

BATAS ATAS *RAINBOW CONNECTION NUMBER* PADA GRAF *BUCKMINSTERFULLERENE*

FITRI ANGGALIA*, LYRA YULIANTI, DES WELYYANTI

*Program Studi S2 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163, Indonesia
email: fitri.anggalia@gmail.com, lyra@sci.unand.ac.id, wely@sci.unand.ac.id*

Diterima 11 Januari 2022 Direvisi 2 Maret 2022 Dipublikasikan 7 April 2022

Abstrak. Misalkan G adalah suatu graf terhubung tak trivial. Suatu pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$ pada graf G adalah suatu pewarnaan sisi di G sedemikian sehingga setiap sisi bertetangga boleh berwarna sama. Misalkan terdapat dua titik sebarang $u, v \in V(G)$ dan P adalah suatu lintasan dari u ke v . Suatu lintasan P dikatakan lintasan *rainbow* jika tidak terdapat dua sisi di P yang berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* terhadap suatu pewarnaan c jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ terdapat lintasan *rainbow* dari u ke v . Jika pewarnaan c tersebut menggunakan k warna, maka c dinamakan pewarnaan- k *rainbow*. *Rainbow connection number* dari suatu graf terhubung G , dinotasikan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected*. Dalam makalah ini akan ditentukan batas atas *rainbow connection number* untuk graf *Buckminsterfullerene*.

Kata Kunci: Graf *Buckminsterfullerene*, *Rainbow connection number*

1. Pendahuluan

Misalkan terdapat suatu graf terhubung tak trivial G . Suatu pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$ merupakan suatu pewarnaan sisi di G sedemikian sehingga setiap sisi yang bertetangga boleh diwarnai sama. Misalkan terdapat dua titik sebarang $u, v \in V(G)$ dan P adalah suatu lintasan di antara u dan v . Lintasan P dikatakan sebagai suatu lintasan *rainbow* jika tidak terdapat dua sisi di P yang berwarna sama. Graf G didefinisikan sebagai *rainbow connected* terhadap suatu pewarnaan c jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ terdapat lintasan *rainbow* di antara u dan v . Jika pewarnaan c tersebut menggunakan k warna, maka c dinamakan pewarnaan- k *rainbow*. *Rainbow connection number* dari graf terhubung G , dinotasikan dengan $rc(G)$, adalah banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected* [4].

Selanjutnya, misalkan terdapat dua titik sebarang $u, v \in V(G)$ dan Q adalah suatu lintasan di antara u dan v . Lintasan Q dikatakan sebagai lintasan *geodesic*

*penulis korespondensi

jika panjang lintasan tersebut bernilai sama dengan $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak di antara kedua titik tersebut. Graf G didefinisikan sebagai *strongly rainbow connected* terhadap suatu pewarnaan c jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ terdapat lintasan *rainbow geodesic* di antara u dan v . Jika pewarnaan c tersebut menggunakan k warna, maka c dinamakan pewarnaan- k *strong rainbow*. *Strong rainbow connection number* dari graf terhubung G , dinotasikan dengan $src(G)$, adalah banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *strongly rainbow connected* [4].

Pada [7] diperoleh bilangan *rainbow connection* dari graf kipas dan graf matahari. Pada [5] diberikan daftar hasil yang diperoleh para peneliti sebelumnya terkait bilangan *rainbow connection* untuk beberapa graf. Selanjutnya, pada [2] diperoleh batas atas bilangan *rainbow connection* dari graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ untuk $n \geq 3$. Hasil lainnya adalah [6] yang memperoleh bilangan *rainbow connection* dari graf kubik $C_{n,2n,n}$ untuk $n \geq 3$. Dalam makalah ini akan ditentukan batas atas *rainbow connection number* untuk salah satu bentuk graf kubik lainnya, yaitu graf *Buckminsterfullerene*.

