KONTROL OPTIMAL MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS DI KALIMANTAN BARAT

FAJRIN NURSETYA DESI, EVI NOVIANI, YUDHI*

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Tanjungpura, Pontianak
email : fajrinursetyadesi@gmail.com, evi_noviani@math.untan.ac.id, yudhi@math.untan.ac.id*

Diterima 12 Juni 2021 Direvisi 22 Juni 2021 Dipublikasikan 26 Juli 2021

Abstrak. Penyakit Tuberkulosis (TB) disebabkan karena bakteri *mycobacterium tuberculosis* dan merupakan penyakit menular yang mempengaruhi paru-paru. Di Kalimantan Barat tercatat jumlah kasus baru TB sebanyak 3.463 kasus dengan angka insidens 70, 21 per 100.000 penduduk. Sedangkan dengan persentase kesembuhan 67, 5% pasien TB paru dinyatakan sembuh, dengan rincian dari 3611 pasien yang mendapatkan pengobatan, sebanyak 2436 pasien yang sembuh. Dengan pemberian vaksinasi dan pengobatan penularan penyakit TB dapat dicegah. Pada penelitian ini, model epidemi dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi *Susceptible* (S), subpopulasi *Infectious* (I) dan subpopulasi *Recovered* (R). Dari ketiga subpopulasi tersebut kemudian dibentuk model epidemi tipe SIR. Untuk menekan penularan, sistem diberikan kontrol, yaitu vaksinasi (u_1) pada bayi yang baru lahir dan kontrol pengobatan (u_2) diberikan pada individu *infective* yang melakukan kontak langsung dengan individu *susceptible*. Tujuan pemberian kontrol tersebut adalah untuk mengurangi jumlah individu *susceptible* dan individu *infective*. Model epidemi SIR yang sudah diberikan kontrol (u_1) dan (u_2), diselesaikan dengan Prinsip Minimum Pontryagin untuk mendapatkan suatu kontrol optimal u_1^* dan u_2^* . Berdasarkan simulasi numerik yang telah dilakukan didapatkan hasil yaitu kontrol bekerja secara efektif dalam menekan penyebaran TB sehingga individu *infective* berkurang.

Kata Kunci: Tuberkulosis, Model SIR, Kontrol Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin

1. Pendahuluan

Penyakit Tuberkulosis (untuk selanjutnya disingkat TB), adalah penyakit menular yang mematikan yang menyerang paru-paru [1]. Penyakit TB dapat menyebar ketika bakteri *mycobacterium tuberculosis* tersebar ke udara dari penderita TB, misalnya dengan batuk. Solusi untuk permasalahan penyebaran penyakit TB tersebut adalah dengan menerjemahkan masalah tersebut ke model matematika. Program vaksinasi adalah salah satu upaya untuk mencegah menularnya penyakit TB tersebut.

*penulis korespondensi

Kontrol yang diberikan adalah kontrol vaksinasi dan pengobatan dalam upaya mengurangi jumlah individu yang terinfeksi penyakit TB. Penyelesaian kontrol optimal tersebut diselesaikan dengan Prinsip Minimum Pontryagin, yaitu untuk mendapatkan kontrol optimal pada sistem dinamik, dari *state* awal sampai akhir, dengan mengoptimalkan fungsi tujuan J yang menggunakan kontrol u [2].

Penyebaran penyakit tuberkulosis dapat dianalisis menggunakan model matematika yaitu model SIR. Fredlina dkk. [3] telah melakukan pemodelan untuk penyebaran penyakit tuberkulosis dengan model SIR. Selanjutnya, Utari [4] telah melakukan penelitian untuk menentukan bentuk kontrol yang optimal yang dapat menekan laju pertambahan jumlah individu yang terinfeksi. Kemudian, Anggraini dkk. [5] mengemukakan bahwa kontrol vaksinasi dan pengobatan menunjukkan keefektifan dalam pengendalian populasi yang terinfeksi. Tujuan dari penelitian ini adalah membentuk model epidemi tipe SIR dengan penambahan kontrol vaksinasi dan pengobatan pada penyebaran penyakit TB dan mendapatkan kontrol yang optimal dari model epidemi tipe SIR.

