Jurnal Matematika UNAND
Vol. **10** No. **4** Hal. 527 – 537
Edisi Oktober 2021
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

KARAKTERISASI MODUL PRIMA DAN MODUL HEREDITER ATAS ALJABAR NAKAYAMA

RISNAWITA*, DELSI KARIMAN, INTAN MUCHTADI-ALAMSYAH
Prodi Pendidikan Matematika,
Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan,
IAIN Bukittinggi, Sumatera Barat, Indonesia.
email : risnawitaa@gmail.com, delsi@gmail.com, ntan@math.itb.ac.id

Diterima 4 Agustus 2021 Direvisi 15 September 2021 Dipublikasikan 21 Oktober 2021

Abstrak. Misalkan K suatu lapangan, $A = KE$ adalah suatu aljabar lintasan yang bersesuaian dengan suatu graf berarah E. Aljabar lintasan A disebut Nakayama jika aljabar bersifat *basic* dan terhubung dari graf (graf berarah) E_A, dimana setiap titik menjadi sumber dan target paling banyak satu panah. Tulisan ini membahas modul prima dan modul herediter atas aljabar Nakayama tertentu. Modul prima atas aljabar Nakayama dari graf tipe A_n hanyalah modul sederhana. Selanjutnya, untuk aljabar Nakayama dengan graf berbentuk garis, semua modul projektifnya merupakan modul herediter, sedangkan untuk aljabar Nakayama *self-injective*, semua modul projektifnya bukan modul herediter.

Kata Kunci: Graf, Aljabar Lintasan, Aljabar Nakayama, Modul Prima, Modul Herediter

1. Pendahuluan

Ide untuk merepresentasikan objek matematika yang abstrak menjadi objek yang lebih sederhana sangat berguna, misalnya dalam pengklasifikasian. Suatu aljabar dapat direpresentasikan dalam bentuk graf berarah dan sebaliknya suatu aljabar (*path algebra*) dapat diperoleh dari graf berarah [1].

Dalam ([7], [6], [11], [3]) telah dikaji aljabar lintasan beserta sifat-sifatnya untuk klasifikasi ekivalensi *derived* [7], subruang p-regular ([11] dan [8]), serta klasifikasi m-*cluster tilted algebra* [3]. Keuntungan pengkajian aljabar lintasan adalah kemudahan dalam memvisualisasi, yang sangat berguna untuk kajian representasi aljabar, karena sifat-sifat aljabar lintasan yang dapat dibaca seperti dimensi, kesederhanaan, melalui sifat-sifat grafnya.

Di lain pihak pengembangan konsep dari gelanggang herediter Noether prima (HNP) menjadi modul HNP telah dilakukan dalam [4] dan [5]. Lebih lanjut dalam [12] dan [10] telah dilakukan karakterisasi submodul prima.

*penulis korespondensi

Misalkan M adalah modul atas gelanggang R (ditulis R-modul M), submodul $N \neq M$ disebut submodul prima jika $rRm \subseteq N$ dengan r di R dan $m \in M$ mengakibatkan m di N atau $rM \subseteq N$ [2]. Misalkan M adalah modul kiri atas gelanggang R, modul M disebut modul prima jika $rRm = 0$ dengan $0 \neq r \in R$ dan $0 \neq m \in M$ maka $rM = 0$. Modul M dikatakan herediter jika semua submodulnya bersifat projektif.

Aljabar lintasan A disebut Nakayama jika A bersifat *basic* dan terhubung, serta memiliki graf berarah E_A dimana setiap titik menjadi sumber dan target paling banyak satu panah. Keistimewaan dari aljabar Nakayama adalah grafnya berbentuk garis atau berbentuk siklus. Untuk selanjutnya graf berarah ini akan disebut graf saja. Dalam tulisan ini akan dibahas mengenai karakterisasi modul prima dan modul herediter atas aljabar Nakayama tertentu.

2. Metode Penelitian

Secara umum metode penelitian yang dilakukan adalah metode eksplorasi dan adaptasi dari hasil-hasil yang sudah ada melalui studi literatur.

