Jurnal Matematika UNAND
Vol. **10** No. **3** Hal. 293 – 300
Edisi Juli 2021
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

SOLUSI EKSAK MODEL EPIDEMI *SUSCEPTIBLE-INFECTED-RECOVERED-DEATH*

FARRAS VITASHA PUTRI, MAHDHIVAN SYAFWAN*, MUHAFZAN
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : mahdhivan@sci.unand.ac.id

Diterima 12 Juni 2021 Direvisi 22 Juni 2021 Dipublikasikan 26 Juli 2021

Abstrak. Model epidemi *Susceptible-Infected-Recovered-Death* (SIRD) adalah pengembangan dari model epidemi *Susceptible-Infected-Removed* (SIR) yang membagi kompartemen *removed* menjadi kompartemen *recovered* dan *death*. Dalam makalah ini dibahas kembali penurunan model SIRD. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan Bernoulli, model tersebut diselesaikan untuk memperoleh solusi eksak dalam bentuk parametrik. Pengujian secara numerik untuk beberapa nilai parameter menunjukkan bahwa solusi numerik persis sama dengan solusi eksak.

Kata Kunci: Solusi eksak, model epidemi Susceptible-Infected-Recovered-Death (SIRD), persamaan Bernoulli

1. Pendahuluan

Model matematika adalah representasi dari fenomena dunia nyata yang diselesaikan secara matematis dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu. Salah satu fenomena yang menjadi perhatian adalah fenomena wabah penyakit (epidemi). Model matematika yang mengkaji fenomena tersebut diantaranya adalah model *Susceptible-Infected-Removed* (SIR), *Susceptible-Infected-Recovered-Death* (SIRD) [4]. Model SIR adalah model matematika epidemi yang paling sederhana yang membagi populasi menjadi tiga kompartemen, yaitu kompartemen individu yang rentan terhadap penyakit (*susceptible*, dinotasikan S), kompartemen individu yang terinfeksi penyakit (*infected*, dinotasikan I), dan kompartemen individu yang telah sembuh atau meninggal (*removed*, dinotasikan R).

Model SIR pertama kali dikembangkan oleh A. G. McKendrick dan W. O. Kermack pada tahun 1927 [6]. Beberapa peneliti terdahulu telah menerapkan model SIR pada beberapa fenomena wabah penyakit. Alcaraz dan Vargas-De-Leon [1]

*Penulis Korespondensi

menerapkan model SIR pada kasus flu H1N1 untuk melihat bagaimana mengendalikan epidemi yang bergantung pada angka reproduksi dasar. Side dan Noorani [8] menerapkan model SIR pada kasus demam berdarah di wilayah Sulawesi Selatan dan Selangor. Harko dkk [5] mengkaji solusi eksak model SIR dalam bentuk parametrik dengan memisalkan sebuah fungsi sebagai parameter baru yang membuat variabel bebas dan tak bebas berubah tergantung pada parameter tersebut. Penentuan solusi eksak ini merupakan salah satu perkembangan terbaru dalam kajian teoritis terhadap model SIR.

Salah satu pengembangan dari model SIR adalah dengan membagi kompartemen *removed* menjadi dua kompartemen yang berbeda, yaitu kompartemen yang telah sembuh dari penyakit (*recovered*, dinotasikan R) dan kompartemen yang meninggal akibat penyakit (*death*, dinotasikan D). Pengembangan model SIR ini dikenal dengan nama model SIRD. Salah satu peneliti terdahulu yang mengkaji model SIRD adalah Purwati dan Sugiyanto [7] yang menerapkan dua model SIRD berbeda pada kasus penyakit ebola untuk menentukan titik ekuilibrium kedua model tersebut.

Secara khusus dalam penelitian ini akan dibahas solusi eksak dari model SIRD dalam bentuk parametrik dengan menggunakan persamaan Bernoulli. Solusi eksak dari model SIRD ditentukan dengan mengacu pada penelitian sebelumnya oleh Harko pada tahun 2014 yang telah dikaji pada model SIR [5].

2. Persamaan Bernoulli

Persamaan Bernoulli pertama kali diperkenalkan pada tahun 1696 oleh Jacob Bernoulli. Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial nonlinier orde satu yang didefinisian sebagai berikut. Persamaan Bernoulli ini akan digunakan nantinya dalam penentuan solusi eksak model SIRD dalam bentuk parametrik.