2. Landasan Teori

2.1. Teori Kontrol Optimal

Teori kontrol optimal diperlukan dalam penelitian ini karena bersesuaian dengan tujuan penelitian. Tujuan dari kontrol optimal adalah untuk mendapatkan nilai kontrol yang selanjutnya di substitusikan kedalam model dan memenuhi kendala. Nilai minimum dan maksimum dapat ditentukan dalam waktu yang sama sesuai dengan fungsi tujuan [2]. Masalah kontrol optimal secara umum dapat dirumuskan sebagai berikut,

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (2.1)$$

dengan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, variabel $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kontrol keadaan pada waktu t yaitu $u(t)$, keadaan awal pada waktu t_0 yaitu $x(t_0) = x_0$, dan keadaan akhir pada waktu t_f yaitu $x(t_f) = x_f$. Dalam penelitian ini, masalah kontrol optimal yaitu mendapatkan suatu kontrol optimal $u^*(t)$ yang memenuhi persamaan (*state*) dengan syarat nilai J yaitu,

$$J = S(x(t_f), x_f) + \int_{t_0}^t V(x(t), u(t), t) dt. \quad (2.2)$$

Bentuk umum J pada persamaan (2.2) yang memuat S dan V disebut fungsi tujuan bentuk Bolza. Ketika fungsi tujuan J pada persamaan (2.2) tidak memuat S maka fungsi tujuan tersebut disebut bentuk Lagrange. Jika fungsi tujuan J pada persamaan (2.2) tidak memuat V maka fungsi tujuan tersebut disebut bentuk Meyer. Selanjutnya, untuk mendapatkan kontrol optimal pada model epidemi tipe SIR menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

2.2. Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin adalah suatu kondisi untuk menyelesaikan kontrol optimal yang sesuai dengan fungsi tujuan. Fungsi tujuan yang dibentuk menyatakan

jumlah individu yang terinfeksi dan biaya vaksinasi serta pengobatan yang dilakukan. Berdasarkan fakta keterkaitan antara biaya vaksinasi dan pengobatan dengan jumlah individu yang terinfeksi memiliki hubungan tidak linier, maka dipilih fungsi kuadrat $u^2(t)$ untuk meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi dan meminimumkan energi [6], sehingga fungsi tujuan dibentuk sebagai berikut:

$$J(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left[I(t) + \frac{c_1}{2} u_1^2(t) + \frac{c_2}{2} u_2^2(t) \right] dt, \quad (2.3)$$

dengan c_1 adalah biaya untuk vaksinasi, c_2 adalah biaya untuk pengobatan, dan t_f adalah waktu akhir periode.

3. Pembahasan

3.1. Pemodelan Penyakit TB dengan Penambahan Kontrol

Penelitian ini menggunakan model SIR dan populasi dibagi menjadi tiga bagian, yaitu *susceptible*, *infective*, dan *recovered*.

Berikut ini adalah diagram transfer model epidemi tipe SIR dengan penambahan kontrol vaksinasi dan pengobatan.

Gambar 1. Diagram alir model SIR dengan penambahan kontrol vaksinasi dan pengobatan untuk penyebaran penyakit TB

Berdasarkan Gambar 1, Sub-populasi *susceptible* bertambah dengan banyaknya kelahiran sebesar Λ dan berkurang karena adanya tingkat kematian alami μ , sehingga sub-populasi *susceptible* akan berkurang sebesar (μS) . Individu yang baru lahir diberi vaksinasi (u_1), sehingga sub-populasi *susceptible* akan berkurang karena adanya jumlah individu lahir yang diberikan vaksinasi (Λu_1) dan juga dipengaruhi oleh proporsi banyaknya individu *infective* yang melakukan kontak langsung dengan individu *susceptible* sebesar $\frac{I}{N}$, dan laju penginfeksi sebesar β , sehingga untuk mengurangi tingkat infeksi tersebut diberikan kontrol pengobatan sebesar $(1u_2)$.

