

SOLUSI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN *FRACTIONAL* DALAM BENTUK FUNGSI MITTAG-LEFFLER

HESTIA SEFSRIANISA, AHMAD IQBAL BAQI*

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : hestiasfsrianisa854@gmail.com*

Diterima 4 Agustus 2021 Direvisi 15 September 2021 Dipublikasikan 21 Oktober 2021

Abstrak. Makalah ini membahas solusi sistem persamaan diferensial linier homogen *fractional* orde α dengan turunan Caputo. Bentuk umum solusi diberikan dalam beberapa teorema dan beberapa contoh.

Kata Kunci: Persamaan diferensial linier homogen *fractional*, Caputo, Mittag-Leffler.

1. Pendahuluan

Telah lazim dikenal bahwa bentuk umum sistem persamaan diferensial linier homogen diberikan sebagai berikut :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1)$$

yang dalam hal ini $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ dan $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ menyatakan turunan pertama dari $\mathbf{x}$ terhadap t . Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, telah banyak terjadi fenomena dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dalam suatu persamaan diferensial. Beberapa model matematika berupa sistem persamaan diferensial telah banyak dipublikasikan diantaranya model pada sistem mekanik kendaraan, sistem fluida, sistem termal dan lainnya [12].

Seiring dengan berkembangnya konsep turunan biasa menjadi turunan *fractional* oleh Joseph Liouville dalam tahun 1832 [3], konsep sistem persamaan diferensial juga mengalami perkembangan. Salah satu pengembangan dari sistem persamaan diferensial (1.1) adalah sistem persamaan diferensial *fractional* yang diberikan sebagai berikut:

$$\frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad 0 < t < \infty \quad (1.2)$$

*penulis korespondensi

dimana $\frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha}$ menyatakan turunan *fractional* orde α dari $\mathbf{x}(t)$, dengan $m - 1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$.

Telah banyak literatur yang melaporkan mengenai bagaimana penyelesaian sistem (1.2) dengan berbagai macam bentuk turunan *fractional* yakni turunan *fractional* tipe Riemann-Liouville, turunan *fractional* tipe Jumarie, turunan *fractional* tipe Caputo dan yang lainnya.

Dalam makalah ini diselesaikan sistem persamaan diferensial *fractional* (1.2) dengan $D^\alpha \mathbf{x}(t)$ adalah turunan *fractional* tipe Caputo orde α , $m - 1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$, dari fungsi $\mathbf{x}(t)$ yang didefinisikan sebagai [3] :

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = \frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{\mathbf{x}^{(m)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-m}} \quad (1.3)$$

yang dalam hal ini Γ adalah fungsi Gamma. Dalam skripsi ini metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linier homogen *fractional* adalah metode transformasi Laplace. Dan kemudian untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linier homogen *fractional*

$$\frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad 0 < t < \infty \quad (1.4)$$

dalam bentuk fungsi Mittag-Leffler. Pembahasan ini mengelaborasi kembali pembahasan dalam literatur [10].

2. Landasan Teori

Dalam bab ini akan dibahas beberapa teori yang terkait dengan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya, yaitu teori matriks, fungsi gamma dan fungsi beta, transformasi Laplace dan fungsi Mittag-Leffler.

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan **entri** dalam matriks [1].

Definisi 2.1. [1] Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka **minor dari entri** a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari sub-matriks yang tersisa setelah baris ke- i dan kolom ke- j dihilangkan dari A . Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai **kofaktor dari entri** a_{ij} .

Definisi 2.2. [6] Fungsi Gamma dinyatakan sebagai $\Gamma(n)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n > 0.$$

Definisi 2.3. [5] Fungsi Beta didefinisikan sebagai berikut :

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad x \in \mathbb{R} \text{ dan } p, q \in \mathbb{R}, p > 0, q > 0$$

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \alpha k)} \quad , \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

Fungsi Mittag-Leffler dua parameter didefinisikan dengan relasi fungsi sebagai berikut:[3]

$$E_{\alpha,\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \rho)}, \quad \alpha > 0, \quad \rho > 0 \quad (2.2)$$