Definisi 2.1. [3] *Diberikan suatu fungsi $y = y(x)$ dengan y variabel tak bebas dan x variabel bebas. Persamaan Bernoulli didefinisikan sebagai berikut:*

$$y' = p(x)y + q(x)y^n,$$

dimana p dan q adalah fungsi yang diberikan dan $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Pada tahun 1697, Leibniz menyelesaikan persamaan Bernoulli dengan mentransformasikannya ke dalam bentuk persamaan linier. Teorema berikut memberikan penyelesaian persamaan Bernoulli.

Teorema 2.2. [3] *Fungsi y adalah solusi persamaan Bernoulli*

$$y' = p(x)y + q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1, \tag{2.1}$$

jika dan hanya jika fungsi $v = \frac{1}{y^{(n-1)}}$ adalah solusi persamaan diferensial linier

$$v' = -(n-1)p(x)v - (n-1)q(x). \tag{2.2}$$

3. Penurunan Model SIRD

Model *Susceptible-Infected-Recovered-Death* (SIRD) adalah pengembangan dari model epidemi SIR dengan membagi kompartemen *removed* atas dua bagian, yaitu *recovered* (sembuh) dan *death* (meninggal) [2]. Dengan demikian terdapat empat kompartemen pada model SIRD ini, yaitu:

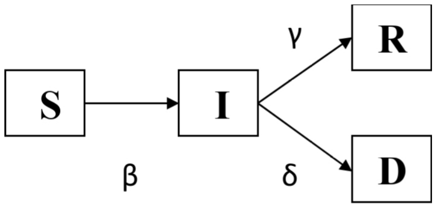
1. Kompartemen individu yang rentan terhadap penyakit (*susceptible*, dinotasikan S).
2. Kompartemen individu yang terinfeksi penyakit (*infected*, dinotasikan I).
3. Kompartemen individu yang telah sembuh dari penyakit (*recovered*, dinotasikan R). Kompartemen individu ini diasumsikan tidak akan kembali terinfeksi penyakit maupun menginfeksi individu lain.
4. Kompartemen individu yang meninggal akibat terinfeksi penyakit (*death*, dinotasikan D).

Asumsi-asumsi yang berlaku pada model SIRD pada dasarnya sama dengan asumsi-asumsi pada model SIR. Bedanya, pengurangan jumlah individu terinfeksi pada model SIRD dibedakan atas dua kemungkinan, yaitu karena sembuh dari penyakit atau karena meninggal akibat penyakit. Selanjutnya parameter-parameter yang digunakan dalam model SIRD ini adalah:

a. Parameter β yang menyatakan tingkat penyebaran (tingkat transisi antara S dan I) yang memperhitungkan kemungkinan tertular penyakit karena interaksi antara kedua individu.
b. Parameter γ yang menyatakan tingkat rata-rata kesembuhan (tingkat transisi antara I dan R).
c. Parameter δ yang menyatakan tingkat rata-rata kematian (tingkat transisi antara I dan D).

Karena parameter-parameter menyatakan tingkat transisi (peluang), maka interval nilai-nilai parameter-parameter tersebut adalah $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq 1$ dan $0 \leq \delta \leq 1$.

Berdasarkan penjelasan asumsi dan parameter di atas, maka dapat dibuat diagram model SIRD seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Model SIRD

Berdasarkan diagram tersebut, model SIR dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinier sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t), \tag{3.1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \delta I(t), \tag{3.2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t), \tag{3.3}$$

$$\frac{dD}{dt} = \delta I(t). \tag{3.4}$$

Dalam hal ini diberikan syarat awal sebagai berikut:

$$S(0) = N_1 \geq 0, \tag{3.5}$$

$$I(0) = N_2 \geq 0, \tag{3.6}$$

$$R(0) = N_3 \geq 0, \tag{3.7}$$

$$D(0) = N_4 \geq 0, \tag{3.8}$$

dimana $N_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, 4$.