Proporsi banyaknya individu *infective* yang melakukan interaksi langsung dengan individu *susceptible* $\frac{I}{N}$ menyebabkan individu *infective* bertambah. Berkurangnya jumlah individu *infective* disebabkan karena kematian alami μ dan kematian akibat penyakit μ_t . Individu *infective* yang sembuh secara spontan karena daya

tahan tubuh yang kuat juga menyebabkan berkurangnya jumlah individu *infective* (αI) dan masuk kedalam sub-populasi *recovered*.

Bertambahnya individu *recovered* dipengaruhi oleh adanya individu *infective* yang sembuh secara spontan (αI) dan banyaknya kelahiran yang diberi vaksinasi (Λu_1). Individu *recovered* mengalami kematian alami dengan parameter μ , sehingga μR menyatakan berkurangnya sub-populasi *recovered*.

Berdasarkan uraian tersebut, maka didapat suatu model penyebaran penyakit Tuberkulosis dengan penambahan kontrol sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \Lambda u_1 - \beta(1 - u_2) \frac{I}{N} S - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(1 - u_2) \frac{I}{N} S - \mu I - \mu_t I - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} &= \Lambda u_1 + \alpha I - \mu R,\end{aligned}\tag{3.1}$$

dengan

- S : jumlah individu *susceptible*,
- I : jumlah individu *infective*,
- R : jumlah individu *recovered*,
- N : total populasi,
- Λ : jumlah kelahiran alami,
- μ : laju kematian alami,
- μ_t : laju kematian akibat penyakit,
- α : laju kesembuhan alami,
- β : laju penularan penyakit,
- u_1 : laju kontrol dengan vaksinasi,
- u_2 : laju kontrol dengan pengobatan.

Dari Persamaan (3.1) selanjutnya akan diselesaikan permasalahan kontrol optimal.

3.2. Penyelesaian Persamaan (3.1) Untuk Mendapatkan Kontrol Optimal

Langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan kontrol optimal yaitu:

- (1) Membentuk fungsi Hamiltonian (H).

$$\begin{aligned}H(x, u, t, \lambda) &= V(x, u, t) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) f_i(x, u, t), \\ &= I(t) + \frac{c_1}{2} u_1^2(t) + \frac{c_2}{2} u_2^2(t) + \lambda_1 \left(\Lambda - \Lambda u_1 - \beta(1 - u_2) \frac{I}{N} S - \mu S \right) \\ &\quad + \lambda_2 \left(\beta(1 - u_2) \frac{I}{N} S - \mu I - \mu_t I - \alpha I \right) + \lambda_3 (\Lambda u_1 + \alpha I - \mu R)\end{aligned}\tag{3.2}$$

(2) Meminimumkan H terhadap $u(t)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_1(t)} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u_2(t)} &= 0.\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial H}{\partial u_1(t)}\right)^* &= c_1 u_1(t) - \lambda_1 \Lambda + \lambda_3 \Lambda, \\ \left(\frac{\partial H}{\partial u_2(t)}\right)^* &= c_2 u_2(t) + \lambda_1 \beta \frac{I}{N} S - \lambda_2 \beta \frac{I}{N} S.\end{aligned}$$

Selanjutnya dicari nilai $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ sehingga didapatkan kontrol sebagai berikut.

$$\begin{aligned}u_1(t) &= \frac{\lambda_1 \Lambda - \lambda_3 \Lambda}{c_1} = (\lambda_1 - \lambda_3) \frac{\Lambda}{c_1}, \\ u_2(t) &= \frac{-\lambda_1 \beta \frac{I}{N} S + \lambda_2 \beta \frac{I}{N} S}{c_2} = (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\beta I S}{c_2 N}.\end{aligned}$$

Karena nilai kontrolnya terbatas, dimana $0 \leq u_1(t), u_2(t) \leq 1$, maka

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & u_1(t) \leq 0, \\ u_1(t), & 0 < u_1(t) \leq 1, \\ 1, & u_1(t) \geq 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} 0, & u_2(t) \leq 0, \\ u_2(t), & 0 < u_2(t) \leq 1, \\ 1, & u_2(t) \geq 1, \end{cases} \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.3) dan (3.3) nilai $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}u_1^*(t) &= \min \left\{ 1; \max \left\{ 0, \frac{\lambda_1 \Lambda - \lambda_3 \Lambda}{c_1} \right\} \right\}, \\ u_2^*(t) &= \min \left\{ 1; \max \left\{ 0, \frac{-\lambda_1 \beta \frac{I}{N} S + \lambda_2 \beta \frac{I}{N} S}{c_2} \right\} \right\}.\end{aligned}$$

(3) Mengoptimalkan fungsi Hamiltonian (H^*).