3. Metode Penelitian

3.1. *Graf (Berarah), Aljabar Lintasan, dan Representasi Graf (Berarah)*

Definisi 3.1. *Suatu graf (berarah) $E = (E^0, E^1, s, t)$ adalah empat-terurut yang terdiri atas himpunan E^0 yang unsurnya dinamakan titik, himpunan E^1 yang unsurnya dinamakan panah, pemetaan $s : E^1 \to E^0$ dan pemetaan $t : E^1 \to E^0$. Untuk setiap $\alpha \in E^1$, titik $s(\alpha) \in E^0$ dinamakan titik awal dari α dan $t(\alpha)$ dinamakan titik akhir dari α.*

Suatu panah $\alpha \in E^1$ dengan titik awal $a = s(\alpha)$ dan titik akhir $b = t(\alpha)$ dapat kita tuliskan menjadi $\alpha : a \to b$. Sedangkan suatu graf $E = (E^0, E^1, s, t)$ dapat ditulis secara singkat menjadi $E = (E^0, E^1)$ atau E.

Dalam pembahasan ini, graf (berarah) yang dimaksud adalah graf tanpa pembatasan banyaknya panah antara dua titik, pembatasan akan adanya *loop* atau *cycle* berarah.

Graf E dikatakan hingga jika E^0 dan E^1 himpunan hingga. Graf berarah E dikatakan terhubung jika graf yang diperoleh dari E dengan menghilangkan arah pada panah-panahnya adalah graf terhubung.

Misalkan $E = (E^0, E^1, s, t)$ suatu graf dan $a, b \in E^0$. Suatu lintasan dengan panjang $l \geq 1$ dengan titik awal a dan titik akhir b (atau disingkat: dari a ke b) adalah barisan

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l|b),$$

dengan $\alpha_k \in E^1$ untuk semua $1 \leq k \leq l$, dan $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ untuk setiap $1 \leq k < l$ serta $t(\alpha_l) = b$. Secara singkat suatu lintasan dapat dinotasikan oleh $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ dan dapat digambarkan sebagai berikut

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \to \cdots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b.$$

Komposisi lintasan-lintasan dapat mendefinisikan operasi secara parsial pada himpunan semua lintasan pada graf. Berikut diberikan definisi aljabar lintasan.

Definisi 3.2. *Misalkan E suatu graf. Aljabar lintasan KE (K suatu lapangan) dari E adalah K-aljabar dengan basis ruang vektornya adalah himpunan semua lintasan $(a|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l|b)$, dengan panjang $l \geq 0$ di E, dan perkalian antara dua vektor basis $(a|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l|b)$ dan $(c|\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k|d)$ dari KE didefinisikan oleh*

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l|b)(c|\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k|d),$$

dimana δ_{bc} adalah fungsi Kronecker delta. Dengan kata lain, hasil perkalian dua lintasan $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$ dan $\beta_1\beta_2\cdots\beta_k$ sama dengan nol jika $t(\alpha_l) \neq s(\beta_1)$, dan sama dengan lintasan $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l\beta_1\beta_2\cdots\beta_k$ jika $t(\alpha_l) = s(\beta_1)$. Perkalian dua unsur basis diperluas untuk sebarang unsur KE dengan aturan distributif.

Selanjutnya akan diperkenalkan aljabar Nakayama.

Definisi 3.3. *Modul M dikatakan uniserial jika M memiliki deret komposisi tunggal.*

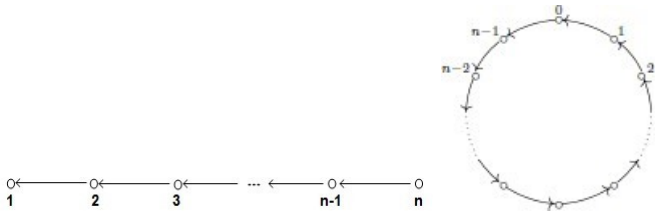
Definisi 3.4. *Aljabar A dikatakan serial kanan jika setiap A-modul kanan projektif tak terdekomposisi adalah uniserial. Aljabar A dikatakan serial kiri jika setiap A-modul kiri projektif tak terdekomposisi adalah uniserial.*

Aljabar A dikatakan serial kanan jika setiap A-modul kiri injektif tak terdekomposisi adalah uniserial, dan aljabar A dikatakan serial kiri jika setiap A-modul kanan injektif tak terdekomposisi adalah uniserial. Jadi, aljabar A serial kanan jika dan hanya jika aljabar *opposite* A^{op} adalah serial kiri.

