Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **4** Hal. 1 – 9
ISSN : 2303–291X

KONVOLUSI DISTRIBUSI EKSPONENSIAL DENGAN PARAMETER BERBEDA

MARNISYAH ANAS
Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
marnisyahanass@yahoo.com

Abstrak. Penelitian ini membahas tentang konvolusi distribusi eksponensial. Dalam teori peluang, konvolusi adalah penjumlahan dari peubah-peubah acak. Konvolusi dari peubah acak berdistribusi eksponensial dengan parameter berbeda dapat ditentukan dengan memperlihatkan fungsi kepadatan peluang dari peubah acaknya.

Kata Kunci: Konvolusi, distribusi eksponensial

1. Pendahuluan

Distribusi eksponensial merupakan salah satu distribusi peluang kontinu yang menggunakan parameter β dan peubah acak X dengan fungsi kepadatan peluang (fkp) sebagai berikut

$$f_X(x;\beta) = \begin{cases} \beta \ \exp(-x\beta) \ , \text{ jika } 0 < x < \infty; \beta > 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad\ , \text{ jika } x \text{ lainnya.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Konvolusi adalah penjumlahan dari peubah-peubah acak bebas. Dengan menggunakan konvolusi dapat ditentukan distribusi baru dari penjumlahan peubah-peubah acak distribusi sebelumnya. Misalkan $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ adalah jumlah dari peubah acak X_i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$. Maka S_n memiliki fungsi distribusi eksponensial yang dapat ditentukan fungsi kepadatan peluangnya. Dengan adanya fungsi kepadatan peluang untuk masing-masing peubah acak eksponensial maka dapat diperoleh fungsi kepadatan peluang dari S_n. Dalam makalah ini akan dikaji konvolusi distribusi eksponensial dengan parameter berbeda.

2. Terminologi Konvolusi

Pada bagian ini akan diberikan beberapa teori yang menjelaskan tentang terminologi konvolusi

Teorema 2.1. [*2*] *Misalkan* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ *adalah suatu vektor dari peubah acak diskrit dengan fkp bersama* $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_k) > 0$ *pada himpunan A. Misalkan* $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_k(x)$ *adalah fungsi dari x sebanyak k, dan* $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ *didefinisikan oleh transformasi satu satu sebagai berikut*

$$Y_i = u_i(X_1, X_2, \cdots, X_k), \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{2.1}$$

maka fkp bersama dari $\mathbf{Y}$ *adalah*

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \cdots, y_k) = f_{\mathbf{X}}(x_1, \cdots, x_k). \tag{2.2}$$

dimana $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ *adalah solusi dari* $\mathbf{y} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Teorema 2.2. [4] *Misalkan* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ *adalah suatu vektor dari peubah acak kontinu dengan fkp bersama* $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_k) > 0$ *pada himpunan* A. *Misalkan* $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_k(x)$ *adalah fungsi dari* x *sebanyak* k, *dan* $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ *didefinisikan oleh transformasi satu satu sebagai berikut*

$$Y_i = u_i(X_1, X_2, \cdots, X_k), \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{2.3}$$

Jika Jacobian adalah kontinu dan taknol pada range transformasi, maka fkp bersama dari $\mathbf{Y}$ *adalah*

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \cdots, y_k) = f_{\mathbf{X}}(x_1, \cdots, x_k)|J|. \tag{2.4}$$

dimana $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ *adalah solusi dari* $y = u(x)$ *dan* $|J|$ *merupakan Jacobian dari transformasi* Y_i.

Untuk kasus kontinu, transformasi peubah acak kontinu dapat diperoleh dengan memperluas notasi Jacobian. Suatu transformasi dengan k peubah $y = u(x)$ dengan suatu penyelesaian tunggal $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ memiliki Jacobian yang merupakan matriks turunan parsial $k \times k$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_k}{\partial y_1} & \frac{\partial x_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_k}{\partial y_k} \end{vmatrix}.$$

Berikut ini akan diberikan definisi dan teorema dari konvolusi distribusi.