Dengan mensubstitusikan u^* yang telah didapat pada langkah (2) ke bentuk Hamiltonian:

$$\begin{aligned}& H^*(S^*(t), I^*(t), R^*(t), u_1^*, u_2^*, \lambda) \\ &= I(t) + \frac{c_1}{2} u_1^2(t) + \frac{c_2}{2} u_2^2(t) + \lambda_1 \left(\Lambda - \Lambda u_1^* - \beta(1 - u_2^*) \frac{I(t)}{N} S(t) - \mu S(t) \right) \\ &+ \lambda_2 \left(\beta(1 - u_2^*) \frac{I(t)}{N} S(t) - \mu I(t) - \mu_t I(t) - \alpha I(t) \right) \\ &+ \lambda_3 (\Lambda u_1^* + \alpha I(t) - \mu R(t)).\end{aligned}$$

- (4) Mencari persamaan *state* dan *co-state*.

Untuk mendapatkan kedua persamaan tersebut adalah sebagai berikut.

- (a) Persamaan *state*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \Lambda - \Lambda u_1 - \beta(1 - u_2) \frac{I}{N} S - \mu S, \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \beta(1 - u_2) \frac{I}{N} S - \mu I - \mu_t I - \alpha I, \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \Lambda - \Lambda u_1 + \alpha I - \mu R, \end{aligned} \quad (3.5)$$

- (b) Persamaan *co-state*

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial S} = \lambda_1 \beta(1 - u_2) \frac{I}{N} + \lambda_1 \mu - \lambda_2 \beta(1 - u_2) \frac{I}{N}, \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial I} = \lambda_1 \beta(1 - u_2) \frac{S}{N} - \lambda_2 \beta(1 - u_2) \frac{S}{N} + \lambda_2 \mu + \lambda_2 \mu_t + \lambda_2 \alpha - \lambda_3 \alpha - 1 \\ \dot{\lambda}_3(t) &= \frac{\partial H}{\partial R} = \lambda_3 \mu. \end{aligned} \quad (3.6)$$

dengan kondisi transversal $\lambda_1(t_f) = 0$, $\lambda_2(t_f) = 0$, $\lambda_3(t_f) = 0$.

- (5) Mendapatkan kontrol optimal yang dicari.

Substitusikan hasil yang diperoleh dari langkah (4) ke persamaan $u^*(t)$ pada langkah (2):

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \Lambda u_1^* - \beta(1 - u_2^*) \frac{I}{N} S - \mu S, \quad (3.7)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta(1 - u_2^*) \frac{I}{N} S - \mu I - \mu_t I - \alpha I, \quad (3.8)$$

$$\frac{dR}{dt} = \Lambda u_1^* + \alpha I - \mu R, \quad (3.9)$$

$$\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_1 \beta(1 - u_2^*) \frac{I}{N} + \lambda_1 \mu - \lambda_2 \beta(1 - u_2^*) \frac{I}{N}, \quad (3.10)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \lambda_1 \beta(1 - u_2^*) \frac{S}{N} - \lambda_2 \beta(1 - u_2^*) \frac{S}{N} + \lambda_2 \mu + \lambda_2 \mu_t + \lambda_2 \alpha - \lambda_3 \alpha - 1 \quad (3.11)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = \frac{\partial H}{\partial R} = \lambda_3 \mu. \quad (3.12)$$

dengan kondisi batas $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$, $\lambda_1(t_f) = 0$, $\lambda_2(t_f) = 0$, $\lambda_3(t_f) = 0$.