Definisi 3.5. *Aljabar A dikatakan aljabar Nakayama jika A adalah serial kanan dan serial kiri.*

Jadi, aljabar A dikatakan aljabar Nakayama jika dan hanya jika setiap A-modul projektif tak terdekomposisi dan setiap A-modul injektif tak terdekomposisi merupakan modul uniserial.

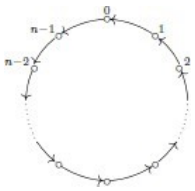
Teorema 3.6. *Aljabar basic dan terhubung A merupakan aljabar Nakayama jika dan hanya jika graf E_A adalah salah satu dari graf pada Gambar 1 berikut.*



Gambar 1

Teorema berikut merupakan karakterisasi aljabar Nakayama *self-injective*. Suatu aljabar dikatakan *self-injective* jika modul kanan A_A merupakan A-modul injektif, atau secara ekivalen, jika setiap A-modul kanan projektif adalah injektif.

Teorema 3.7. *Misalkan A suatu aljabar basic dan terhubung, yang tidak isomorf dengan K. Aljabar A adalah aljabar Nakayama self-injective jika dan hanya jika $A \cong \frac{KE}{I}$, dengan E adalah graf pada Gambar 2, $n \geq 1$, dan $I = R^h$ untuk suatu*



Gambar 2

$h \geq 2$, R menotasikan ideal panah dari KE.

Selanjutnya akan dijelaskan bagaimana graf dapat digunakan untuk menggambarkan modul. Untuk itu, dibutuhkan definisi berikut.

Definisi 3.8. *Misalkan Esuatu graf hingga dan terhubung. Ideal dua sisi dari aljabar lintasan KE yang dibangun oleh panah-panah di E dikatakan ideal panah dari KE dan ditulis R_E.*

Definisi 3.9. *Misalkan E suatu graf hingga dan R_E ideal panah dari aljabar lintasan KE. Ideal dua sisi $\mathcal{I}$ dari KE dikatakan admissible jika terdapat $m \geq 2$ sehingga*

$$R_E^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_E^2.$$

Jika $\mathcal{I}$ ideal admissible dari KE, maka $(E, \mathcal{I})$ dinamakan graf terbatas. Aljabar kuosien $KE/\mathcal{I}$ dinamakan aljabar dari graf terbatas atau aljabar graf terbatas.

Dengan menggunakan graf terbatas $(E, \mathcal{I})$ yang berkorespondensi dengan suatu aljabar A, setiap A-modul berdimensi hingga M dapat digambarkan sebagai representasi K-linear dari $(E, \mathcal{I})$, yaitu koleksi K-ruang vektor berdimensi hingga M_a, dengan $a \in E^0$, yang dihubungkan dengan pemetaan K-linear $\varphi : M_a \to M_b$ yang berkorespondensi dengan panah $\alpha : a \to b$ di E, dan memenuhi suatu relasi yang diberikan oleh $\mathcal{I}$.

Definisi 3.10. *Misalkan E graf hingga. Suatu representasi K-linier atau secara singkat representasi M dari E didefinisikan sebagai berikut:*

(1) Setiap $a \in E^0$ diasosiasikan dengan suatu K-ruang vektor M_a.
(2) Setiap panah $\alpha : a \to b$ di E^1 diasosiasikan dengan suatu pemetaan K-linier $\varphi : M_a \to M_b$.

Representasi seperti di atas dinotasikan sebagai $M = (M_a, \varphi)_{a \in Q_0, a \in Q_1}$, atau $M = (M_a, \varphi)$. Representasi M dikatakan berdimensi hingga jika setiap K-ruang vektor M_a berdimensi hingga.