Definisi 2.3. [4] *Misalkan* X *dan* Y *adalah dua peubah acak saling bebas dengan fungsi distribusi masing-masing* $m_1(x)$ *dan* $m_2(x)$. *Maka konvolusi dari* $m_1(x)$ *dan* $m_2(x)$ *adalah fungsi distribusi* $m(x) = m_1(x) * m_2(x)$ *yang didefinisikan sebagai berikut*

$$m(j) = \Sigma_k m_1(k)\ m_2(j-k), \tag{2.5}$$

untuk $j = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2. \cdots$. *Fungsi* $m_3(x)$ *merupakan fungsi distribusi dari peubah acak* $Z = X + Y$.

Definisi 2.4. [4] *Misalkan* X *dan* Y *adalah dua peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang masing-masing adalah* $f(x)$ *dan* $g(x)$. *Asumsikan* $f(x)$ *dan* $g(x)$ *keduanya terdefinisi pada setiap bilangan riil. Maka konvolusi* $f * g$ *dari fungsi* f *dan* g *didefinisikan sebagai berikut*

$$\begin{aligned}(f * g)(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(z-x)f(x)dx.\end{aligned}$$

Teorema 2.5. [4] *Misalkan X dan Y adalah dua peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $f_X(x)$ dan $f_Y(y)$ terdefinisi untuk setiap x. Maka $Z = X + Y$ merupakan peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $f_Z(z)$, dimana f_Z merupakan konvolusi dari f_X dan f_Y.*

3. Konvolusi Distribusi Eksponensial dengan Parameter Berbeda

Pada bagian ini akan diberikan teorema tentang konvolusi distribusi eksponensial dengan menggunakan parameter berbeda yang merujuk pada referensi [1].

Teorema 3.1. *Misalkan terdapat n peubah acak yang saling bebas, yaitu X_i untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ sedemikian sehingga X_i mempunyai fungsi kepadatan peluang f_{X_i} yang didefinisikan sebagai berikut*

$$f_{X_i}(x_i) = \beta_i \ \exp(-x_i\beta_i), \tag{3.1}$$

untuk $0 < x_i < \infty$ dan $\beta_i > 0$. Maka penjumlahan peubah acak X_i yaitu $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f_{S_n}(s_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\beta_j - \beta_i)} \exp(-s_n\beta_i). \tag{3.2}$$

Bukti. Pembuktian teorema dilakukan menggunakan induksi matematika. Pertama-tama ditunjukkan bahwa persamaan (3.2) bernilai benar untuk kasus $n = 2$. Misalkan g adalah suatu fungsi kontinu pada garis bilangan real. Akan ditentukan

$$I_2(g) = E[g(x_1 + x_2)] = \int_0^\infty \int_0^\infty g(x_1 + x_2)\ \beta_1\ \beta_2\ e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}\ dx_1\ dx_2. \tag{3.3}$$

Dengan melakukan transformasi variabel pada persamaan (3.3), misalkan $x_i = y_i^2$ untuk $i = 1, 2$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} I_2(g) &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(y_1^2 + y_2^2)\ \beta_1\ \beta_2\ e^{-(\beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2)}\ dy_1^2\ dy_2^2 \\ &= 4\beta_1\beta_2 \int_0^\infty \int_0^\infty g(y_1^2 + y_2^2) e^{-(\beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2)}\ y_1\ y_2\ dy_1\ dy_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Selanjutnya gunakan koordinat polar $y_1 = r\sin\theta$ dan $y_2 = r\cos\theta$, dimana $0 \le r < \infty$ dan $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Sehingga persamaan (3.4) menjadi

$$\begin{aligned} I_2(g) &= 4\beta_1\beta_2 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta) \\ &\qquad e^{-(\beta_1\ r^2\sin^2\theta + \beta_2\ r^2\cos^2\theta)} r^2\ \sin\theta\ \cos\theta\ d(r\sin\theta)\ d(r\cos\theta), \\ &= 4\beta_1\beta_2 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)) \\ &\qquad e^{-r^2(\beta_1\ \sin^2\theta + \beta_2\ \cos^2\theta)} r^2\ \sin\theta\ \cos\theta\ d(r\sin\theta)\ d(r\cos\theta), \\ &= 4\beta_1\beta_2 \int_0^\infty g(r^2) r^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1\ \sin^2\theta + \beta_2\ \cos^2\theta)} \sin\theta\ \cos\theta\ d\theta\right] dr. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Selanjutnya untuk setiap bilangan r positif, dinotasikan

