TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG METRIK *CONE*

ZAINUL RAHMAT, HARIPAMYU*, SHELVI EKARIANI

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : zainulrahmat23@gmail.com, haripamyu@sci.unand.ac.id, shelviekariani@sci.unand.ac.id*

Diterima 12 Juni 2021 Direvisi 22 Juni 2021 Dipublikasikan 26 Juli 2021

Abstrak. Ruang metrik *cone* merupakan suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi oleh pemetaan d dari $X \times X$ ke ruang Banach dan memenuhi beberapa aksioma. Selanjutnya didefinisikan titik tetap $x \in X$ dari suatu pemetaan T . Dengan memanfaatkan konsep kekonvergenan barisan pada ruang metrik *cone*, diperoleh bahwa pemetaan kontraktif pada ruang metrik *cone* lengkap memiliki titik tetap tunggal.

Kata Kunci: Konvergen, Ruang Metrik, Ruang Metrik *Cone* dan Titik Tetap

1. Pendahuluan

Analisis fungsional merupakan salah satu cabang dari matematika analisis klasik. Pada analisis fungsional dibahas mengenai "ruang" yang disertai dengan "fungsi" yang terdefinisi pada ruang tersebut. Sebagai contoh, ruang vektor yang disertai "fungsi norm" dinamakan sebagai "ruang norm". Selanjutnya himpunan tak kosong yang disertai "fungsi jarak" dinamakan sebagai "ruang metrik".

Fungsi jarak pada ruang metrik merupakan fungsi bernilai riil [4]. Pada ruang metrik berlaku konsep kekonvergenan barisan. Salah satu teorema yang memanfaatkan konsep kekonvergenan pada ruang metrik adalah teorema titik tetap *Banach*.

Teorema titik tetap *Banach* menjadi landasan dari teorema eksistensi dan ketunggalan dalam matematika analisis. Bentuk perluasan dari ruang metrik adalah ruang metrik *cone*, dimana fungsi jarak pada ruang metrik *cone* merupakan suatu pemetaan menuju ruang *banach*. Pada ruang metrik *cone* juga terdapat konsep kekonvergenan barisan seperti pada ruang metrik sehingga teorema titik tetap juga dapat diterapkan pada ruang metrik *cone*.

Dalam artikel ini akan dikaji kembali tentang konsep kekonvergenan pada ruang metrik *cone* dan menganalisis keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik *cone* dengan merujuk artikel dari Huang Long-Guang dan Zhang Xhian [5].

*Penulis Korespondensi

2. Landasan Teori

2.1. Ruang Banach

Definisi 2.1. [4] Misalkan X suatu ruang vektor. Norm pada X adalah suatu fungsi bernilai riil yang dinotasikan oleh $\|\cdot\|$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan α konstan berlaku :

- (1) $\|x\| \geq 0$;
- (2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$;
- (3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$; dan
- (4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Pasangan terurut $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang norm.

Dalam tulisan ini, ruang norm $(X, \|\cdot\|)$ dinotasikan dengan X .

Contoh 2.2. Misalkan $X = \mathbb{R}^n$ adalah suatu ruang vektor, didefinisikan suatu norm $\|x\| = \sum_{i=1}^n (|x_i|)$. Maka $\mathbb{R}^n$ adalah ruang norm.

Bukti. Ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x, y \in \mathbb{R}^n$ dimana $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$.

- (1) Karena $|x_i| \geq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Maka $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$.

Terbukti $\|x\| \geq 0$.

- (2) Akan ditunjukkan $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$.

($\Rightarrow$) Misalkan $\|x\| = 0$, akan ditunjukkan $x = \bar{0}$.

Untuk sebarang $x_i \in \mathbb{R}$, $|x_i| = 0$ jika dan hanya jika $x_i = 0$. Andaikan terdapat

$x_i \neq 0$, akibatnya $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i| > 0$. Maka haruslah $x_i = 0$ untuk setiap

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ atau dengan kata lain $x = \bar{0}$.

($\Leftarrow$) Misalkan $x = \bar{0}$, akan ditunjukkan $\|x\| = 0$.

Karena $x = \bar{0}$, maka $x_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Akibatnya

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n (|x_i|) = 0.$$

Terbukti $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$.

- (3) Akan ditunjukkan $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| \\ &= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + |\alpha x_3| + \dots + |\alpha x_n| \\ &= |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| + |\alpha||x_3| + \dots + |\alpha||x_n| \\ &= |\alpha|\|x\| \end{aligned}$$

(4) Akan ditunjukkan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\begin{aligned}
 \|x + y\| &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \\
 &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + |x_3 + y_3| + \cdots + |x_n + y_n| \\
 &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + |x_3| + |y_3| + \cdots + |x_n| + |y_n| \\
 &= |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + |y_3| + \cdots + |y_n| \\
 &= \|x\| + \|y\|.
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ ruang norm. □

Berikut diberikan definisi kekonvergenan barisan pada ruang norm.

