Jurnal Matematika UNAND
Vol. **10** No. **3** Hal. 229 – 235
Edisi Juli 2021
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

DEKOMPOSISI LEVI ALJABAR LIE AFFINE FROBENIUS $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$

EDI KURNIADI
Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran,
Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21, Jatinangor, Sumedang, Jawa Barat, Indonesia
email : edi.kurniadi@unpad.ac.id

Diterima 12 Juni 2021 Direvisi 22 Juni 2021 Dipublikasikan 26 Juli 2021

Abstrak. Dalam artikel ini dipelajari aljabar Lie affine Frobenius $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ berdimensi 6. Aljabar Lie $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ dapat didekomposisi menggunakan dekomposisi Levi menjadi aljabar Lie linear khusus semisederhana $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ berdimensi 3, subaljabar Lie komutatif $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^2$ berdimensi 2, dan split torus $\mathfrak{T}$ berdimensi 1 sedemikian sehingga $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{T}$. Karena aljabar Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ semisederhana maka *bracket* Lie-nya dapat dinyatakan sebagai $[\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})] = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Selanjutnya, misalkan $\mathfrak{g} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{T}$ sehingga $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}$. Diperoleh bahwa $[\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$ dan $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$. Dalam hal ini, $\mathfrak{g}$ adalah *solvable radical* dari $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$.

Kata Kunci: Aljabar Lie affine, Aljabar Lie Semisederhana, Dekomposisi Levi

1. Pendahuluan

Aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ adalah aljabar Lie *non-solvable* berdimensi 6 yang dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \xi(X, v) = \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^2 \right\}, \tag{1.1}$$

dengan $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ adalah aljabar Lie dari ruang vektor semua matriks berdimensi 2×2 dengan *bracket* Lie-nya berupa komutator matriks terhadap perkalian matriks biasa yaitu $[A, B] = AB - BA$ untuk semua $A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Dalam [7], aljabar Lie $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ adalah aljabar Lie Frobenius karena terdapat fungsional Frobenius yang mengakibatkan *stabilizer* $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ sama dengan himpunan vektor nol.

Sifat lain yang dimiliki oleh aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ adalah ketidak semisederhanaannya. Dengan mengonstruksi *Killing form*-nya, dapat ditunjukkan bahwa matriks representasinya mempunyai determinan sama dengan nol atau dengan kata lain, *Killing form* dari $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ adalah *degenerate*. Ditinjau dari sifat turunannya, semua turunan $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ adalah *inner* [3]. Berbeda dengan sifat $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ yang tidak semisederhana, dalam penelitian ini dibuktikan bahwa hasil dekomposisi $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$

memuat aljabar Lie semisederhana $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ yaitu aljabar Lie dari ruang vektor matriks berdimensi 2×2 dengan *trace* sama dengan nol. Meskipun hasil ini sudah diperoleh oleh [7], tetapi konstruksi yang dilakukan berbeda dengan hasil sebelumnya.

Dalam [4] telah dikonstruksi basis untuk $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ sebagai berikut.

$$S = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix}, \cdots, x_6 = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{1.2}$$

Vektor-vektor basis $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ yang dimuat di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Oleh karena itu perlu dikonstruksi suatu vektor $\theta \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $S = \{\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \theta\}$ bisa menjadi basis untuk $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendekomposisi aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ menggunakan dekomposisi Levi dalam tiga komponen, yaitu aljabar Lie semisederhana $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ berdimensi 3, subaljabar komutatif $\mathfrak{R}$ berdimensi 2, dan *split torus* $\mathfrak{T}$ berdimensi 1. Lebih jauh, telah diperoleh bahwa $\theta = \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, dengan $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{x_4} = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}$. Jelas bahwa θ termuat di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Dengan kata lain, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \langle x_2, x_3, \theta \rangle$. Di sisi lain, diperoleh juga subaljabar Lie komutatif yang dibangun oleh dua vektor $\mathfrak{R} = \langle x_5, x_6 \rangle$, dan *split torus* yang dibangun oleh satu vektor $\mathfrak{T} = \langle t \rangle$, dengan $t = diag\{0,0,0,1,1\}$ [7].