$$\begin{aligned} L_2(r) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 \ \sin^2\theta + \beta_2 \ \cos^2\theta)} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta, \\ &= e^{-r^2\beta_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 \ \sin^2\theta - \beta_2 \ \sin^2\theta)} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta, \\ &= e^{-r^2\beta_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)\sin^2\theta} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Perhatikan bahwa dengan menotasikan $u = -r^2(\beta_1 - \beta_2)\sin^2\theta$ pada persamaan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)\sin^2\theta} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta, \tag{3.7}$$

maka dapat dituliskan persamaan (3.7) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)\sin^2\theta} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u \sin\theta \ \cos\theta \frac{du}{-2r^2(\beta_1-\beta_2)\sin\theta \ \cos\theta} \\ &= \frac{1}{-2r^2(\beta_1-\beta_2)} e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)\sin^2\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1-e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)}}{2r^2(\beta_1-\beta_2)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Selanjutnya dengan mensubsitusi persamaan (3.8) ke persamaan (3.6) diperoleh

$$\begin{aligned} L_2(r) &= e^{-r^2\beta_2}\left(\frac{1-e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)}}{2r^2(\beta_1-\beta_2)}\right) \\ &= \left(\frac{e^{-r^2\beta_2} - e^{-r^2\beta_1}}{2r^2(\beta_1-\beta_2)}\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.9) ke persamaan (3.5) diperoleh

$$\begin{aligned} I_2(g) &= 4\beta_1\beta_2 \int_0^\infty g(r^2)r^3 \left(\frac{e^{-r^2\beta_2} - e^{-r^2\beta_1}}{2r^2(\beta_1-\beta_2)}\right) dr, \\ &= \frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1-\beta_2} \int_0^\infty g(r^2)(e^{-r^2\beta_2} - e^{-r^2\beta_1}) r dr. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Selanjutnya dilakukan transformasi variabel pada persamaan (3.10), yaitu dengan memisalkan $r^2 = s_2$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} I_2(g) &= \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1-\beta_2} \int_0^\infty g(s_2)(e^{-s_2\beta_2} - e^{-s_2\beta_1}) ds_2, \\ &= \int_0^\infty g(s_2)\left[\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1} e^{-s_2\beta_1} - e^{-s_2\beta_2}\right] ds_2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Berdasarkan persamaan (3.11), untuk setiap fungsi g kontinu dan berada pada $\mathbb{R}$, setiap peubah acak S_2 mempunyai fungsi kepadatan peluang f_{S_2}, yang diberikan untuk setiap bilangan real s_2 positif, yaitu

$$f_{S_2}(s_2) = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}(e^{-s_2\beta_1} - e^{-s_2\beta_2}).$$

Hal ini dikarenakan

$$\int_0^\infty f_{S_2}(s_2)ds_2 = \int_0^\infty \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}(e^{-s_2\beta_1} - e^{-s_2\beta_2})ds_2 = 1.$$

Berdasarkan [3], sifat fungsi kepadatan peluang dari suatu peubah acak kontinu adalah

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 1,$$

sehingga formula diatas berlaku untuk $n = 2$.

Langkah selanjutnya adalah menunjukkan bahwa persamaan (3.2) bernilai benar untuk $n = 3$. Misalkan g adalah suatu fungsi kontinu pada garis bilangan real, dengan $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ atau dapat ditulis $S_3 = S_2 + X_3$. Akan ditentukan

$$I_3(g) = E[g(s_2+x_3)] = \int_0^\infty \int_0^\infty g(s_2+x_2)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\beta_3(e^{-s_2\beta_1} - e^{-s_2\beta_2})e^{-\beta_3 x_3}\, ds_2\, dx_3. \tag{3.12}$$