Definisi 2.3. [4] Misalkan $(x^{(n)})$ suatu barisan pada ruang norm X . Barisan $(x^{(n)})$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$, kemudian dinotasikan dengan $\|x^{(n)} - x\| \rightarrow 0$.

Definisi 2.4. [4] Suatu barisan $(x^{(n)})$ pada ruang norm X disebut barisan *Cauchy* jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N_{(\epsilon)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n > N_{(\epsilon)}$ berlaku $\|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \epsilon$.

Pada tulisan ini digunakan kriteria kekonvergenan *Cauchy* pada bilangan riil.

Lema 2.5. [1] **Kriteria Kekonvergenan Cauchy:** Barisan bilangan riil dikatakan konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut merupakan barisan *Cauchy*.

Definisi 2.6. [4] Suatu ruang norm X dikatakan lengkap jika setiap barisan *Cauchy* pada ruang norm tersebut konvergen pada X . Ruang norm lengkap disebut ruang *Banach*.

Contoh 2.7. Ruang norm pada Contoh 2.2 merupakan ruang *Banach*.

Bukti. Misalkan $(x^{(m)})$ sebarang barisan *Cauchy* pada ruang norm $\mathbb{R}^n$ dimana $(x^{(m)}) = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$. Karena $(x^{(n)})$ merupakan barisan *Cauchy*, untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N_{(\epsilon)} \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $k, l \in \mathbb{N}$ dimana $k, l > N_{(\epsilon)}$ berlaku:

$$\|x^{(k)} - x^{(l)}\| = \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| < \epsilon.$$

Akibatnya untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$ berlaku:

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| < \epsilon.$$

Maka untuk sebarang i , barisan $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots)$ merupakan barisan *Cauchy* di $\mathbb{R}$. Berdasarkan Kriteria Kekonvergenan *Cauchy*, barisan $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots)$ konvergen ke suatu $x_i \in \mathbb{R}$. Karena i sebarang, maka $x^{(m)}$ konvergen ke suatu $x \in \mathbb{R}^n$. Karena $(x^{(m)})$ sebarang barisan *Cauchy* di $\mathbb{R}^n$, maka $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang norm lengkap. □

2.2. Cone

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai lingkungan, himpunan terbuka dan himpunan tertutup.

Definisi 2.8. [6] Misalkan X suatu ruang norm, $a \in X$ dan $\epsilon > 0$. Lingkungan- ϵ dari a didefinisikan oleh $V_{(\epsilon)}(a) = \{x \in X; \|x - a\| < \epsilon\}$.

Definisi 2.9. [4] Misalkan X ruang norm, $P \subset X$ dan $p \in P$. Titik p merupakan titik interior di P jika terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga $V_{(\epsilon)}(p) \subset P$. Himpunan titik interior P dinotasikan sebagai P° .

Definisi 2.10. [6] Misalkan X suatu ruang norm dan $P \subset X$. Himpunan P dikatakan terbuka jika untuk setiap $p \in P$ berlaku $p \in P^\circ$.

Definisi 2.11. [6] Misalkan X suatu ruang norm dan $P \subset X$. Himpunan P dikatakan tertutup jika himpunan P komplemen (P^c) terbuka.

Contoh 2.12. Misalkan ruang norm $\mathbb{R}^2$ dengan norm yang didefinisikan oleh $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ dan $P = \{(x_1, x_2); x_1, x_2 \geq 0\}$. Himpunan P adalah himpunan tertutup.

Bukti. Akan ditunjukkan $P^c = \mathbb{R}^2 - P$ merupakan himpunan terbuka. Perhatikan bahwa $P^c = \{(x_1, x_2); x_1 < 0 \text{ atau } x_2 < 0\}$. Ambil sebarang $p = (p_1, p_2) \in P^c$ akan ditunjukkan bahwa $p \in (P^c)^\circ$.

- (1) Kasus 1 : $p_1 < 0$.
Pilih $\epsilon = -\frac{p_1}{2}$. Akibatnya $V_{(-\frac{p_1}{2})}(p) \subset P^c$, dengan kata lain $p \in (P^c)^\circ$.
- (2) Kasus 2 : $p_2 < 0$
Pilih $\epsilon = -\frac{p_2}{2}$. Akibatnya $V_{(-\frac{p_2}{2})}(p) \subset P^c$, dengan kata lain $p \in (P^c)^\circ$.

Terbukti P^c himpunan terbuka. □

Selanjutnya akan diberikan definisi dari *cone*.

Definisi 2.13. [5] Misalkan $P \subset E$ dan E adalah ruang Banach. P dikatakan *cone* jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut:

- (1) Himpunan P bukan himpunan kosong, dan $P \neq \{\bar{0}\}$.
- (2) Himpunan P merupakan himpunan tertutup.
- (3) Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a, b \geq 0$, jika $x, y \in P$ maka $ax + by \in P$.
- (4) Jika $x \in P$ dan $-x \in P$ maka $x = \bar{0}$.