Artikel ini ditulis dengan menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut. Bagian pertama adalah pendahuluan yang menjelaskan tentang kajian yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya, motivasi dan latar belakang penelitian, dan signifikansi penelitian. Bagian kedua menjelaskan landasan teori yang digunakan dalam membahas hasil utama dalam penelitian ini seperti aljabar Lie affine, aljabar Lie semisederhana, dan dekomposisi Levi. Bagian ketiga adalah pembahasan, yaitu pembuktian bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ dapat dinyatakan dalam dekomposisi Levi $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{T}$.

2. Landasan Teori

Dalam bagian ini akan dibahas kembali beberapa materi yang berkaitan dengan penelitian ini, seperti aljabar Lie, aljabar Lie Frobenius, aljabar Lie semisederhana, dan dekomposisi Levi.

Definisi 2.1. *[5] Ruang vektor real $\mathfrak{g}$ disebut aljabar Lie jika ruang vektor $\mathfrak{g}$ tersebut dilengkapi dengan pemetaan bilinear*

$$[,] : \mathfrak{g} \ni (a,b) \mapsto [a,b] \in \mathfrak{g}, \tag{2.1}$$

di mana untuk setiap $a, b, c \in \mathfrak{g}$ berlaku $[a,b] = [b,a]$ dan

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0. \tag{2.2}$$

Pemetaan bilinear $[,]$ yang memenuhi kedua sifat tersebut dinamakan *bracket* Lie dan persamaan (2.2) dinamakan identitas Jacobi. Contoh aljabar Lie adalah ruang vektor real $\mathbb{R}$ dengan *bracket* Lie $[a,b]=0$ untuk setiap $a,b\in\mathbb{R}$. Selain itu, ruang vektor $\mathbb{R}^3$ dengan *bracket* Lie-nya berupa hasil kali silang juga merupakan contoh aljabar Lie.

Untuk aljabar Lie $\mathfrak{g}$, *bracket* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ didefinisikan sebagai berikut [5].

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\{[x,y];x,y\in\mathfrak{g}\} \tag{2.3}$$

Misalkan $\mathfrak{g}^*$ adalah ruang dual dari $\mathfrak{g}$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\mathfrak{g}^*=\{f;f:\mathfrak{g}\to\mathbb{R}\text{ suatu pemetaan linear}\} \tag{2.4}$$

Stabilizer dari $\mathfrak{g}$ di titik $f_0\in\mathfrak{g}^*$ didefinisikan oleh

$$\mathfrak{g}_{f_0}=\{x\in\mathfrak{g};f_0([x,y])=0,\forall y\in\mathfrak{g}\}. \tag{2.5}$$

Stabilizer sangat erat kaitannya dalam menentukan ke-Frobenius-an suatu aljabar Lie. Lebih jauh akan disampaikan lebih detail dalam pembahasan selanjutnya.

Selanjutnya akan dibahas tentang kriteria suatu aljabar Lie agar dikatakan semisederhana, yang secara formal dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 2.2. *[2] Aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dikatakan semisederhana jika $\mathfrak{g}$ tidak mempunyai ideal solvable lain kecuali $\{0\}$.*

Sebelum memberikan kriteria lain tentang kesemisederhanaan, diberikan definisi *Killing form* sebagai berikut.

Definisi 2.3. *[5] Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie yang dilengkapi bilinear form*

$$\mathfrak{K}:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}, \tag{2.6}$$

yang didefinisikan oleh $\mathfrak{K}(\alpha,\beta)=Tr(ad(\alpha)ad(\beta))$ untuk setiap $\alpha,\beta\in\mathfrak{g}$. Bilinear form $\mathfrak{K}$ dikatakan Killing form jika $\mathfrak{K}$ simetrik.