Suatu kategori $Rep(E)$ adalah kategori yang objeknya adalah representasi K-linier dari E. Notasikan suatu subkategori penuh dari $Rep(E)$ yang objeknya adalah representasi berdimensi hingga dengan $rep(E)$. Notasikan $Rep_K(E, \mathcal{I})$ (atau $rep_K(E, \mathcal{I})$) subkategori penuh dari $Rep_K(E)$ (atau dari $rep_K(E)$) yang objeknya adalah representasi yang terbatas oleh $\mathcal{I}$.

Selanjutnya teorema berikut menjelaskan bahwa kategori $modA$ yang objeknya adalah A-modul yang dibangun secara hingga ekivalen dengan kategori $rep_K(E, \mathcal{I}))$ yang objeknya adalah representasi K-linear dari E yang terbatas oleh $\mathcal{I}$ berdimensi hingga.

Teorema 3.11. *Misalkan $A = KE/\mathcal{I}$ dengan E graf hingga terhubung dan $\mathcal{I}$ adalah ideal admissible dari KE. Maka terdapat ekivalensi kategori*

$$F : ModA \xrightarrow{\simeq} Rep_K(E, \mathcal{I})$$

yang dapat dibatasi menjadi ekivalensi kategori $F : ModA \xrightarrow{\simeq} rep_K(E, \mathcal{I})$.

Akibat 3.12. *Misalkan E graf hingga, terhubung dan asiklik. Terdapat suatu ekivalensi kategori K-linier Mod $KE \cong Rep_K(E)$ yang dapat direstriksi menjadi ekivalensi mod $KE \cong rep_K(E)$.*

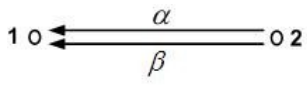
Selanjutnya diberikan gambaran eksplisit A-modul sederhana dan projektif tak terdekomposisi sebagai representasi terbatas dari $(E, \mathcal{I})$.

Definisi 3.13. *Misalkan $a \in E^0$, representasi $(S(a)_b, \varphi_\alpha)$ dari E dinotasikan dengan $S(a)$ yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$S(a) = \begin{cases} 0, & b \neq a, \\ K, & b = a. \end{cases}$$
$$\varphi_\alpha = 0, \text{ untuk setiap } \alpha \in E_1.$$

Jelas bahwa $S(a)$ adalah representasi terbatas dari $(E, \mathcal{I})$ (untuk sebarang $\mathcal{I}$).

Contoh 3.14. Misalkan E adalah graf Kronecker pada Gambar 3.



Gambar 3

Modul-modul sederhana atas KE diberikan oleh representasi

$$S(1) = \left(K \xleftarrow{\leftarrow} 0\right) \text{ dan } S(2) = \left(0 \xleftarrow{\leftarrow} K\right).$$

Sebelum diberikan representasi A-modul projektif tak terdekomposisi, berikut diberikan definisi aljabar *basic*.

Definisi 3.15. *Misalkan A aljabar dengan himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Aljabar A dikatakan basic jika $e_iA \ncong e_jA$ untuk semua $i \neq j$.*

Teorema 3.16. *Misalkan E graf terhubung hingga, R_E ideal panah dari KE, $\mathcal{I}$ ideal admissible dari KE. Aljabar graf terbatas $KE/\mathcal{I}$ adalah aljabar basic dan berdimensi hingga terhubung dengan identitas, memiliki $R_E/\mathcal{I}$ sebagai radical dan $\{e_a | a \in E^0\}$ sebagai himpunan lengkap idempoten primitif ortogonal.*

Karena aljabar A basic dan $\{e_a | a \in E^0\}$ merupakan himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif dari A, dekomposisi $A_A = \bigoplus_{a \in E^0} e_aA$ merupakan dekomposisi A_A sebagai jumlah langsung projektif tak terdekomposisi yang tidak saling isomorf. Himpunan lengkap A-modul projektif tak terdekomposisi yang tidak saling isomorf diberikan oleh modul $P(a) = e_aA$, dengan $a \in E^0$.