Dengan melakukan transformasi variabel pada persamaan (3.12), misalkan $s_2 = y_1^2$ dan $x_3 = y_2^2$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} I_3(g) &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(y_1^2+y_2^2)\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\left(e^{-(\beta_1 y_1^2+\beta_3 y_2^2)} - e^{-(\beta_2 y_1^2+\beta_3 y_2^2)}\right)\, dy_1^2\, dy_2^2, \\ &= 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty \int_0^\infty g(y_1^2+y_2^2)\left(e^{-(\beta_1 y_1^2+\beta_3 y_2^2)} - e^{-(\beta_2 y_1^2+\beta_3 y_2^2)}\right) y_1\; y_2\; dy_1\; dy_2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Selanjutnya gunakan koordinat polar $y_1 = r\sin\theta$ dan $y_2 = r\cos\theta$, dimana $0 \le r < \infty$ dan $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Substitusikan y_1 dan y_2 ke persamaan (3.13) sehingga persamaan menjadi

$$\begin{aligned} I_3(g) &= 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta) \\ &\quad \left(e^{-(\beta_1 r^2\sin^2\theta+\beta_3 r^2\cos^2\theta)} - e^{-(\beta_2 r^2\sin^2\theta+\beta_3 r^2\cos^2\theta)}\right) r^2\; \sin\theta\; \cos\theta\; d(r\sin\theta)\; d(r\cos\theta), \\ &= 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r^2)e^{-r^2(\beta_1\sin^2\theta+\beta_3\cos^2\theta)}r^2\; \sin\theta\; \cos\theta\; d(r\sin\theta)\; d(r\cos\theta), \\ &\quad - 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r^2)e^{-r^2(\beta_2\sin^2\theta+\beta_3\cos^2\theta)}r^2\; \sin\theta\; \cos\theta\; d(r\sin\theta)\; d(r\cos\theta), \\ &= 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty g(r^2)r^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1\sin^2\theta+\beta_3\cos^2\theta)}\sin\theta\; \cos\theta\; d\theta\right] dr \\ &\quad - 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty g(r^2)r^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_2\sin^2\theta+\beta_3\cos^2\theta)}\sin\theta\; \cos\theta\; d\theta\right] dr. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Selanjutnya untuk setiap bilangan r positif, dinotasikan

$$\begin{aligned} L_3(r_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 \sin^2\theta + \beta_3 \cos^2\theta)} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta, \\ &= e^{-r^2\beta_3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 \sin^2\theta - \beta_3 \sin^2\theta)} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta, \\ &= e^{-r^2\beta_3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 - \beta_3)\sin^2\theta} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Perhatikan bahwa dengan menotasikan $u = -r^2(\beta_1 - \beta_3)\sin^2\theta$ pada persamaan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 - \beta_3)\sin^2\theta} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta, \tag{3.16}$$

maka persamaan (3.16) menjadi

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 - \beta_3)\sin^2\theta} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{u} \sin\theta \ \cos\theta \frac{du}{-2r^2(\beta_1 - \beta_3)\sin\theta \ \cos\theta}, \\ &= \frac{1}{-2r^2(\beta_1 - \beta_3)} e^{-r^2(\beta_1 - \beta_3)\sin^2\theta} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}, \\ &= \frac{1 - e^{-r^2(\beta_1 - \beta_3)}}{2r^2(\beta_1 - \beta_3)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Selanjutnya dengan mensubsitusi persamaan (3.17) ke persamaan (3.15) maka persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned} L_3(r_1) &= e^{-r^2\beta_3} \left(\frac{1 - e^{-r^2(\beta_1 - \beta_3)}}{2r^2(\beta_1 - \beta_3)} \right), \\ &= \frac{e^{-r^2\beta_3} - e^{-r^2\beta_1}}{2r^2(\beta_1 - \beta_3)}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Selanjutnya, notasikan $L_3(r_2)$ seperti pada persamaan (3.15) sehingga $L_3(r_2)$ dapat dituliskan sebagai berikut,

$$L_3(r_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_2 \sin^2\theta + \beta_3 \cos^2\theta)} \sin\theta \ \cos\theta \ d\theta. \tag{3.19}$$