Suatu *Killing form* $\mathfrak{K}$ dikatakan *non-degenerate* jika determinan matriks representasi $\mathfrak{K}$ tidak sama dengan nol. Notasi tersebut membawa kepada kriteria kesemisederhanaan sebagai berikut.

Teorema 2.4. *[5] Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie dengan Killing form $\mathfrak{K}$. Jika $\mathfrak{K}$ non-degenerate maka $\mathfrak{g}$ semisederhana.*

Karena aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dalam penelitian ini atas lapangan real $\mathbb{R}$ maka konvers pernyataan dalam Teorema 2.4 berlaku. Dengan kata lain, jika $\mathfrak{g}$ aljabar semisederhana real maka *Killing form*-nya adalah *non-degenerate*.

Misalkan $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ adalah aljabar Lie dari ruang vektor matriks 2×2 terhadap *bracket* Lie komutator matriks. Aljabar Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})=\{A\in\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R});Tr(A)=0\}=\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ dengan *bracket* Lie

$$\begin{aligned}[x_1,x_2]&=2x_2,\\ [x_1,x_3]&=-2x_3,\\ [x_2,x_3]&=x_1\end{aligned} \tag{2.7}$$

adalah contoh aljabar Lie semisederhana. *Killing form*-nya *non-degenerate* karena determinan matriks representasinya tidak sama dengan nol. Selanjutnya, aljabar Lie Heisenberg $\mathcal{H}_3 = \langle x, y, z \rangle$ dengan *bracket* Lie

$$[x_1, x_2] = x_2 \tag{2.8}$$

adalah aljabar Lie yang tidak semisederhana karena *Killing form*-nya *degenerate*, atau matriks representasinya mempunyai determinan sama dengan nol.

Misalkan didefinisikan barisan aljabar Lie $\mathfrak{g}^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ sebagai berikut.

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \cdots, \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \cdots \tag{2.9}$$

Aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dikatakan *solvable* jika terdapat $n > 0$ sedemikian sehingga $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$ dan $\mathfrak{g}^{(n-1)} \neq \{0\}$. Suatu aljabar Lie $\mathfrak{g}$ hingga senantiasa memuat *ideal solvable* maksimal, yang merupakan penjumlahan semua *ideal-ideal solvable* di $\mathfrak{g}$, dan ideal tersebut dinamakan *radical solvable*, dinotasikan $\mathcal{SR}(\mathfrak{g})$. Khususnya untuk aljabar Lie real $\mathfrak{g}$ hingga, diperoleh

$$\mathcal{SR}(\mathfrak{g}) = \{\alpha \in \mathfrak{g}; Tr(ad(\alpha)ad(\beta)) = 0, \forall \beta \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}. \tag{2.10}$$

Definisi 2.5. *[8] Aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dikatakan Frobenius jika stabilizer $\mathfrak{g}_{f_0}$ untuk suatu $f_0 \in \mathfrak{g}^*$ sama dengan $\{0\}$.*

Lebih jauh, kita definisikan barisan aljabar Lie $\mathfrak{g}^k$ dengan $k \geq 1$ sebagai berikut.

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \cdots, \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}], \cdots \tag{2.11}$$

Aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dikatakan nilpoten jika terdapat $n > 0$ sedemikian sehingga $\mathfrak{g}^n = \{0\}$ dan $\mathfrak{g}^{n-1} \neq \{0\}$. Perhatikan bahwa $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^k$. Oleh karena itu, setiap aljabar Lie nilpoten adalah aljabar Lie *solvable*.