Setelah diperoleh hasil dari Prinsip Minimum Pontryagin, selanjutnya menyelesaikan hasil tersebut dengan simulasi numerik. Metode yang digunakan dalam penyelesaian numerik adalah Runge Kutta orde 4. Langkah pertama untuk penyelesaian numerik adalah mentransformasikan persamaan *state* dan *co state* dalam bentuk diskrit.

3.3. Proses Diskritisasi Sistem Persamaan

Persamaan *state* yang terdapat pada Persamaan (3.5) diselesaikan menggunakan skema maju Runge Kutta orde 4. Misalkan n adalah banyaknya iterasi dengan index i dan $i = 0, 1, 2, \dots, n$, dengan total populasi adalah N , N_i adalah total populasi ke- i , S_i adalah sub populasi *Susceptible* ke- i , I_i adalah sub populasi *Infective* ke- i , dan R_i adalah sub populasi *Recovered* ke- i . Sehingga

$$N = N_i = S_i + I_i + R_i.$$

Akan dihitung nilai k_1, k_2, k_3, k_4 dari sub populasi S, I, R . Adanya nilai k_1 dalam persamaan adalah untuk menentukan k_2 , nilai k_2 untuk menghitung k_3 dan seterusnya. Berikut langkah pengerjaan metode Runge Kutta Orde 4.

Tahap 1.

$$\begin{aligned} k_{1,S} &= f(t_i, S_i) = \Lambda - \Lambda u_i - \beta(1 - u_i) \frac{I_i}{N} S_i - \mu S_i, \\ k_{1,I} &= f(t_i, I_i) = \beta(1 - u_i) \frac{I_i}{N} S_i - \mu I_i - \mu_t I_i - \alpha I_i, \\ k_{1,R} &= f(t_i, R_i) = \Lambda u_i + \alpha I_i - \mu R_i. \end{aligned}$$

Tahap 2.

$$\begin{aligned} k_{2,S} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}hk_{1,S}), \\ k_{2,I} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, I_i + \frac{1}{2}hk_{1,I}), \\ k_{2,R} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, R_i + \frac{1}{2}hk_{1,R}). \end{aligned}$$

Tahap 3.

$$\begin{aligned} k_{3,S} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}hk_{2,S}), \\ k_{3,I} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, I_i + \frac{1}{2}hk_{2,I}), \\ k_{3,R} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, R_i + \frac{1}{2}hk_{2,R}). \end{aligned}$$

Tahap 4.

$$\begin{aligned} k_{4,S} &= f(t_i + h, S_i + hk_{3,S}), \\ k_{4,I} &= f(t_i + h, I_i + hk_{3,I}), \\ k_{4,R} &= f(t_i + h, R_i + hk_{3,R}). \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan nilai k_1, k_2, k_3, k_4 yang telah diperoleh untuk setiap sub populasi ke fungsi solusi dari metode Runge Kutta orde 4. Setelah proses diskritisasi tahap 1 sampai tahap 4, maka dibentuk persamaan berikut.

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= S_i + \frac{h}{6}(k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S}), \\ I_{i+1} &= I_i + \frac{h}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I}), \\ R_{i+1} &= R_i + \frac{h}{6}(k_{1,R} + 2k_{2,R} + 2k_{3,R} + k_{4,R}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Persamaan *costate* yang terdapat pada Persamaan (3.6) diselesaikan menggunakan skema mundur Runge Kutta orde 4. Dengan menggunakan tahapan metode Runge Kutta orde 4 serupa dengan penyelesaian pada persamaan *state* diperoleh langkah-langkah sebagai berikut.

Tahap 1.

$$\begin{aligned} k_{1,S} &= f(t_i, \lambda_{Si}) = \lambda_{Si}\mu + (\lambda_{Si} - \lambda_{Ii})\beta(1 - u_i)\frac{I_i}{N}, \\ k_{1,I} &= f(t_i, \lambda_{Ii}) = -1 + \lambda_{Ii}(\mu + \mu_t + \alpha) + (\lambda_{Si} - \lambda_{Ii})\beta(1 - u_i)\frac{S_i}{N} - \lambda_{Ri}\alpha, \\ k_{1,R} &= f(t_i, \lambda_{Ri}) = \lambda_{Ri}\mu. \end{aligned}$$