Fullerene adalah molekul polihedral yang terbentuk dari atom karbon yang dapat direpresentasikan menjadi sebuah graf, dengan atom sebagai titik dan ikatan antar atom sebagai sisi. Graf *Fullerene* merupakan suatu graf planar 3-reguler terhubung yang memuat pentagon C_5 dan heksagon C_6 . Graf *Fullerene* dengan banyak titik genap telah didefinisikan oleh Grunbaum dan Motzkin, di antaranya adalah graf *Dodecahedral* dengan banyak titik $n = 20$, graf Petersen umum dengan $n = 24$, dan graf *Buckminsterfullerene* dengan $n = 60$ [1]. Graf *Buckminsterfullerene* adalah salah satu graf *Fullerene* yang berbentuk tabung (*nanotube*) dengan banyak titik $n = 60$. Definisi dan ilustrasi graf *Buckminsterfullerene* B_{60} dikutip dari [1].

2. Landasan Teori

Hubungan $diam(G)$, $rc(G)$, $src(G)$ dan banyak sisi m pada suatu graf terhubung G diberikan pada Proposisi 2.1. Definisi dan notasi lainnya dalam teori graf yang digunakan dalam makalah ini dikutip dari [3].

Proposisi 2.1. [4] Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial berukuran m . Jika $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$ merupakan rainbow coloring, maka

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

Pada Teorema 2.2 diberikan karakterisasi suatu graf G yang berukuran m yang mempunyai bilangan *rainbow connection* dan bilangan *strong rainbow connection* $rc(G)$ dan $src(G)$ tertentu, yaitu 1, 2, dan m .

Teorema 2.2. [2] Misalkan G adalah suatu graf terhubung tak trivial berukuran m , maka:

- (1) $rc(G) = src(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap;
- (2) $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$;
- (3) $rc(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon.

Salah satu graf yang telah ditentukan bilangan *rainbow* dan *strong rainbow connection*-nya adalah graf siklus C_n untuk $n \geq 3$. Pada Teorema 2.3 diberikan $rc(C_n)$ dan $src(C_n)$ untuk $n \geq 3$.

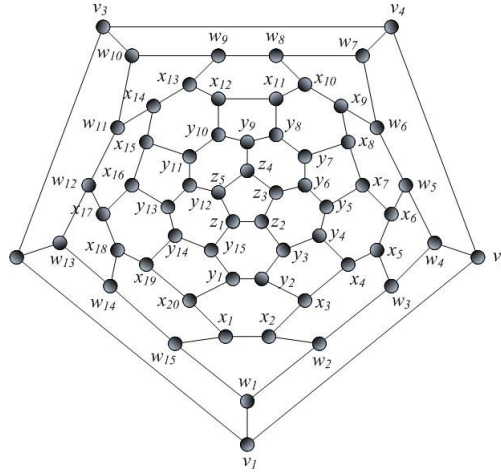
Teorema 2.3. [2] Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan banyak titik n , maka $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ untuk $n \geq 3$.

3. Batas Atas Rainbow Connection Number Graf Buckminsterfullerene

Definisi graf Buckminsterfullerene dikutip dari [1]. Himpunan titik dan sisi graf Buckminsterfullerene B_{60} adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(B_{60}) &= \{v_i, z_i | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w_j, y_j | 1 \leq j \leq 15\} \cup \{x_k | 1 \leq k \leq 20\}, \\ E(B_{60}) &= \{v_l v_{l+1}, z_l z_{l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \cup \{w_s w_{s+1}, y_s y_{s+1} | 1 \leq s \leq 14\} \cup \{x_t x_{t+1} | 1 \leq t \leq 19\} \\ &\quad \cup \{v_1 v_5, z_1 z_5, w_1 w_{15}, y_1 y_{15}, x_1 x_{20}\} \cup \{E_1, E_2, E_3, E_4\}, \text{ dimana} \\ E_1 &= \{z_1 y_2, z_2 y_5, z_4 y_{11}, z_5 y_{14}, v_3 w_{11}\}, \\ E_2 &= \{y_1 x_{19}, y_3 x_{18}, y_4 x_{15}, y_6 x_{14}, y_7 x_{11}, y_9 x_{10}, y_{10} x_7, y_{12} x_6, y_{13} x_3, y_{15} x_2\}, \\ E_3 &= \{x_1 w_4, x_4 w_3, x_5 w_1, x_8 w_{15}, x_9 w_{13}, x_{12} w_{12}, x_{13} w_{10}, x_{16} w_9, x_{17} w_7, x_{20} w_6\}, \\ E_4 &= \{v_1 w_5, v_2 w_8, v_4 w_{14}, v_5 w_2, z_3 y_8\}. \end{aligned}$$

Pada Gambar 1 diberikan ilustrasi graf Buckminsterfullerene B_{60} .