Contoh 2.14. Diberikan ruang Banach $\mathbb{R}^2$. Kemudian didefinisikan P dimana $P = \{(x_1, x_2); x_1, x_2 \geq 0\}$. Himpunan P merupakan *cone*.

Bukti. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}^2$. Misal $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ dimana $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

- (1) Karena $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$, maka $x, y \in P$. Akibatnya $P \neq \emptyset$, dan $P \neq \{\bar{0}\}$.
- (2) Berdasarkan Contoh 2.12 terbukti P tertutup.

- (3) Untuk setiap $a, b > 0$ berlaku $ax_1 + by_1 \geq 0$ dan $ax_2 + by_2 \geq 0$. Maka $ax + by \in P$.
 (4) Misalkan $x \in P$ dan $x \neq \bar{0}$. Maka $x_1 > 0$ atau $x_2 > 0$. Akibatnya $-x_1 < 0$ atau $-x_2 < 0$. Perhatikan bahwa $-x = (-x_1, -x_2)$. Karena $-x_1 < 0$ atau $-x_2 < 0$, maka $-x \notin P$. Agar $x \in P$ dan $-x \in P$ haruslah $x = \bar{0}$.

Terbukti P merupakan *cone*. □

Pada suatu *cone* P , didefinisikan notasi urutan yang berkenaan dengan *cone* P . Notasi tersebut diberikan pada definisi berikut ini.

Definisi 2.15. [2] Misalkan E ruang Banach, $P \subseteq E$, dan P suatu *cone*. Untuk setiap $x, y \in E$ didefinisikan urutan parsial sebagai berikut :

- (1) $x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in P$;
 (2) $x \prec y \Leftrightarrow y - x \in P$, tetapi $x \neq y$;
 (3) $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in P^\circ$;

Notasi " $\preceq$ ", " $\prec$ ", dan " $\ll$ " merupakan notasi urutan parsial pada E .

Definisi 2.16. [5] *Cone* P disebut *normal* jika terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in E$, berlaku

$$\bar{0} \preceq x \preceq y \Rightarrow \|x\| \leq K\|y\|.$$

2.3. Ruang Metrik Cone

Definisi 2.17. [7] Misalkan E ruang Banach dan X himpunan tak kosong. Didefinisikan pemetaan $d : X \times X \rightarrow E$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

- (1) $\bar{0} \preceq d(x, y)$;
 (2) $d(x, y) = \bar{0} \Leftrightarrow x = y$;
 (3) $d(x, y) = d(y, x)$; dan
 (4) $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y)$.

Pemetaan d disebut *metrik cone* pada X dan (X, d) disebut *ruang metrik cone*.

Contoh 2.18. Diberikan ruang Banach $\mathbb{R}^2$, $P = \{(x_1, x_2); x_1, x_2 \geq 0\}$, dan $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ didefinisikan oleh $d(x, y) = (|x_1 - y_1|, \alpha|x_2 - y_2|)$ dimana $\alpha_1 > 0$. Maka $(\mathbb{R}^2, d)$ merupakan *ruang metrik cone*.

Bukti. Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ dimana $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$ dan $\alpha > 0$ konstanta.

- (1) Perhatikan bahwa $d(x, y) - \bar{0} = (|x_1 - y_1|, \alpha|x_2 - y_2|)$. Karena $|x_1 - y_1| \geq 0$ dan $\alpha|x_2 - y_2| \geq 0$, maka $d(x, y) - \bar{0} \in P$. Terbukti $\bar{0} \preceq d(x, y)$.
 (2) $(\Rightarrow)$ Diketahui $d(x, y) = \bar{0}$. Seandainya $x \neq y$, akibatnya $|x_1 - y_1| > 0$ atau $\alpha|x_2 - y_2| > 0$. Akibatnya $\bar{0} \prec d(x, y)$, sehingga haruslah $x = y$.

($\Leftarrow$) Misalkan $x = y$, Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= (|x_1 - y_1|, \alpha|x_2 - y_2|) \\ &= (0, \alpha 0) = \bar{0}. \end{aligned}$$

Terbukti $d(x, y) = \bar{0} \Leftrightarrow x = y$.

(3) Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= (|x_1 - y_1|, \alpha_1|x_2 - y_2|) \\ &= (|y_1 - x_1|, \alpha|y_2 - x_2|) \\ &= d(y, x). \end{aligned}$$

(4) Akan ditunjukkan $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y)$.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= (|x_1 - y_1|, \alpha|x_2 - y_2|) \\ &= (|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, \alpha|x_2 - z_2 + z_2 - y_2|) \\ &\preceq (|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, \alpha(|x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|)) \\ &= (|x_2 - z_2|, \alpha_1|x_2 - z_2|) + (|z_1 - y_1|, \alpha|z_2 - y_2|) \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

□

Proposisi 2.19. [7] Misalkan (X, d) ruang metrik cone, sedemikian sehingga untuk setiap $u, v, w \in E$ berlaku:

- (1) jika $u \preceq \alpha v$ untuk setiap $\alpha \in [0, 1)$, maka $u = \bar{0}$,
- (2) jika $\bar{0} \preceq u \ll v$ untuk setiap $\bar{0} \ll v$, maka $u = \bar{0}$,
- (3) jika $u \preceq v$ dan $v \ll w$, maka $u \ll w$.