Tahap 2.

$$\begin{aligned} k_{2,S} &= f(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_{Si} - \frac{1}{2}hk_{1,S}), \\ k_{2,I} &= f(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_{Ii} - \frac{1}{2}hk_{1,I}), \\ k_{2,R} &= f(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_{Ri} - \frac{1}{2}hk_{1,R}). \end{aligned}$$

Tahap 3.

$$\begin{aligned} k_{3,S} &= f(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_{Si} - \frac{1}{2}hk_{2,S}), \\ k_{3,I} &= f(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_{Ii} - \frac{1}{2}hk_{2,I}), \\ k_{3,R} &= f(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_{Ri} - \frac{1}{2}hk_{2,R}). \end{aligned}$$

Tahap 4.

$$\begin{aligned} k_{4,S} &= f(t_i - h, \lambda_{Si} - hk_{3,S}), \\ k_{4,I} &= f(t_i - h, \lambda_{Ii} + hk_{3,I}), \\ k_{4,R} &= f(t_i - h, \lambda_{Ri} + hk_{3,R}). \end{aligned}$$

Setelah proses diskritisasi tahap 1 sampai tahap 4, maka dibentuk persamaan berikut.

$$\begin{aligned} S_{i-1} &= S_i - \frac{h}{6}(k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S}), \\ I_{i-1} &= I_i - \frac{h}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I}), \\ R_{i-1} &= R_i - \frac{h}{6}(k_{1,R} + 2k_{2,R} + 2k_{3,R} + k_{4,R}). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Selanjutnya hasil diskritisasi Persamaan (3.13) dan (3.14) diselesaikan dengan program Scilab.

3.4. Analisis Simulasi Numerik

Simulasi numerik diselesaikan dengan menggunakan program scilab. Model penyebaran penyakit TB dengan menggunakan kontrol vaksinasi dan pengobatan disimulasikan pada saat populasi awal (S_0, I_0, R_0) adalah $(41.572, 4.655, 3.730)$. Untuk simulasi numerik, parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 1.

Parameter	Deskripsi	Nilai	Sumber
Λ	Banyaknya kelahiran alami	90.913	[7]
μ	Laju kematian alami	0,118	[7]
μ_t	Laju kematian akibat penyakit	0,033	[8]
α	Laju kesembuhan alami	0,00032	[3]
β	Laju penularan penyakit	0,0097	[3]

Tabel 1. Nilai parameter model penyakit TB

Berdasarkan Tabel 1, nilai parameter tersebut disubstitusikan ke Persamaan (3.7) sampai Persamaan (3.12) yang nantinya disimulasikan secara numerik. Berdasarkan hasil simulasi tersebut, maka diperoleh grafik sebagai berikut.

3.4.1. Subpopulasi Susceptible dan Interpretasinya

Gambar 2. Grafik perubahan banyaknya individu *Susceptible* dengan kontrol dan tanpa kontrol

Berdasarkan Gambar 2, dapat dilihat bahwa pada bulan ke-0 sampai bulan ke-20 jumlah individu *susceptible* dengan adanya kontrol sama dengan jumlah individu *susceptible* tanpa kontrol. Kemudian pada bulan ke-21 sampai bulan ke-69 jumlah individu *susceptible* berkurang, karena individu subpopulasi *susceptible* berpindah ke subpopulasi *recovered* karena adanya penyembuhan. Pada bulan ke-70 individu *susceptible* kembali naik hingga bulan ke-100.

3.4.2. Subpopulasi Infective dan Interpretasinya

Berdasarkan Gambar 3, dapat dilihat bahwa jumlah individu *infective* lebih efektif mengalami penurunan dengan adanya kontrol dibandingkan dengan tanpa adanya kontrol. Jumlah individu *infective* dengan pemberian kontrol mengalami penurunan secara signifikan pada awal periode hingga mencapai 0 pada sekitar bulan ke-30 sampai bulan ke-100, berarti individu *infective* tidak ada yang terinfeksi penyakit.