Gambar 1. [1] Graf Buckminsterfullerene

Pada Teorema 3.1 diberikan batas atas dari bilangan *rainbow connection number* untuk graf Buckminsterfullerene B_{60} . Batas atas tersebut diperoleh dengan mengkonstruksi suatu pewarnaan terhadap sisi-sisi graf B_{60} sedemikian sehingga selalu terdapat lintasan *rainbow* di antara setiap dua titik di graf tersebut.

Teorema 3.1. Misalkan terdapat graf *Buckminsterfullerene* B_{60} maka

$$rc(B_{60}) \leq 12.$$

Bukti. Didefinisikan pewarnaan sisi terhadap graf B_{60} sebagai berikut.

$$c(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } i = 1, \\ 2, & \text{untuk } i = 2, 4, \\ 5, & \text{untuk } i = 3. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$c(v_1 v_5) = 10, \quad (3.2)$$

$$c(w_j w_{j+1}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq 3, 6 \leq j \leq 8, \\ 5, & \text{untuk } j = 4, 12, \\ 4, & \text{untuk } j = 5, 13, \\ j - p - 1, & \text{untuk } 9 \leq j \leq 11, 14. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$c(w_1 w_{15}) = 9, \quad (3.4)$$

$$c(x_k x_{k+1}) = \begin{cases} k, & \text{untuk } 1 \leq k \leq 10, \\ k - 10, & \text{untuk } 11 \leq k \leq 19. \end{cases} \quad (3.5)$$

$$c(x_1 x_{20}) = 10, \quad (3.6)$$

$$c(y_l y_{l+1}) = \begin{cases} l, & \text{untuk } 1 \leq l \leq 8, \\ l - 8, & \text{untuk } 9 \leq l \leq 14. \end{cases} \quad (3.7)$$

$$c(y_1 y_{15}) = 7, \quad (3.8)$$

$$c(z_m z_{m+1}) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } m = 1, 3, \\ 7, & \text{untuk } m = 2, 4. \end{cases} \quad (3.9)$$

$$c(v_1 v_5) = 8, \quad (3.10)$$

$$c(e_1) = 10, \quad e_1 \in E_1,$$

$$c(e_2) = 12, \quad e_2 \in E_2,$$

$$c(e_3) = 11, \quad e_3 \in E_3,$$

$$c(e_4) = 9, \quad e_4 \in E_4.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa selalu terdapat suatu lintasan *rainbow* di antara sebarang dua titik a dan b di graf *Buckminsterfullerene* B_{60} .

Kasus 1.

- (a) Misalkan $a = v_p$ dan $b = v_q$, untuk $1 \leq p, q \leq 5$.
Berdasarkan persamaan (3.1) dan persamaan (3.2) jelas bahwa selalu terdapat lintasan *rainbow* di antara kedua titik tersebut.
- (b) Misalkan $a = w_r$ dan $b = w_s$, untuk $1 \leq r, s \leq 15$.
Berdasarkan persamaan (3.3) dan persamaan (3.4) jelas bahwa selalu terdapat lintasan *rainbow* di antara kedua titik tersebut.
- (c) Misalkan $a = z_t$ dan $b = z_u$, untuk $1 \leq t, u \leq 20$.
Berdasarkan persamaan (3.5) dan persamaan (3.6) jelas bahwa selalu terdapat lintasan *rainbow* di antara kedua titik tersebut.
- (d) Misalkan $a = y_r$ dan $b = y_s$, untuk $1 \leq r, s \leq 15$.
Berdasarkan persamaan (3.7) dan persamaan (3.8) jelas bahwa selalu terdapat lintasan *rainbow* di antara kedua titik tersebut.

- (e) Misalkan $a = z_p$ dan $b = z_q$, untuk $1 \leq p, q \leq 5$.
Berdasarkan persamaan (3.9) dan persamaan (3.10) jelas bahwa selalu terdapat lintasan *rainbow* di antara kedua titik tersebut.

Kasus 2. Misalkan $a = v_i$ dan $b = w_j$, atau $a = z_i$ dan $b = y_j$, untuk $1 \leq i \leq 5$ dan $1 \leq j \leq 15$.