Berikut ini didefinisikan titik tetap suatu pemetaan dan pemetaan kontraktif pada ruang metrik cone.

Definisi 2.20. [4] Misalkan X sebarang himpunan tak kosong dan pemetaan $T : X \rightarrow X$. Suatu $x \in X$ merupakan titik tetap dari pemetaan T jika berlaku $Tx = x$.

Definisi 2.21. [4] Didefinisikan metrik cone (X, d) dan pemetaan $T : X \rightarrow X$. Pemetaan T merupakan pemetaan kontraktif pada X jika terdapat $k \in \mathbb{R}$ dimana $0 < k < 1$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi :

$$d(Tx, Ty) \preceq kd(x, y).$$

3. Teorema Titik Tetap Pada Ruang Metrik Cone

Pada Bab ini akan dijelaskan beberapa konsep kekonvergenan barisan pada ruang metrik cone dan teorema titik tetap pada ruang metrik cone.

3.1. Kekonvergenan Barisan Pada Ruang Metrik Cone

Definisi 3.1. [5] Misalkan (X, d) ruang metrik cone. Didefinisikan barisan $(x^{(n)})$ pada X . Barisan $(x^{(n)})$ dikatakan konvergen ke suatu $x \in X$ jika untuk setiap $c \in E$ dimana $\bar{0} \ll c$ terdapat $N_{(c)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n > N_{(c)}$ berlaku $d(x^{(n)}, x) \ll c$. Titik x merupakan limit dari $(x^{(n)})$ dan dinotasikan dengan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x \text{ atau } x^{(n)} \rightarrow x.$$

Lema 3.2. [5] Misalkan (X, d) ruang metrik cone dan P merupakan cone normal dengan konstanta normal K . Selanjutnya didefinisikan barisan $(x^{(n)})$ pada X . Barisan $(x^{(n)})$ dikatakan konvergen ke suatu $x \in X$ jika dan hanya jika $d(x^{(n)}, x) \rightarrow \bar{0}$ untuk $n, m \rightarrow \infty$.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan $(x^{(n)}) \rightarrow x$. Akan ditunjukkan $d(x^{(n)}, x) \rightarrow \bar{0}$.

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, pilih $c \in E$ dimana $0 \ll c$ dan $K\|c\| < \epsilon$. Karena $(x^{(n)})$ konvergen ke x , maka terdapat $N_{(c)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n > N_{(c)}$ memenuhi $d(x^{(n)}, x) \ll c$. Karena $d(x^{(n)}, x) \ll c$, diperoleh $d(x^{(n)}, x) \preceq c$. Karena P merupakan cone normal, maka berdasarkan Definisi 2.16 berlaku $\|d(x^{(n)}, x)\| \leq K\|c\|$, akibatnya $\|d(x^{(n)}, x)\| < \epsilon$. Karena ϵ sebarang terbukti $d(x^{(n)}, x) \rightarrow \bar{0}$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan $d(x^{(n)}, x) \rightarrow \bar{0}$. Akan ditunjukkan $(x^{(n)}) \rightarrow x$.

Ambil sebarang $c \in E$ dimana $\bar{0} \ll c$, pilih $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in E$ dimana $\|x\| < \delta$ berlaku $x \ll c$. Karena $d(x^{(n)}, x) \rightarrow \bar{0}$, akibatnya $\|d(x^{(n)}, x)\| \rightarrow 0$, dengan kata lain terdapat $N_{(\delta)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dimana $n > N_{(\delta)}$ berlaku $\|d(x^{(n)}, x)\| < \delta$. Sehingga untuk n yang sama berlaku $d(x^{(n)}, x) \ll c$. Karena c sebarang, terbukti $(x^{(n)})$ konvergen ke x . $\square$

Contoh 3.3. Didefinisikan ruang metrik cone seperti pada Contoh 2.18. Misalkan barisan $(x^{(n)})$ di $\mathbb{R}^2$ didefinisikan dengan $x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{\beta}{n}\right)$ dimana $\beta > 0$ konstan. Barisan $(x^{(n)})$ konvergen ke $x = \bar{0}$.