Teorema 2.6. *[5] Misalkan $\mathfrak{g}$ Aljabar Lie real berdimensi hingga. Jika $\mathfrak{g}$ tidak solvable maka terdapat sub-aljabar semisederhana $\mathcal{S}$ dari $\mathfrak{g}$ sedemikian sehingga*

$$\mathfrak{g} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{SR}(\mathfrak{g}). \tag{2.12}$$

Dalam hal ini, $S \simeq \mathfrak{g}/\mathcal{SR}(\mathfrak{g})$ dan berlaku

$$[\mathcal{S}, \mathcal{S}] = \mathcal{S}, [\mathcal{S}, \mathcal{SR}(\mathfrak{g})] \subseteq \mathcal{SR}(\mathfrak{g}), [\mathcal{SR}(\mathfrak{g}), \mathcal{SR}(\mathfrak{g})] \subseteq \mathcal{SR}(\mathfrak{g}). \tag{2.13}$$

3. Pembahasan

Sebelum membahas hasil utama dalam penelitian ini, terlebih dahulu kita bahas beberapa sifat aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ sebagai berikut. Menggunakan basis pada (1.2), diperoleh *bracket* Lie untuk aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ sebagai berikut.

$$\begin{gathered} [x_1, x_2] = x_2,\ [x_1, x_3] = -x_3,\ [x_1, x_5] = x_5, \\ [x_2, x_3] = x_1 - x_4,\ [x_2, x_4] = x_2,\ [x_2, x_6] = x_5, \\ [x_3, x_4] = -x_3,\ [x_3, x_5] = x_6,\ [x_4, x_6] = x_6. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Proposisi 3.1. *[4] Aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ adalah aljabar Lie Frobenius.*

Bukti. Pertama dipilih fungsional linear $f_0 = x_2^* + x_6^* \in \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$. Kemudian untuk $x_k \in \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ didefinisikan $(x_2^* + x_6^*)(x_k) = 1$, $(k = 1, 2, \cdots, 6)$ jika $k = 2$ atau $k = 6$ dan nol untuk selainnya. Perhatikan bahwa hasil *bracket* Lie $[x_i, x_j]$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq 6$ senantiasa memuat x_2 atau x_6. Dengan kata lain, $f_0([x_i, x_j])$ tidak semuanya nol. Oleh karena itu, $x_k \notin \mathfrak{g}_{f_0}$ untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, 6$. Jadi, $\mathfrak{g}_{f_0} = \{0\}$. Hal ini mengakibatkan $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ adalah aljabar Lie Frobenius. □

Proposisi 3.2. *Aljabar Lie* $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ *tidak semisederhana.*

Bukti. Kita gunakan kontraposisi pernyataan berikut: *Jika* $\mathfrak{g}$ *aljabar Lie semisederhana maka* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Perhatikan bahwa berdasarkan perhitungan *bracket* Lie pada persamaan (3.1) diperoleh bahwa

$$[\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})] = \langle x_1 x_4, x_2, x_3, x_5, x_6 \rangle \neq \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Dengan demikian, aljabar Lie $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ tidak semisederhana. □

Meskipun $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ tidak semisederhana tetapi semua turunan $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ adalah turunan dalam atau *inner derivation*.

Proposisi 3.3. *Aljabar Lie* $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ *non-solvable.*

Bukti. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})^{(2)} &= [\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})], \\ &= \langle x_1 - x_4, x_2, x_3, x_5, x_6 \rangle. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Selanjutnya, dengan menghitung $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})^{(3)}$ juga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})^{(3)} &= [\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})^{(2)}, \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})^{(2)}], \\ &= \langle x_1 - x_4, x_2, x_3, x_5, x_6 \rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Oleh karena itu, tidak terdapat $n > 0$ yang mengakibatkan $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})^{(n)} = 0$. Jadi $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ adalah aljabar Lie *non-solvable*. Akibatnya, aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ juga tidak nilpoten. □