- (a) Misalkan $a = v_i$ dan $b = w_j$, untuk $1 \leq i \leq 5$ dan $1 \leq j \leq 15$.
Lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan titik v_i ke titik w_j adalah:
- (i) Jika v_i bertetangga dengan w_j , maka lintasannya adalah $v_i w_j$.
 - (ii) Misalkan v_i bertetangga dengan w_c dimana $c \neq j$, maka lintasannya adalah $v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_j$ atau $v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_j$.
 - (iii) Misalkan terdapat titik w_d yang bertetangga dengan w_j dimana $d \neq i$, maka lintasannya adalah $v_i, v_{i+1}, \dots, v_d, w_j$ atau $v_i, v_{i-1}, \dots, v_d, w_j$.
- (b) Misalkan $a = z_i$ dan $b = y_j$, untuk $1 \leq i \leq 5$ dan $1 \leq j \leq 15$.
Pembuktian dilakukan dengan cara similar dengan Kasus 2(a).

Kasus 3. Misalkan $a = w_j$ dan $b = x_k$ atau $a = y_j$ dan $b = x_k$, untuk $1 \leq k \leq 20$ dan $1 \leq j \leq 15$.

- (a) Misalkan $a = w_j$ dan $b = x_k$, untuk $1 \leq k \leq 20$ dan $1 \leq j \leq 15$.
Lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan w_j dan x_k adalah
- (i) Jika w_j bertetangga dengan x_k maka lintasannya adalah w_j, x_k .
 - (ii) Misalkan w_j bertetangga dengan x_c dimana $c \neq k$, maka lintasannya adalah $w_j, x_c, x_{c+1}, \dots, x_k$ atau $w_j, x_c, x_{c-1}, \dots, x_k$.
 - (iii) Misalkan terdapat titik w_d yang bertetangga dengan x_k , dimana $d \neq j$, maka lintasannya adalah $w_j, w_{j+1}, \dots, w_d, x_k$ atau $w_j, w_{j-1}, \dots, w_d, x_k$.
 - (iv) Misalkan terdapat titik w_d bertetangga dengan x_c , dimana $d \neq l$ dan $c \neq k$, maka lintasannya adalah
 $w_l, w_{l+1}, \dots, w_d, x_c, x_{c+1}, \dots, x_k$, atau $w_l, w_{l+1}, \dots, w_d, x_c, x_{c-1}, \dots, x_k$,
atau $w_l, w_{l-1}, \dots, w_d, x_c, x_{c+1}, \dots, x_k$, atau $w_l, w_{l-1}, \dots, w_d, x_c, x_{c-1}, \dots, x_k$.
- (v) Jika $a = w_{11}$ dan $b = x_3$, maka lintasannya adalah
 $w_{11}, v_3, v_4, v_5, w_2, w_1, x_5, x_4, x_3$.

- (b) Misalkan $a = y_j$ dan $b = x_k$, untuk $1 \leq k \leq 20$ dan $1 \leq j \leq 15$.
Pembuktian dilakukan dengan cara similar dengan Kasus 3(a).

Kasus 4. Misalkan $a = v_i$ dan $b = x_k$, atau $a = z_i$ dan $b = x_k$, untuk $1 \leq i \leq 5$ dan $1 \leq k \leq 20$.

- (a) Misalkan $a = v_i$ dan $b = x_k$, untuk $1 \leq k \leq 20$ dan $1 \leq i \leq 5$.
Lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan titik v_i ke titik x_k adalah
- (i) Jika v_i bertetangga dengan w_c , dan w_d bertetangga dengan x_k , dimana $c \neq d$, maka lintasannya adalah
 $v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_k$ atau $v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_k$.

- (ii) Misalkan titik v_i bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_g , dimana $c \neq d$, dan $g \neq k$. Maka lintasannya adalah

$$v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k \text{ atau } v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k,$$

$$\text{atau } v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k \text{ atau } v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k.$$

- (iii) Misalkan terdapat titik v_e yang bertetangga dengan w_c , w_d yang bertetangga dengan x_k , dimana $e \neq i$, $c \neq d$. Maka lintasannya adalah

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_k \text{ atau } v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_k,$$

$$\text{atau } v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_k \text{ atau } v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_k.$$

- (iv) Misalkan terdapat titik v_e yang bertetangga dengan w_c , dan titik w_d yang bertetangga dengan x_g , dimana $e \neq i$, $c \neq d$, $g \neq k$. Maka lintasannya adalah

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k, \text{ atau}$$

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k, \text{ atau}$$

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k, \text{ atau}$$

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k, \text{ atau}$$

$$v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k, \text{ atau}$$

$$v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k, \text{ atau}$$

$$v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k, \text{ atau}$$

$$v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k.$$

- (b) Misalkan $a = z_i$ dan $b = x_k$, untuk $1 \leq k \leq 20$ dan $1 \leq i \leq 5$.