Bukti. Ambil sebarang $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ dengan $\bar{0} \ll (c_1, c_2)$. Pilih $N_{(c)} \in \mathbb{N}$ dimana $N_{(c)} > \sup \left\{ \frac{1}{c_1}, \frac{\alpha\beta}{c_2} \right\}$. Maka untuk setiap $n > N_{(c)}$ berlaku:

$$\begin{aligned} d\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{\beta}{n}\right), (0, 0)\right) &= \left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha\beta}{n}\right) \\ &\preceq \left(\frac{1}{N_{(c)}}, \frac{\alpha\beta}{N_{(c)}}\right) \end{aligned}$$

Karena $N_{(c)} > \sup \left\{ \frac{1}{c_1}, \frac{\alpha\beta}{c_2} \right\}$, maka $\left(c_1 - \frac{1}{N_{(c)}}\right) > 0$ dan $\left(c_2 - \frac{\alpha\beta}{N_{(c)}}\right) > 0$. Akibatnya berlaku $d(x^{(n)}, \bar{0}) \ll c$. Karena c sebarang, terbukti $(x^{(n)})$ konvergen ke $x = \bar{0}$. $\square$

Lema 3.4. [5] Misalkan (X, d) suatu metrik cone dan diberikan suatu barisan $(x^{(n)})$ konvergen pada X . Maka barisan $(x^{(n)})$ konvergen ke paling banyak satu $x \in X$.

Bukti. Ambil sebarang $c \in E$ dengan $\bar{0} \ll c$. Andaikan barisan $(x^{(n)})$ konvergen ke $x \in X$ dan $y \in X$, akan ditunjukkan bahwa $x = y$. Karena $(x^{(n)})$ konvergen ke x dan y , maka berdasarkan Definisi 3.1 terdapat $N_{(c)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n > N_{(c)}$ berlaku $d(x^{(n)}, x) \ll \frac{c}{2}$ dan $d(x^{(n)}, y) \ll \frac{c}{2}$. Karena d merupakan metrik *cone*, dari Definisi 2.17 diketahui bahwa $d(x, y) \preceq d(x^{(n)}, x) + d(x^{(n)}, y)$, akibatnya $d(x, y) \ll c$. Berdasarkan Proposisi 2.19 berlaku $d(x, y) \ll c$. Karena c sebarang, maka berdasarkan Preposisi 2.19 diperoleh $d(x, y) = \bar{0}$. Dari Definisi 2.17 haruslah $x = y$. $\square$

Berikut diberikan definisi barisan *Cauchy* pada ruang metrik *cone*.

Definisi 3.5. [5] Misalkan ruang metrik *cone* (X, d) , didefinisikan suatu barisan $(x^{(n)})$ pada X . Jika untuk setiap $c \in E$ dimana $0 \ll c$ terdapat $N_{(c)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dimana $n, m \geq N_{(c)}$, berlaku $d(x^{(n)}, x^{(m)}) \ll c$, maka $(x^{(n)})$ disebut barisan *Cauchy* pada X .

Contoh 3.6. Diberikan ruang metrik *cone* seperti Contoh 2.18. Barisan $(x^{(n)})$ yang didefinisikan pada Contoh 3.3 merupakan barisan *Cauchy*.

Bukti. Ambil sebarang $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ dengan $\bar{0} \ll c$. Pilih $N_{(c)} \in \mathbb{N}$ dimana $N_{(c)} > \sup \left\{ \frac{2}{c_1}, 2\frac{\alpha\beta}{c_2} \right\}$. Maka untuk setiap $m, n > N_{(c)}$ berlaku :

$$\begin{aligned} d\left(\left(\frac{1}{m}, \frac{\beta}{m}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{\beta}{n}\right)\right) &\preceq d\left(\left(\frac{1}{m}, \frac{\beta}{m}\right), \bar{0}\right) + d\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{\beta}{n}\right), \bar{0}\right) \\ &= \left(\left|\frac{1}{m} - 0\right|, \alpha\left|\frac{\beta}{m} - 0\right|\right) + \left(\left|\frac{1}{n} - 0\right|, \alpha\left|\frac{\beta}{n} - 0\right|\right) \\ &= \left(\frac{1}{m}, \frac{\alpha\beta}{m}\right) + \left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha\beta}{n}\right) \\ &\preceq \left(\frac{1}{N_{(c)}}, \frac{\alpha\beta}{N_{(c)}}\right) + \left(\frac{1}{N_{(c)}}, \frac{\alpha\beta}{N_{(c)}}\right) \\ &= \left(\frac{2}{N_{(c)}}, 2\frac{\alpha\beta}{N_{(c)}}\right). \end{aligned}$$

Karena $N_{(c)} > \sup \left\{ \frac{2}{c_1}, 2\frac{\alpha\beta}{c_2} \right\}$, maka $\left(c_1 - \frac{2}{N_{(c)}}\right) > 0$ dan $\left(c_2 - 2\frac{\alpha\beta}{N_{(c)}}\right) > 0$. Akibatnya berlaku $d(x^{(m)}, x^{(n)}) \ll c$. Karena c sebarang, terbukti $(x^{(n)})$ barisan *Cauchy*. $\square$

Lema 3.7. [5] Misalkan (X, d) suatu ruang metrik *cone* dan $(x^{(n)})$ suatu barisan pada X . Jika $(x^{(n)})$ konvergen ke x , maka $(x^{(n)})$ adalah barisan *Cauchy*.