Definisi 2.4. [7] Misalkan $f(t)$ adalah suatu fungsi yang didefinisikan untuk $t > 0$ dan $p \in \mathbb{R}$. Maka Transformasi Laplace dari $f(t)$, didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Definisi 2.5. [3] Konvolusi dari dua buah fungsi yang kontinu $f(t)$ dan $g(t)$, ditulis $f(t) * g(t)$, didefinisikan sebagai berikut

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Definisi 2.6. [9] Turunan fractional Caputo orde $\alpha \in \mathbb{R}$ dari fungsi $f(t)$ dengan $m - 1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$, dinotasikan dengan $D^{\alpha} f(t)$, didefinisikan sebagai

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-m}}$$

dimana $f^{(m)}(\tau)$ adalah turunan ke- m dari fungsi $f(\tau)$.

Misalkan $\mathbf{f}(t) = [f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_n(t)]^T$, dimana $D^{\alpha} f_i(t)$ ada untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Maka perluasan Definisi 2.6 untuk $\mathbf{f}(t)$ adalah [5]

$$D^{\alpha} \mathbf{f}(t) = \frac{d^{\alpha} \mathbf{f}(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{\mathbf{f}^{(m)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-m}}$$

dengan $m - 1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.7. [8] Transformasi Laplace dari fungsi $t^{(\lambda n + \rho - 1)} E_{\lambda, \rho}^{(n)}(at^{\lambda})$ adalah

$$\mathcal{L} \left[t^{(\lambda n + \rho - 1)} E_{\lambda, \rho}^{(n)}(at^{\lambda}) \right] = \frac{n! p^{\lambda - \rho}}{(p^{\lambda} - a)^{n+1}}, \quad \lambda > 0, \rho > 0$$

Sebelum membuktikan Teorema 2.7, hubungan berikut diperlukan. Kebenarannya akan dibuktikan kemudian,

$$E_{\lambda, \rho}^{(n)}(at^{\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + n)!}{k!} \frac{(at^{\lambda})^k}{\Gamma(\lambda k + \lambda n + \rho)} \quad (2.3)$$

dan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} x^k = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad (2.4)$$

Bukti.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[t^{(\lambda n + \rho - 1)} E_{\lambda, \rho}^{(n)}(at^\lambda) \right] &= \int_0^\infty e^{-pt} t^{(\lambda n + \rho - 1)} E_{\lambda, \rho}^{(n)}(at^\lambda) dt, \\ &= \int_0^\infty e^{-pt} t^{(\lambda n + \rho - 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{(at^\lambda)^k}{\Gamma(\lambda k + \lambda n + \rho)} dt, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{a^k}{\Gamma(\lambda k + \lambda n + \rho)} \int_0^\infty e^{-pt} t^{(\lambda k + \lambda n + \rho - 1)} dt, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{a^k}{\Gamma(\lambda k + \lambda n + \rho)} \mathcal{L} \left[t^{(\lambda k + \lambda n + \rho - 1)} \right], \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{a^k}{\Gamma(\lambda k + \lambda n + \rho)} \frac{\Gamma(\lambda k + \lambda n + \rho)}{p^{\lambda k + \lambda n + \rho}}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)! a^k}{k! p^{\lambda k + \lambda n + \rho}}, \\ &= p^{-(\lambda n + \rho)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)! (ap^{-\lambda})^k}{k!}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.4) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[t^{(\lambda n + \rho - 1)} E_{\lambda, \rho}^{(n)}(at^\lambda) \right] &= p^{-(\lambda n + \rho)} \frac{n!}{(1 - ap^{-\lambda})^{n+1}}, \\ &= p^{-(\lambda n + \rho)} p^{\lambda(n+1)} \frac{n!}{(p^\lambda - a)^{n+1}}, \\ &= \frac{n! p^{\lambda - \rho}}{(p^\lambda - a)^{n+1}}. \end{aligned} \quad \square$$

Berikut ini akan dibuktikan persamaan (2.3) dan (2.4)

$$E_{\lambda, \rho}^{(n)}(at^\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{(at^\lambda)^k}{\Gamma(\lambda k + \lambda n + \rho)}$$

Bukti.