Pembuktian kasus ini similar dengan pembuktian Kasus 4(a).

Kasus 5. Misalkan $a = w_j$ dan $b = y_l$, untuk $1 \leq j \leq 15$.

Lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan titik w_j ke titik y_l adalah

- (i) Misalkan titik w_j bertetangga dengan x_c , x_d bertetangga dengan y_l , dimana $c \neq d$. Maka lintasannya adalah

$$w_j, x_c, x_{c+1}, \dots, x_d, y_l \text{ atau } w_j, x_c, x_{c-1}, \dots, x_d, y_l.$$

- (ii) Misalkan terdapat titik w_j yang bertetangga dengan x_c , dan x_d bertetangga dengan y_g , dimana $c \neq d$, $g \neq l$. Maka lintasannya adalah

$$w_j, x_c, x_{c+1}, \dots, x_d, y_g, x_{g+1}, \dots, y_l, \text{ atau } w_j, x_c, x_{c+1}, \dots, x_d, y_g, x_{g-1}, \dots, y_l,$$

$$\text{atau } w_j, x_c, x_{c-1}, \dots, x_d, y_g, x_{g+1}, \dots, y_l, \text{ atau } [w_j, x_c, x_{c-1}, \dots, x_d, y_g, x_{g-1}, \dots, y_l.$$

- (iii) Misalkan terdapat titik w_e yang bertetangga dengan x_c , x_d bertetangga dengan y_l , dimana $e \neq j$, $c \neq d$. Maka lintasannya adalah

$$w_j, w_{i+1}, \dots, w_e, x_c, x_{c+1}, \dots, x_d, y_l, \text{ atau } w_j, w_{i+1}, \dots, w_e, x_c, x_{c-1}, \dots, x_d, y_l,$$

$$\text{atau } w_j, w_{i-1}, \dots, w_e, x_c, x_{c+1}, \dots, x_d, y_l \text{ atau } w_j, w_{i-1}, \dots, w_e, x_c, x_{c-1}, \dots, x_d, y_l.$$

- (iv) Misalkan terdapat titik w_e yang bertetangga dengan x_c , x_d bertetangga dengan y_g , dimana $e \neq j$, $c \neq j$, $g \neq l$. Maka lintasannya adalah

$$w_j, w_{i+1}, \dots, w_e, x_c, x_{c+1}, \dots, x_d, y_g, x_{g+1}, \dots, y_l \text{ atau}$$

$$w_j, w_{i+1}, \dots, w_e, x_c, x_{c+1}, \dots, x_d, y_g, x_{g-1}, \dots, y_l \text{ atau}$$

$$w_j, w_{i+1}, \dots, w_e, x_c, x_{c-1}, \dots, x_d, y_g, x_{g+1}, \dots, y_l \text{ atau}$$

$$w_j, w_{i+1}, \dots, w_e, x_c, x_{c-1}, \dots, x_d, y_g, x_{g-1}, \dots, y_l \text{ atau}$$

$$w_j, w_{i-1}, \dots, w_e, x_c, x_{c+1}, \dots, x_d, y_g, x_{g+1}, \dots, y_l \text{ atau}$$

$$w_j, w_{i-1}, \dots, w_e, x_c, x_{c+1}, \dots, x_d, y_g, x_{g-1}, \dots, y_l \text{ atau}$$

$$w_j, w_{i-1}, \dots, w_e, x_c, x_{c-1}, \dots, x_d, y_g, x_{g+1}, \dots, y_l \text{ atau}$$

$$w_j, w_{i-1}, \dots, w_e, x_c, x_{c-1}, \dots, x_d, y_g, x_{g-1}, \dots, y_l.$$

- (v) Jika $a = w_5$ dan $b = y_j$, dimana $j = 7, 8$, maka lintasannya adalah

$$w_5, w_4, x_1, x_2, x_3, y_{13}, y_{12}, y_{11}, z_4, z_3, y_8, y_7.$$

Kasus 6. Misalkan $a = v_i$ dan $b = y_j$, atau $a = z_i$ dan $b = w_j$, untuk $1 \leq i \leq 5$ dan $1 \leq j \leq 15$.