Bukti. Ambil sebarang c dimana $\bar{0} \ll c$. Karena barisan $(x^{(n)})$ konvergen, maka terdapat $N_{(c)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m > N_{(c)}$ berlaku $d(x^{(n)}, x) \ll \frac{c}{2}$ dan $d(x^{(m)}, x) \ll \frac{c}{2}$. Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} d(x^{(n)}, x^{(m)}) &\preceq d(x^{(n)}, x) + d(x^{(m)}, x) \\ &\ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c. \end{aligned}$$

Terbukti $(x^{(n)})$ *Cauchy*. □

Lema 3.8. [5] Misalkan (X, d) suatu ruang metrik cone dan P merupakan cone normal dengan konstanta normal K . Didefinisikan barisan $(x^{(n)})$ pada X . Barisan $(x^{(n)})$ merupakan barisan *Cauchy* jika dan hanya jika $d(x^{(n)}, x^{(m)}) \rightarrow \bar{0}$ untuk $n, m \rightarrow \infty$.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan $(x^{(n)})$ adalah barisan *Cauchy*. Ambil sebarang $\epsilon > 0$, pilih $c \in E$ dimana $\bar{0} \ll c$ dan $K\|c\| < \epsilon$. Karena $(x^{(n)})$ adalah barisan *Cauchy*, maka terdapat $N_{(c)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m > N_{(c)}$ berlaku $d(x^{(n)}, x^{(m)}) \ll c$. Karena P adalah cone normal, maka untuk $n, m > N_{(c)}$ juga berlaku $\|d(x^{(n)}, x^{(m)})\| \leq K\|c\| < \epsilon$. Karena ϵ sebarang maka $\|d(x^{(n)}, x^{(m)})\| \rightarrow 0$, yang berarti bahwa $d(x^{(n)}, x^{(m)}) \rightarrow \bar{0}$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan $d(x^{(n)}, x^{(m)}) \rightarrow \bar{0}$. Untuk sebarang $c \in E$ dimana $\bar{0} \ll c$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $y \in E$ dimana $\|y\| < \delta$ berlaku $y \ll c$. Karena $d(x^{(n)}, x^{(m)}) \rightarrow \bar{0}$, maka untuk δ yang sama terdapat $N_{(\delta)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m > N_{(\delta)}$ berlaku $\|d(x^{(n)}, x^{(m)})\| < \delta$ sehingga $d(x^{(n)}, x^{(m)}) \ll c$. Terbukti $(x^{(n)})$ adalah barisan *Cauchy*. □

Lema 3.9. [5] Diberikan ruang metrik cone (X, d) dan P merupakan cone normal dengan konstanta normal K . Misalkan $(x^{(n)})$ dan $(y^{(n)})$ merupakan barisan pada X dimana $x^{(n)} \rightarrow x$, dan $y^{(n)} \rightarrow y$ maka $d(x^{(n)}, y^{(n)}) \rightarrow d(x, y)$ untuk $n, m \rightarrow \infty$.

Bukti. Ambil sebarang $\epsilon > 0$, pilih $c \in E$ dimana $\bar{0} \ll c$ dan $\|c\| < \frac{\epsilon}{4K+2}$. Karena $x^{(n)}$ konvergen ke x , dan $y^{(n)}$ konvergen ke y , maka terdapat $N_{(c)} \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > N_{(c)}$ berlaku $d(x^{(n)}, x) \ll c$ dan $d(y^{(n)}, y) \ll c$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh :

- i) $d(x^{(n)}, y^{(n)}) \preceq d(x^{(n)}, x) + d(x, y) + d(y, y^{(n)}) \preceq d(x, y) + 2c$.
- ii) $d(x, y) \preceq d(x, x^{(n)}) + d(x^{(n)}, y^{(n)}) + d(y^{(n)}, y) \preceq d(x^{(n)}, y^{(n)}) + 2c$.

Dari i) dan ii) diperoleh $\bar{0} \preceq d(x, y) + 2c - d(x^{(n)}, y^{(n)}) \preceq 4c$. Akibatnya

$$\begin{aligned} \|d(x^{(n)}, y^{(n)}) - d(x, y)\| &= \|d(x^{(n)}, y^{(n)}) - d(x, y) + 2c - 2c\| \\ &\leq \|d(x^{(n)}, y^{(n)}) - d(x, y) + 2c\| + \|2c\| \\ &\leq 4K\|c\| + 2\|c\| \\ &= (4K + 2)\|c\| < \epsilon \end{aligned}$$

Terbukti $d(x^{(n)}, y^{(n)}) \rightarrow d(x, y)$. □

Definisi 3.10. [5] Misalkan (X, d) ruang metrik cone, jika setiap barisan *Cauchy* di X konvergen pada X , maka (X, d) disebut ruang metrik cone lengkap.

Contoh 3.11. Ruang metrik cone yang didefinisikan pada Contoh 2.18 merupakan ruang metrik cone lengkap.

