_9 sebagai berikut.

(i) Dimulai dengan memberikan label titik secara berurutan dari angka 1 sampai v yang searah jarum jam.
Label v_1 pada posisi ke-0 $(i = 0)$, $v_1 = 2i + 1 = 2(0) + 1 = 1$.
Label v_2 pada posisi ke-0 $(i = 0)$, $v_2 = 2i + 2 = 2(0) + 2 = 2$.
Label v_3 pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $v_3 = 2i + 1 = 2(1) + 1 = 3$.
Label v_4 pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $v_4 = 2i + 2 = 2(1) + 2 = 4$.
Label v_5 pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $v_5 = 2i + 1 = 2(2) + 1 = 5$.
Label v_6 pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $v_6 = 2i + 2 = 2(2) + 2 = 6$.
Label v_7 pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $v_7 = 2i + 1 = 2(3) + 1 = 7$.
Label v_8 pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $v_8 = 2i + 2 = 2(3) + 2 = 8$.
Label v_9 pada posisi ke-4 $(i = 4)$, $v_9 = 2i + 1 = 2(4) + 1 = 9$.

(ii) Kemudian pemberian label sisi pada posisi $i = 0, 1, 2$.
Label e_{l1} pada posisi ke-0 $(i = 0)$, $e_{l1} = \frac{3v}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{3(9)}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 14$.
Label e_{r1} pada posisi ke-0 $(i = 0)$, $e_{r1} = 2v - i = 2(9) - 0 = 18$.
Label e_{l2} pada posisi ke-0 $(i = 0)$, $e_{l2} = 2v - i = 2(9) - 0 = 18$.
Label e_{r2} pada posisi ke-0 $(i = 0)$, $e_{r2} = \frac{3v}{2} - \frac{1}{2} - i = \frac{3(9)}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 13$.
Label e_{l3} pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $e_{l3} = \frac{3v}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{3(9)}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 13$.
Label e_{r3} pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $e_{r3} = 2v - i = 2(9) - 1 = 17$.
Label e_{l4} pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $e_{l4} = 2v - i = 2(9) - 1 = 17$.
Label e_{r4} pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $e_{r4} = \frac{3v}{2} - \frac{1}{2} - i = \frac{3(9)}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 12$.
Label e_{l5} pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $e_{l5} = \frac{3v}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{3(9)}{2} + \frac{1}{2} - 2 = 12$.
Label e_{r5} pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $e_{r5} = 2v - i = 2(9) - 2 = 16$.
Label e_{l6} pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $e_{l6} = 2v - i = 2(9) - 2 = 16$.
Label e_{r6} pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $e_{r6} = \frac{3v}{2} - \frac{1}{2} - i = \frac{3(9)}{2} - \frac{1}{2} - 2 = 11$.

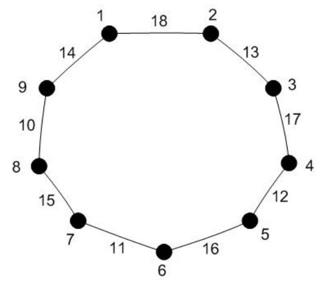
(iii) Pemberian label sisi pada posisi $i = 3, 4$.
Label e_{l7} pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $e_{l7} = \frac{3v}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{3(9)}{2} + \frac{1}{2} - 3 = 11$.
Label e_{r7} pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $e_{r7} = 2v - i = 2(9) - 3 = 15$.
Label e_{l8} pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $e_{l8} = 2v - i = 2(9) - 3 = 15$.

Label e_{r8} pada posisi ke-3 ($i = 3$), $e_{r8} = \frac{3v}{2} - \frac{1}{2} - i = \frac{3(9)}{2} - \frac{1}{2} - 3 = 10.$
Label e_{l9} pada posisi ke-4 ($i = 4$), $e_{l9} = \frac{3v}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{3(9)}{2} + \frac{1}{2} - 4 = 10.$
Label e_{r9} pada posisi ke-4 ($i = 4$), $e_{r9} = 2v - 4 = 2(9) - 4 = 14.$

(iv) Selanjutnya akan ditentukan bilangan ajaib k pada graf G.

$$\begin{aligned} k &= \frac{7v}{2} + \frac{3}{2}, \\ &= 33. \end{aligned}$$

Berdasarkan langkah-langkah yang telah dilakukan maka diperoleh pelabelan graf G seperti pada Gambar 2.3 berikut.