$$\begin{aligned}
 E_{\lambda,\rho}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\lambda k + \rho)}, \\
 &= \frac{z^0}{\Gamma(\rho)} + \frac{z^1}{\Gamma(\lambda + \rho)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\lambda + \rho)} + \frac{z^3}{\Gamma(3\lambda + \rho)} + \cdots \\
 E_{\lambda,\rho}^{(1)}(z) &= 0 + \frac{1}{\Gamma(\lambda + \rho)} + \frac{2z}{\Gamma(2\lambda + \rho)} + \frac{3z^2}{\Gamma(3\lambda + \rho)} + \cdots, \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!z^k}{k!\Gamma(\lambda(k+1) + \rho)} \\
 E_{\lambda,\rho}^{(2)}(z) &= 0 + \frac{2}{\Gamma(2\lambda + \rho)} + \frac{6z}{\Gamma(3\lambda + \rho)} + \cdots \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)!z^k}{k!\Gamma(\lambda(k+2) + \rho)}.
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 E_{\lambda,\rho}^{(n)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!z^k}{k!\Gamma(\lambda(k+n) + \rho)}, \\
 E_{\lambda,\rho}^{(n)}(at^\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{(at^\lambda)^k}{\Gamma(\lambda k + \lambda n + \rho)}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Kemudian pembuktian dari persamaan (2.4)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} x^k = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Untuk membuktikannya kita memerlukan persamaan berikut

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \quad (2.5)$$

dan

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r C(n+r-1, r) \quad (2.6)$$

Bukti.

- (1) Akan dibuktikan persamaan (2.5). Misalkan $f(x) = (1+x)^n$. Dengan menggunakan Deret Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1+x)^n \implies f(0) = 1, \\
 f'(x) &= n(1+x)^{n-1} \implies f'(0) = n, \\
 f''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2} \implies f''(0) = n(n-1), \\
 f'''(x) &= n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} \implies f'''(0) = n(n-1)(n-2).
 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 + \frac{x}{1!}n + \frac{x^2}{2!}n(n-1) + \frac{x^3}{3!}n(n-1)(n-2) + \dots \\
 &= x^0 + nx + \frac{n!}{2!(n-2)!}x^2 + \frac{n!}{3!(n-3)!}x^3 + \dots \\
 &= \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}x^k, \\
 (1+x)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}x^k.
 \end{aligned}$$

(2) Akan dibuktikan persamaan (2.6). Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 \binom{-n}{r} &= \frac{(-n)!}{r!(-n-r)!}, \\
 &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-(r-1))(-n-r)!}{r!(-n-r)!} \\
 &= (-1)^r C(n+r-1, r).
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (2.5) dan (2.6) diperoleh

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
 (1-x)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-x)^k, \\
 (1-x)^{-(n+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k.
 \end{aligned}$$

Atau

$$\frac{n!}{(1-x)^{(n+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} x^k.$$

□

3. Pembahasan

Perhatikan kembali sistem persamaan (1.4). Penerapan transformasi Laplace terhadap sistem (1.4) menghasilkan

$$\mathcal{L}[D^\alpha \mathbf{x}(t)] = \mathcal{L}[A\mathbf{x}(t)].$$

$$p^\alpha \mathbf{X}(p) - p^{\alpha-1} \mathbf{x}(0) = A\mathbf{X}(p), \quad (3.1)$$

yang dalam hal ini $\mathbf{X}(p) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)]$. Penyederhanaan (3.1) menghasilkan

$$(p^\alpha I_n - A)\mathbf{X}(p) = p^{\alpha-1} \mathbf{x}(0),$$

atau dapat ditulis

$$\mathbf{X}(p) = (p^\alpha I_n - A)^{-1} p^{\alpha-1} \mathbf{x}(0). \quad (3.2)$$

Untuk mendapatkan $\mathbf{x}(t)$, Laplace inverskan (3.2), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1} [\mathbf{X}(p)] \\ &= \mathcal{L}^{-1} [(p^\alpha I_n - A)^{-1} p^{\alpha-1} \mathbf{x}(0)] \end{aligned}$$

Untuk menghitung $(p^\alpha I_n - A)^{-1}$, diperoleh

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\text{adj}(p^\alpha I_n - A)}{\det(p^\alpha I_n - A)} p^{\alpha-1} \right] \mathbf{x}(0). \quad (3.3)$$