Bukti. Misalkan $(x^{(m)})$ sebarang barisan *Cauchy* pada ruang metrik *cone* $(\mathbb{R}^2, d)$ dengan $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)})$. Karena $(x^{(m)})$ merupakan barisan *Cauchy*, maka untuk setiap $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ dengan $\bar{0} \ll c$ terdapat $N_{(c)} \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $k, l \in \mathbb{N}$ dimana $k, l > N_{(c)}$ berlaku

$$d(x^{(k)}, x^{(l)}) = (|x_1^{(k)} - x_1^{(l)}|, \alpha|x_2^{(k)} - x_2^{(l)}|) \ll c$$

Akibatnya $|x_1^{(k)} - x_1^{(l)}| < c_1$ dan $|x_2^{(k)} - x_2^{(l)}| < \frac{c_2}{\alpha}$. Karena c sebarang, maka barisan $(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, \dots)$ dan $(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, \dots)$ merupakan barisan *Cauchy* di $\mathbb{R}$. Karena $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots)$ merupakan barisan *Cauchy* di $\mathbb{R}$ untuk $i = 1, 2$ maka $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots)$ konvergen ke suatu $x_i \in \mathbb{R}$. Berdasarkan Kriteria Kekonvergenan *Cauchy*, maka barisan $(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, \dots)$ konvergen ke suatu $x_1 \in \mathbb{R}$ dan $(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, \dots)$ konvergen ke suatu $x_2 \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain $(x_1^{(m)}, x_2^{(m)})$ konvergen ke suatu $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Karena $(x^{(m)})$ sebarang barisan *Cauchy* di $\mathbb{R}^2$ terbukti bahwa $(\mathbb{R}^2, d)$ merupakan ruang norm lengkap. $\square$

3.2. Teorema Titik Tetap Pada Ruang Metrik Cone

Pada subbab ini akan dibuktikan teorema titik tetap pada ruang metrik *cone*.

Teorema 3.12. [5] *Misalkan (X, d) ruang metrik cone lengkap dan P cone normal dengan konstanta K . Didefinisikan pemetaan $T : X \rightarrow X$ yang kontraktif. Maka T memiliki titik tetap tunggal di X .*

Bukti. Pilih $x^{(0)} \in X$ kemudian definisikan barisan $(x^{(n)})$ pada X sebagai berikut:

$$x^{(1)} = Tx^{(0)}, x^{(2)} = Tx^{(1)} = T^2x^{(0)}, \dots, x^{(n)} = Tx^{(n-1)} = \dots = T^n x^{(0)}.$$

Karena T kontraktif, maka terdapat $k \in [0, 1)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku:

$$d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \preceq kd(x^{(n-1)}, x^{(n)}) \preceq k^2d(x^{(n-2)}, x^{(n-1)}) \preceq \dots \preceq k^nd(x^{(0)}, x^{(1)}).$$

Karena (X, d) ruang metrik cone, berdasarkan Definisi 2.17 untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $n > m$ berlaku:

$$\begin{aligned} d(x^{(m)}, x^{(n)}) &\preceq d(x^{(m)}, x^{(m+1)}) + d(x^{(m+1)}, x^{(m+2)}) + \dots + d(x^{(n-1)}, x^{(n)}) \\ &\preceq k^m d(x^{(0)}, x^{(1)}) + k^{m+1} d(x^{(0)}, x^{(1)}) + \dots + k^{n-1} d(x^{(0)}, x^{(1)}) \\ &= (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1}) d(x^{(0)}, x^{(1)}) \\ &\preceq \frac{k^m}{1-k} d(x^{(0)}, x^{(1)}). \end{aligned}$$

Karena

P cone normal, maka $\|d(x^{(n)}, x^{(m)})\| \leq \frac{k^n}{1-k} K \|d(x^{(0)}, x^{(1)})\|$. Karena $k < 1$, akibatnya $d(x^{(n)}, x^{(m)}) \rightarrow \bar{0}$. Berdasarkan Lema 3.8 barisan $(x^{(n)})$ merupakan barisan *Cauchy* pada ruang metrik cone (X, d) . Karena (X, d) lengkap, berdasarkan

Definisi 3.10 $x^{(n)}$ konvergen ke suatu $x^* \in X$. Berdasarkan Definisi 2.17 dan Definisi 2.21 diperoleh:

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\preceq d(Tx^*, Tx^{(n)}) + d(Tx^{(n)}, x^*) \\ &= d(Tx^{(n)}, Tx^*) + d(Tx^{(n)}, x^*) \\ &\preceq kd(x^{(n)}, x^*) + d(x^{(n+1)}, x^*). \end{aligned}$$

Karena P merupakan *cone* normal, berdasarkan Definisi 2.16 berlaku $\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K\|kd(x^{(n)}, x^*) + d(x^{(n+1)}, x^*)\|$. Karena $(x^{(n)})$ konvergen ke x^* , diperoleh $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$. Dari Definisi 2.1 dan Definisi 2.17 haruslah $d(Tx^*, x^*) = \bar{0}$ dan $Tx^* = x^*$, maka x^* merupakan titik tetap dari pemetaan T . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa titik tetap pemetaan T tunggal. Misalkan terdapat titik tetap lain dari T yaitu y^* . Akan ditunjukkan bahwa $y^* = x^*$. Karena y^* titik tetap T maka $Ty^* = y^*$, sehingga $d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*)$. Karena T kontraktif maka $d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \preceq kd(x^*, y^*)$. Karena $k < 1$ maka haruslah $d(x^*, y^*) = \bar{0}$, maka haruslah $x^* = y^*$. Terbukti titik tetap pemetaan T tunggal. $\square$

Akibat Teorema 3.12, pemetaan kontraktif pada ruang metrik *cone* (X, d) memiliki titik tetap tunggal pada lingkungan- c dari titik $x_0 \in X$.