Gambar 2.3. Graf siklus C_9 dengan k maksimum 33

3. Bilangan Ajaib Minimum pada Graf Siklus Ganjil

Suatu graf siklus titik ajaib, di mana titik diberi label $v + 1$ sampai $2v$, maka graf siklus akan mempunyai bilangan ajaib minimum yang bergantung pada banyaknya jumlah titik yang terdapat pada graf G tersebut. Hal ini diberikan dalam Teorema 3.1 berikut.

Teorema 3.1. *Misalkan terdapat graf C_v, dengan v ganjil $v \geq 3$. Apabila terdapat pelabelan total titik ajaib dengan label $v+1, v+2, \cdots, 2v$ diberikan kepada himpunan titik di C_v, maka akan diperoleh bilangan ajaib minimum yaitu $k = \frac{5}{2}v + \frac{3}{2}$.*

Bukti. Pelabelan total titik ajaib pada graf C_v, v ganjil dapat dikonstruksikan sebagai berikut.
Sisi yang berada disebelah kiri titik adalah sisi yang terletak berlawanan arah dengan arah jarum jam dari titik tersebut. Sisi yang berada disebelah kanan titik adalah sisi yang terletak searah dengan arah jarum jam dari titik tersebut. Pelabelan graf G dimulai dengan memberikan label titik secara berurutan dari angka $v+1$ sampai $2v$ yang searah dengan arah jarum jam. Kemudian dilanjutkan dengan pemberian label sisi yang berada disebelah kanan titik pertama dengan bilangan v sampai seterusnya. Sehingga pelabelan titik dan sisi dapat dirumuskan seperti tabel pada Gambar 3.1 berikut. □

Kasus	Pelabelan titik (v_x)	Pelabelan Sisi Kiri (e_{lx})	Pelabelan Sisi Kanan (e_{rx})
Pelabelan titik dimulai dengan $v+1$	$v+2i+1$ $i=0,1,\dots,\frac{v-1}{2}$	$\frac{v}{2}+\frac{1}{2}-i$	$v-i$
Pelabelan titik dimulai dengan $v+2$	$v+2i+2$ $i=0,1,\dots,\frac{v-1}{2}-1$	$v-i$	$\frac{v}{2}-\frac{1}{2}-i$

atau

Pelabelan titik dimulai dengan $v+3$	$v+2i+3$ $i=0,1,\dots,\frac{v-1}{2}-2$	$\frac{v}{2}-\frac{1}{2}-i$	$v-1-i$
Pelabelan titik dimulai dengan $v+4$	$v+2i+4$ $i=0,1,\dots,\frac{v-1}{2}-3$	$v-1-i$	$\frac{v}{2}-\frac{3}{2}-i$

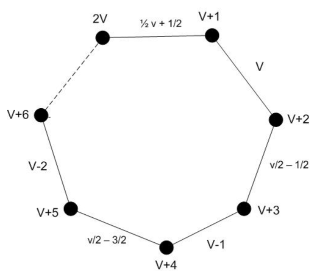
atau

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

atau

Dimulai dengan $(v+(v-1))$	$v+2i+(v-1)$ $i=0,1,\dots,\frac{v-1}{2}-(v-2)$	$v+(1-\frac{v-1}{2})-i$	$\frac{v}{2}+(1-\frac{v}{2})-i$
Dimulai dengan $(v+v)$	$v+2i+v$ $i=0,1,\dots,\frac{v-1}{2}-(v-1)$	$\frac{v}{2}+(1-\frac{v}{2})-i$	$v+(1-\frac{v+1}{2})-i$

Gambar 3.1. Pelabelan total titik ajaib dengan bilangan ajaib minimum



Gambar 3.2. Graf C_v, v ganjil dengan himpunan label titik $\{v+1,\cdots,2v\}$

Berikut adalah contoh untuk mengilustrasikan Teorema 2.1 dengan n ganjil. Diberikan pelabelan total titik ajaib terhadap graf siklus C_9 sebagai berikut.

(i) Dimulai dengan memberikan label titik secara berurutan dari angka $v+1$ sampai $2v$ yang searah jarum jam.
Label v_1 pada posisi ke-0 ($i=0$), $v_1 = v+2i+1 = 9+2(0)+1 = 10$.
Label v_2 pada posisi ke-0 ($i=0$), $v_2 = v+2i+2 = 9+2(0)+2 = 11$.
Label v_3 pada posisi ke-1 ($i=1$), $v_3 = v+2i+1 = 9+2(1)+1 = 12$.