Dengan langkah yang sama seperti pada persamaan (3.15) maka persamaan (3.19) dapat dituliskan sebagai

$$L_3(r_2) = \frac{e^{-r^2\beta_3} - e^{-r^2\beta_2}}{2r^2(\beta_2 - \beta_3)}. \tag{3.20}$$

Berdasarkan persamaan (3.18) dan persamaan (3.20), maka persamaan (3.14) menjadi

$$\begin{aligned}
I_3(g) &= 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty g(r^2)r^3\left(\frac{e^{-r^2\beta_3}-e^{-r^2\beta_1}}{2r^2(\beta_1-\beta_3)}\right)dr \\
&\quad - 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty g(r^2)r^3\left(\frac{e^{-r^2\beta_3}-e^{-r^2\beta_2}}{2r^2(\beta_2-\beta_3)}\right)dr, \\
&= 2\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_1-\beta_3)}\int_0^\infty g(r^2)(e^{-r^2\beta_3}-e^{-r^2\beta_1})rdr \\
&\quad - 2\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_2-\beta_3)}\int_0^\infty g(r^2)(e^{-r^2\beta_3}-e^{-r^2\beta_2})rdr. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan transformasi variabel dengan memisalkan $r^2 = s_3$ dan subsitusikan kedalam persamaan (3.21) diatas, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
I_3(g) &= \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_1-\beta_3)}\int_0^\infty g(s_3)\left(e^{-s_3\beta_3}-e^{-s_3\beta_1}\right)ds_3 \\
&\quad - \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_2-\beta_3)}\int_0^\infty g(s_3)\left(e^{-s_3\beta_3}-e^{-s_3\beta_2}\right)ds_3, \\
&= \int_0^\infty g(s_3)\left[\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)}(e^{-s_3\beta_1}-e^{-s_3\beta_3})\right] \\
&\quad - \left[\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)}(e^{-s_3\beta_2}-e^{-s_3\beta_3})\right]ds_3. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.23), maka untuk setiap fungsi g kontinu dan berada pada $\mathbb{R}$, terlihat bahwa peubah acak S_3 mempunyai fungsi kepadatan peluang f_{S_3}, yang diberikan untuk setiap bilangan real s_3 positif, yaitu

$$f_{S_3}(s_3) = \left[\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)}(e^{-s_3\beta_1}-e^{-s_3\beta_3})\right] - \left[\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)}(e^{-s_3\beta_2}-e^{-s_3\beta_3})\right]. \qquad (3.23)$$

Karena $\frac{\beta_1\beta_3}{(\beta_3-\beta_1)}\left(e^{-s\beta_1}-e^{-s\beta_3}\right)$ merupakan konvolusi dari $f_{X_1} * f_{X_3}$ dan $\frac{\beta_2\beta_3}{(\beta_3-\beta_2)}\left(e^{-s\beta_2}-e^{-s\beta_3}\right)$ merupakan konvolusi dari $f_{X_2} * f_{X_3}$ maka fungsi kepadatan peluang f_{S_3} dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}
f_{S_3} &= \left[\frac{\beta_2}{(\beta_2-\beta_1)}f_{X_1} * f_{X_3}\right] - \left[\frac{\beta_1}{(\beta_2-\beta_1)}f_{X_2} * f_{X_3}\right] \\
&= \prod_{j=1,j\neq i}^{2}\frac{\beta_j}{(\beta_j-\beta_1)}f_{X_1} * f_{X_3} + \prod_{j=1,j\neq i}^{2}\frac{\beta_j}{(\beta_j-\beta_2)}f_{X_2} * f_{X_3} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\prod_{j=1,j\neq i}^{2}\frac{\beta_j}{(\beta_j-\beta_i)}f_{X_i} * f_{X_3}.
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya, asumsikan bahwa persamaan (3.2) bernilai benar untuk $n = k$. Akan ditunjukkan bahwa persamaan (3.2) juga benar untuk $n = k + 1$.