Selanjutnya misalkan $\mathcal{R}(t) = R(t) + D(t)$, maka diperoleh $\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \frac{dR}{dt} + \frac{dD}{dt}$ atau dengan menggunakan persamaan (3.3) dan (3.4) menjadi

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = (\gamma + \delta)I(t). \tag{3.9}$$

Dengan demikian model SIRD (3.1)-(3.4) dapat direduksi menjadi

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t), \tag{3.10}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\gamma + \delta)I(t), \tag{3.11}$$

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = (\gamma + \delta)I(t). \tag{3.12}$$

Model (3.10)-(3.12) diberikan oleh Bailey dalam [2].

4. Solusi Eksak Model SIRD

Dengan menjumlahkan persamaan (3.1)-(3.4) dan kemudian diintegralkan terhadap t maka diperoleh persamaan untuk total populasi, yaitu

$$S(t) + I(t) + R(t) + D(t) = N, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.1}$$

dimana $S(t) > 0$, $I(t) > 0$, $R(t) > 0$ dan $D(t) > 0$. Dengan demikian diperoleh total populasi konstan sebesar $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$. Hal ini konsisten dengan asumsi model dimana populasi yang ditinjau berjumlah tetap dengan empat kompartemen.

4.1. *Persamaan Evolusi Umum untuk Model SIRD*

Pada subbab ini akan dikonstruksi persamaan evolusi umum untuk model SIRD yang dilakukan dengan mereduksi sistem (3.10)-(3.12) menjadi sebuah persamaan dengan satu variabel bebas (dalam hal ini $\mathcal{R}$). Dengan menurunkan persamaan (3.10) terhadap t, diperoleh persamaan diferensial orde dua, kemudian substitusi persamaan (3.10) ke persamaan tersebut sehingga menghasilkan

$$I' = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S}\right)^2\right). \tag{4.2}$$

Selanjutnya substitusi persamaan (3.11) ke persamaan (4.2) sehingga diperoleh

$$\beta SI - (\gamma+\delta)I = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S}\right)^2\right). \tag{4.3}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) ke persamaan (4.3) diperoleh

$$\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S}\right)^2 + (\gamma+\delta)\frac{S'}{S} - \beta S' = 0. \tag{4.4}$$

Selanjutnya eliminasi I dari persamaan (3.12) dengan mensubstitusikan persamaan (3.11) ke persamaan (3.12), yaitu diperoleh

$$\frac{-\beta\mathcal{R}'}{(\gamma+\delta)} = \frac{S'}{S}. \tag{4.5}$$

Berikutnya persamaan (4.5) diintegralkan terhadap t sehingga menghasilkan

$$-\frac{\beta\mathcal{R}}{(\gamma+\delta)} = \int\left(\frac{S'}{S}\right)dt. \tag{4.6}$$

atau

$$e^{-\frac{\beta}{(\gamma+\delta)}\mathcal{R}} = Se^{C},$$

untuk suatu konstanta C. Dengan memisalkan $S_0 = \frac{1}{e^C}$, maka persamaan terakhir menjadi

$$S = S_0 e^{-\frac{\beta}{(\gamma+\delta)}\mathcal{R}}. \tag{4.7}$$

Perhatikan karena $e^C > 0$, maka $S_0 > 0$.

Dengan menggunakan persamaan (3.5), (3.7), dan (3.8), persamaan (4.7) pada saat $t = 0$ menjadi

$$S_0 = N_1 e^{\frac{\beta}{(\gamma+\delta)}(N_3+N_4)}. \tag{4.8}$$

Selanjutnya turunkan persamaan (4.7) dan (4.5) terhadap t, diperoleh masing-masing sebagai berikut:

$$S' = -\frac{S_0\beta}{(\gamma+\delta)}\mathcal{R}' e^{-\frac{\beta}{(\gamma+\delta)}\mathcal{R}}, \tag{4.9}$$

$$\mathcal{R}'' = -\frac{(\gamma+\delta)}{\beta}\left(\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S}\right)^2\right). \tag{4.10}$$

Substitusi persamaan (4.5), (4.9), dan (4.10) ke persamaan (4.4) menghasilkan

$$-\frac{\beta}{(\gamma+\delta)}\left(\mathcal{R}'' + (\gamma+\delta)\mathcal{R}' - S_0\beta\mathcal{R}'e^{-\frac{\beta}{(\gamma+\delta)}\mathcal{R}}\right) = 0.$$

Karena $\dfrac{\beta}{\gamma+\delta} > 0$, maka

$$\mathcal{R}'' = S_0\beta\mathcal{R}'e^{-\frac{\beta}{(\gamma+\delta)}\mathcal{R}} - (\gamma+\delta)\mathcal{R}'. \tag{4.11}$$

Persamaan (4.11) adalah persamaan evolusi umum dari model SIRD yang ekuivalen dengan sistem (3.10)-(3.12).