Akibat 3.13. [7] Misalkan (X, d) ruang metrik *cone* lengkap dan P *cone* normal. Didefinisikan himpunan $B(x^{(0)}, c) = \{x \in X | d(x^{(0)}, x) \preceq c\}$ untuk suatu $c \in E$ dimana $\bar{0} \ll c$ dan $x^{(0)} \in X$. Misalkan $T : X \rightarrow X$ suatu pemetaan kontraktif dimana untuk setiap $x, y \in B(x^{(0)}, c)$ berlaku $d(Tx, Ty) \preceq kd(x, y)$ dengan $k \in [0, 1)$ dan $d(x^{(0)}, Tx^{(0)}) \preceq (1 - k)c$. Maka titik tetap pemetaan T berada di $B(x^{(0)}, c)$.

Bukti. Misalkan (x^n) adalah barisan pada X yang didefinisikan oleh:

$$x^{(1)} = Tx^{(0)}, x^{(2)} = Tx^{(1)} = T^2x^{(0)}, \dots, x^{(n)} = Tx^{(n-1)} = \dots = T^nx^{(0)}.$$

Berdasarkan pembuktian dari Teorema 3.12 diketahui bahwa $(x^{(n)})$ adalah barisan *Cauchy* dan untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$ dimana $n > m$ berlaku $d(x^{(m)}, x^{(n)}) \preceq \frac{k^m}{1-k}d(x^{(0)}, x^{(1)})$. Misalkan $m = 0$, maka untuk setiap $n > 0$ berlaku:

$$\begin{aligned} d(x^{(0)}, x^{(n)}) &\preceq \frac{1}{1-k}d(x^{(0)}, x^{(1)}) \\ &= \frac{1}{1-k}d(x^{(0)}, Tx^{(0)}) \\ &\preceq \frac{1}{1-k}(1-k)c \preceq c. \end{aligned}$$

Dengan kata lain, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $x^{(n)} \in B(x^{(0)}, c)$. Karena $(x^{(n)})$ adalah barisan *Cauchy* dan (X, d) adalah ruang metrik *cone* lengkap, maka $(x^{(n)})$ konvergen ke suatu $x \in X$. Dari Teorema 3.12 diketahui bahwa x adalah titik tetap pemetaan T . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $x \in B(x^{(0)}, c)$. Perhatikan bahwa

:

$$\begin{aligned} d(x^{(0)}, x) &\preceq d(x^{(0)}, x^{(n)}) + d(x^{(n)}, x) \\ &\preceq c + d(x^{(n)}, x). \end{aligned}$$

Karena $x^{(n)}$ konvergen ke x akibatnya $d(x^{(0)}, x) \preceq c$. terbukti $x \in B(x^{(0)}, c)$. $\square$

4. Kesimpulan

Konsep kekonvergenan barisan pada ruang metrik dapat diterapkan pada ruang metrik *cone*. dimana suatu barisan pada ruang metrik *cone* (X, d) dikatakan konvergen ke suatu $x \in X$ jika dan hanya jika jarak antara barisan tersebut dengan x konvergen ke $\bar{0}$. Kemudian, pemetaan kontraktif T pada ruang metrik *cone* lengkap (X, d) memiliki titik tetap tunggal di X .

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Syafrizal Sy, Bapak Jenizon dan Bapak Mahdhivan Syafwan yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Bartle, Robert G. Donald R. Sherbert. 2011. *Introduction to Real Analysis 4th Edition*. John Wiley and Sons, New York
- [2] Fernandez, Jerolina.*et. al.* 2017. The A-Cone Metric Space Over Banach Algebra With Applications. *Congent Mathematics* **4** : 1-20
- [3] Karapinar, E. 2009. Fixed Point Theorems in Cone Banach Spaces. *Department of Mathematics, Atılım University*:1-9
- [4] Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Application*. John Wiley and Sons, New York
- [5] Long, Huang G. Zhang Xian. 2007. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. *Science Direct*,**332**: 1468-1476.
- [6] Mukhtar Gozali, Sumanang. 2010. Pengantar Analisis Fungsional. Universitas Pendidikan Indonesia : Bandung
- [7] Nazam, Muhammad. Anam Arif. Etc. 2020. Fixed Point Problem in Cone Rectangular Metric Space with Application. *Hindawi*: 1-10.