Label v_4 pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $v_4 = v + 2i + 2 = 9 + 2(1) + 2 = 13$.
Label v_5 pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $v_5 = v + 2i + 1 = 9 + 2(2) + 1 = 14$.
Label v_6 pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $v_6 = v + 2i + 2 = 9 + 2(2) + 2 = 15$.
Label v_7 pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $v_7 = v + 2i + 1 = 9 + 2(3) + 1 = 16$.
Label v_8 pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $v_8 = v + 2i + 2 = 9 + 2(3) + 2 = 17$.
Label v_9 pada posisi ke-4 $(i = 4)$, $v_9 = v + 2i + 1 = 9 + 2(4) + 1 = 18$.

(ii) Kemudian pemberian label sisi pada posisi $i = 0, 1, 2$.
Label e_{l1} pada posisi ke-0 $(i = 0)$, $e_{l1} = \frac{v}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 5$.
Label e_{r1} pada posisi ke-0 $(i = 0)$, $e_{r1} = v - i = 9 - 0 = 9$.
Label e_{l2} pada posisi ke-0 $(i = 0)$, $e_{l2} = v - i = 9 - 0 = 9$.
Label e_{r2} pada posisi ke-0 $(i = 0)$, $e_{r2} = \frac{v}{2} - \frac{1}{2} - i = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - 0 = 4$.
Label e_{l3} pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $e_{l3} = \frac{v}{2} - \frac{1}{2} - i = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - 0 = 4$.
Label e_{r3} pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $e_{r3} = v - i = 9 - 1 = 8$.
Label e_{l4} pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $e_{l4} = v - i = 9 - 1 = 8$.
Label e_{r4} pada posisi ke-1 $(i = 1)$, $e_{r4} = \frac{v}{2} - \frac{1}{2} - i = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = 3$.
Label e_{l5} pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $e_{l5} = \frac{v}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = 3$.
Label e_{r5} pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $e_{r5} = v - i = 9 - 2 = 7$.
Label e_{l6} pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $e_{l6} = v - i = 9 - 2 = 7$.
Label e_{r6} pada posisi ke-2 $(i = 2)$, $e_{r6} = \frac{v}{2} - \frac{1}{2} - i = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = 2$.

(iii) Pemberian label sisi pada posisi $i = 3, 4$.
Label e_{l7} pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $e_{l7} = \frac{v}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} - \frac{6}{2} = 2$.
Label e_{r7} pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $e_{r7} = v - i = 9 - 3 = 6$.
Label e_{l8} pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $e_{l8} = v - i = 9 - 3 = 6$.
Label e_{r8} pada posisi ke-3 $(i = 3)$, $e_{r8} = \frac{v}{2} - \frac{1}{2} - i = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{6}{2} = 1$.
Label e_{l9} pada posisi ke-4 $(i = 4)$, $e_{l9} = \frac{v}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} - 4 = 1$.
Label e_{r9} pada posisi ke-4 $(i = 4)$, $e_{r9} = v - 4 = 9 - 4 = 5$.

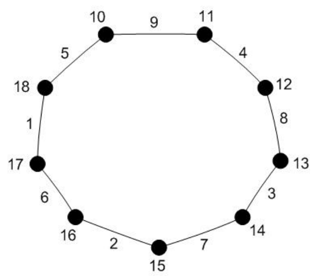
(iv) Selanjutnya akan ditentukan bilangan ajaib k pada graf G.

$$\begin{aligned} k &= \frac{5v}{2} + \frac{3}{2}, \\ &= 24. \end{aligned}$$

Berdasarkan langkah-langkah yang telah dilakukan maka diperoleh pelabelan graf G seperti pada Gambar 3.3 berikut.

4. Kesimpulan

Untuk menentukan label titik dan label sisi pada suatu graf siklus dengan banyak titik v ganjil yang menghasilkan graf titik ajaib, digunakan pelabelan berdasarkan bilangan ajaib maksimum atau bilangan ajaib minimum. Bilangan ajaib yang diperoleh tergantung pada teknik pelabelan graf siklus yang dilakukan. Untuk pelabelan graf siklus berdasarkan bilangan ajaib maksimum diperoleh bilangan ajaib $\frac{7}{2}v + \frac{3}{2}$, sementara untuk pelabelan graf siklus berdasarkan bilangan ajaib minimum diperoleh bilangan ajaib $\frac{5}{2}v + \frac{3}{2}$.



Gambar 3.3. Graf siklus C_9 dengan k minimum 24

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Zulakmal, M.Si dan Bapak Efendi, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J. A. and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. London : The Macmillan Press Ltd.

[2] Cunningham, D. 2004. Vertex Magic. *Electronic Journal of Undergraduate Mathematics*. **9** : 1 – 20

[3] J.A. MacDougall, Mirka Miller, Slamin, W.D Wallis. 2004. Vertex Magic Total Labelings of Graphs.