Proposisi 3.4. *Untuk aljabar Lie affine Frobenius non-solvable* $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ *terdapat aljabar Lie semisederhana* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ *dan* $\mathfrak{g} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{T}$ *dengan* $\mathfrak{R}$ *subaljabar Lie komutatif dan* $\mathfrak{T}$ *split torus sedemikian sehingga*

$$\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}. \tag{3.5}$$

Bukti. Kita gunakan basis dalam persamaan (1.2) dengan *bracket* Lie-nya diberikan oleh persamaan (3.1). Produk *Bracket* Lie $[\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})]$ dibangun oleh vektor-vektor $S = \{x_1 - x_4, x_2, x_3, x_5, x_6\}$. Perhatikan bahwa jika kita memisalkan $\theta := x_1 - x_4$ dan menghitung ulang *bracket* pada subaljabar Lie $\mathfrak{P}$ yang dibangun oleh $S = \{\theta, x_2, x_3\}$, maka kita peroleh

$$\begin{aligned} [\theta, x_2] &= 2x_2, \\ [\theta, x_3] &= -2x_3, \\ [x_2, x_3] &= \theta. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dengan menghitung langsung matriks representasi *Killing form*

$$\mathfrak{K} : \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \ni (x, y) \mapsto \mathfrak{K}(x, y) = Tr(ad(x)ad(y)), \tag{3.7}$$

didapat $A_{\mathfrak{K}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dimana determinan $A_{\mathfrak{K}} = -128 \neq 0$ (Lihat [6]). Jadi, $\mathfrak{P}$ semisederhana. Dengan kata lain, $\mathfrak{P}$ adalah $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Selanjutnya dari himpunan S di atas, kita bisa memilih subaljabar $\mathfrak{R}$ berdimensi dua yang dibangun oleh $S^{"} = \{x_5, x_5\}$. Karena $[x_5, x_6] = 0$ maka $\mathfrak{R}$ komutatif. Selanjutnya kita perlu mencari *split torus* $\mathfrak{T}$, yaitu aljabar Lie komutatif yang memuat turunan *diagonalizable* dari $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{R}$. Konstruksi $\mathfrak{T}$ yang lebih detail bisa dilihat dalam [1]. Lebih jauh diperoleh $\mathfrak{T} = \langle t \rangle$ dengan $t = diag(0, 0, 0, 1, 1)$. Dalam hal ini, $\mathcal{SR}(\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{g}$ dan

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})/\mathcal{SR}(\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})).$$

Selanjutnya, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} [\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})] &= \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \\ [\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g}] &\subseteq \mathfrak{g} \\ [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] &\subseteq \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

□

4. Kesimpulan

Telah dibuktikan bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ dapat didekomposisi dalam aljabar Lie semisederhana $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ dan *solvable radical* $\mathcal{SR}(\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$. Dekomposisi tersebut dinamakan dekomposisi Levi yaitu :

$$\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{SR}(\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})).$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Padjadjaran yang telah mendanai penelitian ini melalui Riset Percepatan Lektor Kepala (RPLK) tahun 2021 dengan nomor kontrak 1959/UN6.3.1/PT.00/2021.

Daftar Pustaka

[1] Ayala, V., Kizil, E., and Tribuzy, I. D. A., 2012, On an algorithm for finding derivations of lie algebras, *Proyecciones Journal of Mathematics*, **31**(1): 8190.
[2] Dagli, Mehmet., 2004, Levi decomposition of Lie algebras; Algorithm for its computation, *Master of Science Thesis*, Iowa State University: 1218.
[3] Diatta, A., and Manga, B., 2014, On properties of principal elements of Frobenius Lie algebras, *J. Lie Theory* **24**: 849 - 864.
[4] Hendrawan, R., 2020, Aljabar Simetrik Kiri Pada Aljabar Lie Frobenius Riil Berdimensi 6, Skripsi, *tidak diterbitkan*, Departemen Matematika FMIPA UNPAD
[5] Hilgert, J., dan Neeb, K.-H., 2012, *Structure and Geometry of Lie Groups*, New York: Springer Monographs in Mathematics, Springer

[6] Humphreys, J., 1972, *Introduction to Lie ALgebra and its Representation*, New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag
[7] Ooms, A. I., 2009, Computing invariants and semi-invariants by means of Frobenius Lie algebras, *J. Algebra* **321** : 1293 - 1312
[8] Pham, D. N., 2016, G-Quasi-Frobenius Lie Algebras, *Archivum Mathematicum*, 52(4): 233 - 262.