Misal $X_1, \cdots, X_k, X_{k+1}$ adalah $k+1$ peubah acak yang mana, dimana X_i dengan $i = 1, \cdots, k+1$ memiliki fungsi kepadatan peluang f_{X_i} yang berdistribusi eksponensial, sedemikian sehingga

$$f_{X_i}(x_i) = \beta_i \ \exp(-x_i\beta_i).$$

Diasumsikan bahwa S_k dan X_{k+1} saling bebas, dengan $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$. Diperoleh bahwa S_{k+1} mempunyai fungsi kepadatan peluang $f_{S_{k+1}}$ untuk setiap $s \in \mathbb{R}^+$ dengan konvolusi

$$f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) = f_{S_k} * f_{X_{k+1}}(s_{k+1}),$$

atau dapat juga ditulis sebagai berikut

$$f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{\beta_j}{(\beta_j - \beta_i)} f_{X_i} * f_{X_{k+1}}(s_{k+1}). \tag{3.24}$$

Pada kasus $n = 2$ seperti persamaan (3.11) telah dibuktikan bahwa

$$f_{X_i} * f_{X_{k+1}}(s_{k+1}) = \frac{\beta_i\beta_{k+1}}{\beta_{k+1} - \beta_i}(e^{-s_{k+1}\beta_i} - e^{-s_{k+1}\beta_{k+1}}). \tag{3.25}$$

Berdasarkan persamaan (3.25) diatas, maka persamaan (3.24) dapat dituliskan seperti berikut

$$\begin{aligned}
f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{\beta_j}{(\beta_j - \beta_i)} \left[\frac{\beta_i\beta_{k+1}}{\beta_{k+1} - \beta_i}(e^{-s_{k+1}\beta_i} - e^{-s_{k+1}\beta_{k+1}}) \right], \\
&= \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{\beta_j}{(\beta_j - \beta_i)} \left[\frac{\beta_i\beta_{k+1}}{\beta_{k+1} - \beta_i} e^{-s_{k+1}\beta_i} - \frac{\beta_i\beta_{k+1}}{\beta_{k+1} - \beta_i} e^{-s_{k+1}\beta_{k+1}} \right], \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k+1}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{k+1}(\beta_j - \beta_i)} e^{-s_{k+1}\beta_i} \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(\beta_i - \beta_{k+1}) \prod_{j=1, j\neq i}^{k+1}(\beta_j - \beta_i)} \right] \beta_1\beta_2\cdots\beta_{k+1} e^{-s_{k+1}\beta_i}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Selanjutnya, substitusikan

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{k}(\beta_j - \beta_{k+1})} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(\beta_i - \beta_{k+1}) \prod_{j=1, j\neq 1}^{k}(\beta_j - \beta_i)}.$$

ke persamaan (3.26), sehingga fungsi kepadatan peluang $f_{S_{k+1}}$ menjadi

$$\begin{aligned}
f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k+1}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{k+1}(\beta_j - \beta_i)} e^{-s_{k+1}\beta_i} \\
&\quad + \frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1}(\beta_j - \beta_{k+1})} \beta_1\beta_2\cdots\beta_{k+1} e^{-s_{k+1}\beta_i}, \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k+1}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{k+1}(\beta_j - \beta_i)} \exp(-s_{k+1}\beta_i),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

untuk setiap $s_{k+1} \in \mathbb{R}^+$.

Berdasarkan persamaan (3.27), maka persamaan (3.2) terbukti benar untuk $n = k + 1$. $\square$

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Maiyastri, Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Dr. Muhafzan, Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Dr. Lyra Yulianti, dan Ibu Dr. Ferra Yanuar yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Akkouchi, M., 2008, On The Convolution of Eksponensial Distributions. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society* **21** No. 4

[2] Bain, L. J. dan Engelhardt, M., 1992, **Introduction to Probability and Mathematical Statistics**, 2^{th} ed., Duxbury Press, California

[3] Casella, G dan Berger, R. L., 1990, **Statistical Inference**, 1^{st} ed., Pasific Grove, California

[4] Gnedenko, B. V. dan Kolmogorov, A. N., 1968, **Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables**. 2^{nd} ed., Addison-Wesley, London