Contoh 3.1. Akan ditentukan solusi sistem (1.4) dengan

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Untuk menggunakan persamaan (3.3), perlu dihitung yang berikut ini.

$$\begin{aligned} (p^\alpha I_n - A) &= \begin{bmatrix} p^\alpha + 1 & -4 & 2 \\ 3 & p^\alpha - 4 & 0 \\ 3 & -1 & p^\alpha - 3 \end{bmatrix}, \\ \text{adj}(p^\alpha I_n - A) &= \begin{bmatrix} (p^\alpha - 4)(p^\alpha - 3) & 4p^\alpha - 14 & -2p^\alpha + 8 \\ -3(p^\alpha - 3) & (p^\alpha + 1)(p^\alpha - 3) - 6 & 6 \\ -3(p^\alpha - 3) & p^\alpha - 11 & (p^\alpha + 1)(p^\alpha - 4) + 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$\det(p^\alpha I_n - A) = (p^\alpha - 2)(p^\alpha - 3)(p^\alpha - 1).$$

Dengan menggunakan Teorema 2.7 diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\text{adj}(p^\alpha I_n - A)}{\det(p^\alpha I_n - A)} p^{\alpha-1} \right] &= \\ \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 10E_{\alpha,1}(2t^\alpha) - E_{\alpha,1}(3t^\alpha) - 11E_{\alpha,1}(t^\alpha) \\ 15E_{\alpha,1}(2t^\alpha) - 3E_{\alpha,1}(3t^\alpha) - 11E_{\alpha,1}(t^\alpha) \\ 15E_{\alpha,1}(2t^\alpha) - 5E_{\alpha,1}(3t^\alpha) - 10E_{\alpha,1}(t^\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Contoh 3.2. **Contoh 2** Akan ditentukan solusi sistem (1.4) dengan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk menggunakan persamaan (3.3), perlu dihitung yang berikut ini.

$$(p^\alpha I_n - A) = \begin{bmatrix} p^\alpha - 2 & -1 \\ 1 & p^\alpha - 4 \end{bmatrix}, \text{ adj}(p^\alpha I_n - A) = \begin{bmatrix} p^\alpha - 4 & 1 \\ -1 & p^\alpha - 2 \end{bmatrix}$$

dan

$$\det(p^\alpha I_n - A) = (p^\alpha - 2)(p^\alpha - 4) + 1 = (p^\alpha)^2 - 6p^\alpha + 9 = (p^\alpha - 3)^2$$

Dengan menggunakan Teorema 2.7 diperoleh

$$\begin{bmatrix} t^\alpha E'_{\alpha,1}(3t^\alpha) \\ E'_{\alpha,1-\alpha}(3t^\alpha) - 2t^\alpha E'_{\alpha,1}(3t^\alpha) \end{bmatrix}$$

Contoh 3.3. Akan ditentukan solusi sistem (1.4) dengan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Untuk menggunakan persamaan (3.3), perlu dihitung yang berikut ini.

$$(p^\alpha I_n - A) = \begin{bmatrix} p^\alpha - 2 & -1 & 2 \\ -1 & p^\alpha - 2 & -2 \\ 2 & -2 & p^\alpha + 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(p^\alpha I_n - A) = \begin{bmatrix} (p^\alpha - 3)(p^\alpha + 2) & p^\alpha - 3 & -2(p^\alpha - 3) \\ p^\alpha - 3 & (p^\alpha - 3)(p^\alpha + 2) & 2(p^\alpha - 3) \\ -2(p^\alpha - 3) & 2(p^\alpha - 3) & (p^\alpha - 1)(p^\alpha - 3) \end{bmatrix}$$

dan

$$\det(p^\alpha I_n - A) = (p^\alpha - 3)^2(p^\alpha + 3)$$

Sehingga

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\text{adj}(p^\alpha I_n - A)}{\det(p^\alpha I_n - A)} p^{\alpha-1} \right] = \begin{bmatrix} E_{\alpha,1}(3t^\alpha) + 5E_{\alpha,1}(-3t^\alpha) \\ -3E_{\alpha,1}(3t^\alpha) + 3E_{\alpha,1}(-3t^\alpha) \\ 2E_{\alpha,1}(3t^\alpha) + 10E_{\alpha,1}(-3t^\alpha) \end{bmatrix}$$