Gambar 3. Grafik perubahan banyaknya individu *Infective* dengan kontrol dan tanpa kontrol

3.4.3. Subpopulasi *Recovered* dan Interpretasinya

Gambar 4. Grafik perubahan banyaknya individu *Recovered* dengan dan tanpa kontrol

Berdasarkan Gambar 4, dapat dilihat bahwa adanya kontrol vaksinasi lebih efektif meningkatkan subpopulasi *recovered* hingga mencapai lebih dari 130000 individu. Sedangkan tanpa kontrol vaksinasi individu menurun hingga mencapai 0 individu.

3.4.4. Kontrol u_1 dan Interpretasinya

Berdasarkan Gambar 5, kontrol u_1 yang diberikan pada awal periode adalah minimum sebesar 0 meningkat hingga sekitar 0,23 pada bulan ke-62, kemudian mengalami turun hingga 0 pada akhir periode.

3.4.5. Kontrol u_2 dan Interpretasinya

Pada Gambar 6, kontrol u_2 yang diberikan di awal periode adalah maksimum yaitu sebesar 1 hingga bulan ke-59, kemudian turun hingga 0 di akhir periode.

Gambar 5. Grafik Kontrol u_1

Gambar 6. Grafik Kontrol u_2

Gambar 7. Grafik fungsi objektif

3.4.6. Fungsi Objektif dan Interpretasinya

Pada Gambar 7, kontrol u_1 dan u_2 yang diberikan menyebabkan fungsi tujuan yang awalnya bernilai lebih dari 140000 turun hingga sekitar 30000 pada iterasi ke-78. Dapat disimpulkan bahwa hal tersebut dikarenakan adanya kontrol u_1 dan u_2 yang meminimumkan fungsi objektif.

4. Kesimpulan

- (1) Model epidemi tipe SIR dengan penambahan kontrol vaksinasi dan pengobatan pada penyebaran penyakit TB adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \Lambda u_1 - \beta(1 - u_2) \frac{I}{N} S - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(1 - u_2) \frac{I}{N} S - \mu I - \mu_t I - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} &= \Lambda u_1 + \alpha I - \mu R.\end{aligned}$$

- (2) Berdasarkan hasil analisis, diperoleh kontrol dan sistem yang optimal, yaitu:

$$\begin{aligned}u_1^*(t) &= \min \left\{ 1; \max \left\{ 0, \frac{\lambda_1 \Lambda - \lambda_3 \Lambda}{c_1} \right\} \right\}, \\ u_2^*(t) &= \min \left\{ 1; \max \left\{ 0, \frac{-\lambda_1 \beta \frac{I}{N} S + \lambda_2 \beta \frac{I}{N} S}{c_2} \right\} \right\}.\end{aligned}$$

Daftar Pustaka

- [1] World Health Organization, 2019, *Global Tuberculosis Report*
- [2] Naidu, 2002, D. S., *Optimal Control Systems*, CRC Press, New York
- [3] Fredlina, K.Q., T. B. Oka, dan I. M. Dwipayana, 2012. SIR (Susceptible, Infectious, Recovered) Model for Tuberculosis Disease Transmission, *J. Matematika* Vol. **1**(1): 52 - 58
- [4] Utari, I, A, P, A., Kontrol Optimal Upaya Pengobatan Penyakit Campak Menggunakan Model Endemi SIR, *Jurnal Matematika* Vol. **9**(2): 94 - 100
- [5] N. Anggriani, A. Supriatna, B. Subartini, R. Wulantini, 2015, Kontrol Optimum pada Model Epidemik SIR dengan Pengaruh Vaksinasi dan Faktor Imigrasi, *Jurnal Matematika Integratif* Vol. **11** No 2: 111 - 118
- [6] Setiawan, 2012, Kontrol Optimal Penyebaran Tuberkulosis dengan *Exogenous Reinfection*, *Tesis Magister*, tidak diterbitkan, Fakultas MIPA, Universitas Indonesia, Depok
- [7] Data Kalbarprov. 2018. <http://data.kalbarprov.go.id/dataset/jumlah-kelahiran-menurut-jenis-kelamin-dan-kab-kota-prov-kalbar-tahun-2018> [diakses 8 April 2020]
- [8] Dinas Kesehatan Kalimantan Barat, 2018