Teorema 3.17. *Misalkan $(E, \mathcal{I})$ suatu graf terbatas, $A = KE/\mathcal{I}$ dan $P(a) = e_aA$ dimana $a \in E^0$. Jika $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\beta)$ maka $P(a)_b$ adalah K-ruang vektor dengan basis himpunan semua $\overline{\omega} = \omega + \mathcal{I}$, dimana ω adalah lintasan dari a ke b dan untuk setiap panah $\beta : b \to c$, pemetaan K-linier $\varphi_\beta : P(a)_b \to P(a)_c$ diberikan oleh perkalian kanan dengan $\overline{\beta} = \beta + \mathcal{I}$.*

Dikatakan bahwa $P(a)$ adalah A-modul projektif tak terdekomposisi yang bersesuaian dengan titik $a \in E^0$.

Selanjutnya dijelaskan tentang A-modul injektif tak terdekomposisi.

Teorema 3.18. *Jika $I(a) = (I(a)_b, \varphi_\beta)$, maka $I(a)_b$ adalah dual K-ruang vektor dengan basis himpunan semua $\overline{\omega} = \omega + \mathcal{I}$, dengan ω adalah lintasan dari b ke a dan untuk setiap panah $\beta : b \to c$, pemetaan K-linier $\varphi_\beta : I(a)_b \to I(a)_c$ diberikan oleh dual perkalian kiri dengan $\overline{\beta} = \beta + \mathcal{I}$.*

Dikatakan bahwa $I(a)$ adalah A-modul injektif tak terdekomposisi yang bersesuaian dengan titik $a \in E^0$.

3.2. *Modul Prima atas aljabar Nakayama*

Dalam bagian ini, akan dijelaskan tentang modul prima atas aljabar lintasan dari graf Dynkin tipe A_n.

Definisi 3.19. *[2] Misalkan M adalah modul kiri atas gelanggang R, jika $rRm = 0$ dengan $0 \neq r \in R$ dan $0 \neq m \in M$ maka $m = 0$ atau $rM = 0$.*

Contoh 3.20. Z-modul Z_p dengan p bilangan prima adalah modul prima.

Berdasarkan definisi Dauns tentang modul prima, selanjutnya diberikan definisi dari modul c-prima.

Definisi 3.21. *Misalkan M adalah modul kiri atas gelanggang R, modul M disebut modul c-prima jika $rm = 0$ dengan $r \in R$ dan $m \in M$ maka $rM = 0$ atau $m = 0$.*

Contoh 3.22. Z-modul Z_2 adalah modul c-prima.

Jika R merupakan gelanggang komutatif maka Definisi 3.19 dan Definisi 3.21 ekuivalen. Selanjutnya akan dilihat kaitan antara modul c-prima dan modul prima pada proposisi berikut.

Teorema 3.23. *Jika M merupakan modul c-prima maka M merupakan modul prima.*

Bukti. Misalkan M modul c-prima, misalkan $0 \neq m \in M$ dan $r \in R$, jika $rRm = 0$ maka jelas $rm = 0$. Sehingga $rM = 0$. Jadi M merupakan modul prima. □

Catatan. Untuk pembuktian Teorema 3.23, asumsikan R gelanggang dengan unsur satuan.

Selanjutnya pada teorema berikut akan dilihat kaitan antara modul sederhana dan modul prima atas gelanggang R.

Teorema 3.24. *Jika M modul sederhana atas gelanggang R maka M merupakan modul prima.*

Bukti. Misalkan M modul sederhana artinya submodul dari M hanyalah $\{0\}$ dan M. Akan dibuktikan bahwa jika $rRm = 0$ dengan $r \in R$ dan $m \in M$ maka $rM = 0$ atau $m = 0$. Misalkan $m = 0$ maka M merupakan modul prima. Misalkan $0 \neq m \in M$ dan $rRm = 0$, misalkan submodul $Rm \neq 0$, karena M modul sederhana maka $Rm = M$. Karena $rRm = 0$ maka $r \in AnnM$, sehingga M merupakan modul prima. □

Teorema 3.25. *[9] Misalkan K suatu lapangan dan $A = KA_n$, dengan graf A_n pada Gambar 1, untuk $n \geq 1$. Misalkan M modul tak terdekomposisi atas A, yang merupakan modul c-prima hanyalah modul sederhana M yang tak terdekomposisi.*

Gambar 4: Graf Dynkin tipe A_n

Selanjutnya, teorema berikut ini menjelaskan karakterisasi modul prima atas aljabar Nakayama tertentu.