Contoh 3.4. Akan ditentukan solusi sistem (1.4) dengan

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk menggunakan persamaan (3.3), perlu dihitung yang berikut ini.

$$(p^\alpha I_n - A) = \begin{bmatrix} p^\alpha + 2 & 7 \\ -1 & p^\alpha - 2 \end{bmatrix}, \text{ adj}(p^\alpha I_n - A) = \begin{bmatrix} p^\alpha - 2 & -7 \\ 1 & p^\alpha + 2 \end{bmatrix}$$

dan

$$\det(p^\alpha I_n - A) = (p^\alpha + 2)(p^\alpha - 2) + 7 = (p^\alpha)^2 - 4 + 7 = (p^\alpha)^2 + 3 = (p^\alpha + \sqrt{3}i)(p^\alpha - \sqrt{3}i)$$

Dengan demikian diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\text{adj}(p^\alpha I_n - A)}{\det(p^\alpha I_n - A)} p^{\alpha-1} \right] = \begin{bmatrix} \frac{3i + 2\sqrt{3}}{2i} E_{\alpha,1}(-\sqrt{3}it^\alpha) + \frac{3i - 2\sqrt{3}}{2i} E_{\alpha,1}(\sqrt{3}it^\alpha) \\ \frac{-\sqrt{3}}{2i} E_{\alpha,1}(-\sqrt{3}it^\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2i} E_{\alpha,1}(\sqrt{3}it^\alpha) \end{bmatrix}$$

4. Kesimpulan

Solusi sistem persamaan diferensial linier homogen *fractional*

$$\frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad 0 < t < \infty$$

dengan $\frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha}$ menyatakan turunan *fractional* Caputo orde α dari $\mathbf{x}(t)$, dengan $m - 1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$ adalah

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\text{adj}(p^\alpha I_n - A)}{\det(p^\alpha I_n - A)} p^{\alpha-1} \right] \mathbf{x}(0).$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Muhafzan, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Ibu Dr. Haripamyu dan Bapak Dr. Effendi yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Kelima. Terjemahan Bahasa Indonesia. Erlangga, Jakarta.
- [2] U. Ghosh. S. Sarkar and S. Das. 2015. *Solution of System of Linear Fractional Differential Equation with Derivative of Jumarie Type* . Department of Applied Mathematics Kalkota, India.
- [3] Fallahgoul. A, Sergio. Focardi, Frank. Fabozzi. 2017. *Fractional Calculus and Fractional Processes with Applications to Financial Economics*. Academic Press, Australia.
- [4] U. Ghosh. S. Sengupta, S. Sarkar and S. Das. 2015. *Analytic Solution of Linear Fractional Differential Equation with Jumarie Derivative in Term of Mittag-Leffler Function*. Americal Journal of Mathematical Analysis. 3(2) : 32-38.
- [5] Milici. Constantin, Gheorghe. D, J. Tanreiro. 2019. *Introduction to Fractional Differential Equations*. Springer, Switzerland.
- [6] Spiegel, M . R. 1963. *Kalkulus Lanjutan Edisi Ketiga*. Terjemahan Bahasa Indonesia. Erlangga, Jakarta.
- [7] Spiegel, M . R. 1999. *Transformasi Laplace*. Terjemahan Bhasa Indonesia. Erlangga, Jakarta.
- [8] Podlubny, I. 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, London.
- [9] Kaczorek, T. 2011. *Selected Problems in Fractional Systems Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [10] Duan, J. (2018, July). *System of Linear Fractional Differential Equations and The Mittag-Leffler Functions with Matrix Variable*. In J. Phys. Conf. Ser. (Vol. 1053).
- [11] Ren Duan, Guang. 2010. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. Springer, New York.
- [12] Rogowski, K. 2016. Reachability of Standard and Fractional Continuous-Time Systems with Constant Inputs. *Archives of Control Sciences*, 26(2), pp. 147-159.