4.2. *Solusi Umum Persamaan Evolusi Model SIRD*

Pada subbab ini akan dicari solusi umum dari persamaan (4.11). Untuk mendapatkan solusi umum tersebut, diperkenalkan fungsi baru $u(t)$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$u(t) = e^{-\frac{\beta}{(\gamma+\delta)}\mathcal{R}}. \tag{4.12}$$

Berikutnya dengan menggunakan persamaan (4.12), persamaan (4.11) menjadi

$$\mathcal{R}'' - \left(S_0\beta u - (\gamma+\delta)\right)\mathcal{R}' = 0. \tag{4.13}$$

Substitusi persamaan (4.5) dan (4.10) ke persamaan (4.13), hasilnya dapat ditulis dalam parameter u dengan menggunakan turunan pertama dan kedua dari persamaan (4.12), kemudian kedua ruasnya dikalikan dengan u^2 sehingga didapatkan

$$u\frac{d^2u}{dt^2} - \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left((\gamma+\delta) - S_0\beta u\right)\left(u\frac{du}{dt}\right) = 0. \tag{4.14}$$

Selanjutnya diperkenalkan fungsi baru tak nol $\phi(t)$ yang memiliki hubungan

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\phi}. \tag{4.15}$$

Turunan dari persamaan (4.15) terhadap t dapat diperoleh dengan menggunakan aturan rantai yang dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{1}{\phi^3}\frac{d\phi}{du}. \tag{4.16}$$

Selanjutnya substitusi persamaan (4.15) dan (4.16) ke persamaan (4.14), kemudian kedua ruasnya dikalikan dengan $-\frac{1}{u}$, dimana $u > 0$, sehingga didapatkan

$$\frac{d\phi}{du} + \frac{1}{u}\phi = \left((\gamma+\delta) - S_0\beta u\right)\phi^2. \tag{4.17}$$

Perhatikan bahwa persamaan (4.17) adalah persamaan Bernoulli dalam ϕ dengan solusinya sebagai berikut

$$\phi = \frac{1}{u(C_1 - (\gamma+\delta)\ln u + S_0\beta u)}, \tag{4.18}$$

dimana C_1 adalah suatu konstanta integrasi. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (4.15), persamaan (4.18) menjadi

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{u(C_1 - (\gamma + \delta)\ln u + S_0\beta u)}. \tag{4.19}$$

Kemudian persamaan (4.19) diintegralkan, sehingga diperoleh

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{d\xi}{\xi\,(C_1 - (\gamma + \delta)\ln \xi + S_0\beta\xi)} \tag{4.20}$$

dimana t_0 adalah konstanta integral sebarang.

Dengan demikian diperoleh solusi eksak dari model epidemi SIRD dalam bentuk parametrik sebagai berikut :

$$S(t) = S_0 u, \tag{4.21}$$

$$I(t) = \frac{(\gamma + \delta)}{\beta}\ln u - S_0 u - \frac{C_1}{\beta}, \tag{4.22}$$

$$\mathcal{R}(t) = -\frac{(\gamma + \delta)}{\beta}\ln u. \tag{4.23}$$

Karena γ dan δ masing-masing berkaitan dengan R dan D, dan $\mathcal{R} = R + D$, maka diperoleh solusi untuk R dan D masing-masing sebagai berikut:

$$R(t) = -\frac{\gamma}{\beta}\ln u, \tag{4.24}$$

$$D(t) = -\frac{\delta}{\beta}\ln u. \tag{4.25}$$

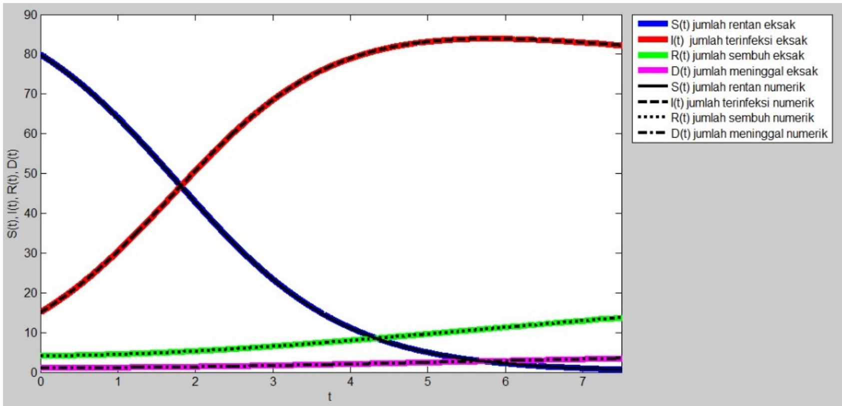
Nilai C_1 ditentukan dengan menjumlahkan persamaan (4.21)-(4.25), sehingga diperoleh $C_1 = -\beta N$ sebagai konstanta integrasi yang bernilai negatif.

4.3. *Pengujian Numerik*

Pada subbab ini dilakukan pengujian numerik terhadap solusi eksak yang telah diperoleh. Solusi numerik didapatkan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Kemudian integral (4.20) diselesaikan dengan menggunakan metode trapesium sehingga diperoleh nilai t untuk setiap parameter u yang divariasikan. Dalam hal ini pengujian dilakukan dengan menggunakan $N_1 = 80, N_2 = 13, N_3 = 4$ dan $N_4 = 1$ dengan $\beta = 0.01, \gamma = 0.02$ dan $\delta = 0.005$, dan diperoleh grafik solui eksak yang tepat sama dengan solusi numerik sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 2.

5. Kesimpulan

Pada makalah ini telah dijelaskan penurunan model SIRD, yang merupakan pengembangan dari model SIR yang membagi kompartemen *removed* menjadi kompartemen *recovered* (sembuh) dan *death* (meninggal). Model SIRD tersebut diselesaikan dengan menggunakan persamaan Bernoulli sehingga diperoleh solusi eksak dalam bentuk parametrik. Solusi eksak yang diperoleh kemudian diuji secara numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4 dan diperoleh hasil yang persis sama dengan solusi eksak model SIRD dalam bentuk parametrik.



Gambar 2. Grafik Solusi Eksak dan Solusi Numerik Model SIRD

Daftar Pustaka

[1] Alcaraz, G.G. dan Vargas-De-Leon, C., 2011, Modeling Control Strategies for Influenza A H1N1 Epidemics: SIR Models, *Revista Mexicana de Fisica S*, **58**(1):37 – 43.

[2] Borri, A., Palumbo, P., Papa, F. dan Possieri, C., 2021, Optimal Design of Lock-down and Reopening Policies for Early-stage Epidemics Through SIR-D Models, *Annu Rev Control*, 51 : 511 – 524.

[3] Boyce, E.W. dan DiPrima, R.C., 2009, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Edisi ke-9, John Wiley and Sons, Inc, New York.

[4] Brauer, F. dan Castillo-Chavez, C., 2012, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Edisi ke-2, Springer, New York.

[5] Harko, T., Lobo, F.S.N. dan Mak, M.K., 2014, Exact Analytical Solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) Epidemic Model and of the SIR Model with Equal Death and Birth Rates, *Applied Mathematics and Computation*. 236 : 184 – 194.

[6] McKendrick, A. G. dan Kermack, W. O., 1927, Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proc. R. Soc. Lond A*, 115: 700 – 721.

[7] Purwati, N. dan Sugiyanto, 2016, Pengembangan Model matematika SIRD (*Susceptibles-Infected-Recovered-Deaths*) pada Penyebaran virus Ebola, *Jurnal Fourier*, **5** (1): 23 – 34.

[8] Side, S. dan S.M. Noorani. 2013. A SIR model for spread of dengue fever disease (simulation for South Sulawesi, Indonesia and Selangor, Malaysia). *World Journal of Modelling and Simulation*. **9**(2): 96 – 105.