Teorema 3.26. *Misalkan K suatu lapangan dan $A = KA_n$, dengan graf A_n seperti Gambar 1 dengan $n \geq 1$. Misalkan M modul tak terdekomposisi atas A, yang merupakan modul prima hanyalah modul sederhana M yang tak terdekomposisi.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 3.23 dan Teorema 3.25, jelas yang merupakan modul prima hanyalah modul sederhana M yang tak terdekomposisi. □

3.3. *Modul Herediter atas Aljabar Nakayama*

Pada bagian ini A menotasikan aljabar lintasan yang bersesuaian dengan graf E.

Definisi 3.27. *Aljabar A dikatakan herediter kanan jika setiap ideal kanan dari A adalah modul projektif sebagai A-modul.*

Aljabar herediter kiri didefinisikan sebagai dualnya. Berikut diberikan karakterisasi pertama dari aljabar herediter kanan.

Teorema 3.28. *Pernyataan berikut adalah ekivalen:*

(1) A adalah aljabar herediter kanan.
(2) Setiap submodul dari A-modul kanan projektif adalah projektif.
(3) Setiap submodul dari A-modul kanan projektif dibangun secara hingga adalah projektif.
(4) Radikal dari setiap A-modul kanan projektif dibangun secara hingga tak terdekomposisi adalah projektif.

Selanjutnya diberikan karakterisasi aljabar herediter dalam teorema berikut.

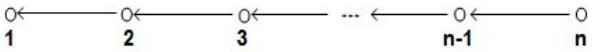
Teorema 3.29.

(1) Jika E graf hingga, terhubung dan asiklik, maka aljabar $A = KE$ adalah aljabar herediter dan $E_A = E$.
(2) Jika A aljabar basic, terhubung, herediter dan $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ himpunan lengkap idempoten primitif dari A, maka:
  (i) graf E_A dari A adalah hingga, terhubung dan asiklik.
  (ii) terdapat suatu isomorfisma K-aljabar $A \cong KQ$.

Definisi 3.30. *Misalkan R sebarang ring. Modul M atas R dikatakan herediter jika M dan semua submodulnya merupakan projektif.*

Selanjutnya akan ditentukan modul herediter atas aljabar Nakayama tertentu.

Teorema 3.31. *Misalkan E graf pada Gambar 5.*
Semua modul projektif atas aljabar Nakayama KE merupakan modul herediter.



Gambar 5

Bukti. Berdasarkan Teorema 3.23, aljabar lintasan KE (aljabar Nakayama) adalah aljabar herediter. Sehingga berdasarkan Definisi 3.30, dapat disimpulkan bahwa semua modul projektif atas KE merupakan modul herediter. □

Sebelum dilakukan penentuan modul herediter atas aljabar Nakayama dari graf siklus, diberikan notasi berikut. Misalkan M uniserial, dengan deret radikal $M =$

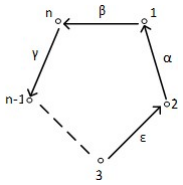
$M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_t = 0$ dengan $M_i/M_{i+1} \cong S(a_i)$ untuk suatu titik a_i di graf E, dan $0 \leq i \leq t$. Dengan menggunakan fakta bahwa modul uniserial ditentukan secara tunggal dengan deret komposisinya, modul M ditulis sebagai

$$M = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan modul herediter atas aljabar Nakayama dari graf siklus.

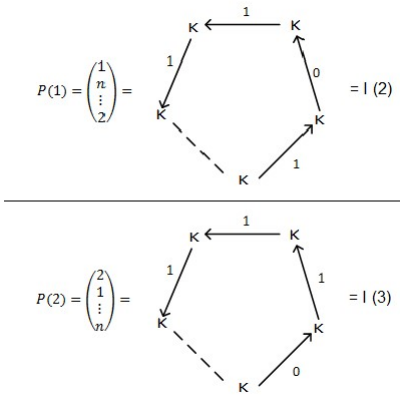
Teorema 3.32. *Misalkan A aljabar Nakayama self-injective. Semua modul projektif atas A bukan merupakan modul herediter.*

Bukti. Misalkan E graf pada Gambar 6

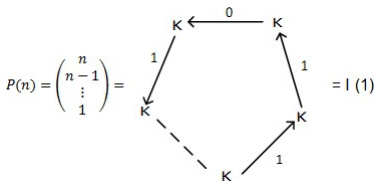


Gambar 6

dibatasi oleh $\alpha\beta\gamma\cdots\epsilon = 0$, $\cdots$, $\epsilon\alpha\beta\gamma\cdots = 0$. Aljabar lintasan $A = KE$ adalah aljabar Nakayama *self-injective*. Modul projektif tak terdekomposisi atas A diberikan oleh:



dan seterusnya sampai $P(1)$ memiliki submodul sederhana (2) yang bukan merupakan projektif, $P(2)$ memiliki submodul sederhana (3) yang bukan projektif, dan



seterusnya sampai $P(n)$ memiliki submodul sederhana (1) yang bukan projektif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semua modul projektif atas A bukan merupakan modul herediter. □

4. Kesimpulan

Dalam tulisan ini dikaji tentang modul prima dan modul herediter atas aljabar Nakayama tertentu. Modul prima atas aljabar Nakayama dari graf tipe A_n hanyalah modul sederhana, namun semua modul projektifnya merupakan modul herediter. Sedangkan untuk aljabar Nakayama *self-injective*, semua modul projektifnya bukan modul herediter.

Daftar Pustaka

[1] I.Assem, D.Simpson, A.Skowronski, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1, *London Mathematical Society Student Texts* **65**, Cambridge University Press, 2006.

[2] J. Dauns, *Modules and Rings*, Cambridge university press, (1994).

[3] Faisal, I. Muchtadi-Alamsyah, Characterization of Nakayama m-Cluster Tilted Algebra of Type An, *accepted in Journal of Indonesian Math. Soc.*

[4] Irawati (2004), Struktur Modul di Sekitar Modul Dibangun secara Hingga atas Gelanggang HNP dan Generalisasi Gelanggang HNP, *Disertasi*, Departemen Matematika ITB.

[5] Irawati, The generalization of HNP ring and finitely generated modules over HNP ring, *International Journal of Algebra* Vol **5** no 13 (2011), 611 – 626

[6] D. Kariman, I.M. Maris, Risnawita, Dual Right Serial Algebras, in *Advances in Algebraic Structures*, *Proceeding International Conference in Algebra*, World Scientific, 2012.

[7] I. Muchtadi-Alamsyah, Braid action on derived category of Nakayama algebras, *Communication in Algebra* Vol. **36** Issue 07 (2008) 2455 – 2569

[8] I. Muchtadi-Alamsyah, A.P. Santika, Invariance of p-regular subspace of some symmetric Nakayama algebras, *Proceeding of the 7th SEAMS-UGM Conf* 2015, 84 – 86

[9] Risnawita, I.Muchtadi-Alamsyah, Irawati, Primeness of simple modules over path algebras and Leavitt path algebras, *Khayyam Journal of Mathematics* (2021).

[10] K. Saleh, P.Astuti, I. Muchtadi-Alamsyah, On the structure of finitely generated primary modules, *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications* Vol **38** Issue 5 (2016), 519-533.

[11] A.P. Santika and I. Muchtadi-Alamsyah, The p-regular subspaces of symmetric

Nakayama algebras and algebras of dihedral and semi-dihedral type, *JP Journal of Algebra Number Theory and Applications* Vol **27** No 2 (2012), 131 – 142

[12] I.G.A.W. Wardhana, P. Astuti, I. Muchtadi-Alamsyah, On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain, *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, Vol **38** Issue 2 (2016), 121 – 128