- (a) Misalkan $a = v_i$ dan $b = y_j$, untuk $1 \leq i \leq 5$ dan $1 \leq j \leq 15$.

Lintasan- (a, b) rainbow yang menghubungkan titik v_i ke titik y_j adalah

- (i) Misalkan titik v_i bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_e , x_f bertetangga dengan y_l , dimana $c \neq d$, $e \neq f$. Maka lintasannya adalah

$$v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l \text{ atau } v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l,$$

$$\text{atau } v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l, \text{ atau } v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l.$$

- (ii) Misalkan titik v_i bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_e , x_f bertetangga dengan y_g , dimana $c \neq d$, $e \neq f$, $g \neq l$. Maka lintasannya adalah

$$v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l, \text{ atau}$$

$$v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l, \text{ atau}$$

$$v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l, \text{ atau}$$

$v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$.

- (iii) Misalkan terdapat titik v_h yang bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_e , x_f bertetangga dengan y_l , dimana $h \neq i$, $c \neq d$, $e \neq f$. Maka lintasannya adalah

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l$, atau

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l$, atau

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l$, atau

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l$, atau

$v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l$, atau

$v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l$, atau

$v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l$, atau

$v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l$.

- (iv) Misalkan terdapat titik v_h yang bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_e , x_f bertetangga dengan y_g , dimana $h \neq i$, $c \neq d$, $e \neq f$, $g \neq l$. Maka lintasannya adalah

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$, atau

$v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$, atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$, atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$, atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$, atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$, atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$, atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$, atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$.

- (b) Misalkan $a = z_i$ dan $b = w_j$, untuk $1 \leq i \leq 5$ dan $1 \leq j \leq 15$.
 Pembuktian kasus ini similar dengan Kasus 6(a).

Kasus 7. Misalkan $a = z_i$ dan $b = v_i$ untuk $1 \leq i \leq 5$.

Lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan titik z_i ke titik v_i adalah

- (i) Jika $a = z_1$ dan $b = v_i$, dimana $i = 1, 2, 3$, maka lintasan *rainbow* yaitu

$$z_1, z_5, y_{14}, y_{15}, x_2, x_1, w_4, w_5, v_1, v_2, v_3.$$

- (ii) Jika $a = z_1$ dan $b = v_i$, dimana $i = 4, 5$, maka lintasan *rainbow* yaitu

$$z_1, z_5, y_{14}, y_{13}, x_3, x_4, w_3, w_2, v_5, v_4.$$

- (iii) Jika $a = z_2$ dan $b = v_i$, dimana $i = 1, 2$, maka lintasan *rainbow* adalah

$$z_2, y_5, y_4, x_{15}, x_{16}, w_9, w_8, v_2, v_1.$$

- (iv) Jika $a = z_2$ dan $b = v_3$, lintasan *rainbow* adalah

$$z_2, y_5, y_6, x_{14}, x_{13}, w_{10}, w_9, w_8, v_2, v_3.$$

- (vi) Jika $a = z_2$ dan $b = v_i$, dimana $i = 4, 5$, maka lintasan *rainbow* adalah

$$z_2, z_1, z_5, y_{14}, y_{13}, x_3, x_4, w_3, w_2, v_5, v_4.$$

- (vii) Jika $a = z_3$ dan $b = v_1$, maka lintasan *rainbow* adalah

$$z_3, z_4, y_{11}, y_{12}, y_{13}, x_3, x_2, x_1, w_4, w_5, v_1.$$

- (viii) Jika $a = z_3$ dan $b = v_2$, maka lintasan *rainbow* adalah

$$z_3, z_2, y_5, y_4, x_{15}, x_{16}, w_9, w_8, v_2.$$

- (ix) Jika $a = z_3$ dan $b = v_i$, dimana $i = 3, 4, 5$, maka lintasan *rainbow* adalah

$$z_3, y_8, y_7, x_{11}, x_{12}, w_{12}, w_{11}, v_3, v_4, v_5.$$

- (x) Jika $a = z_4$ dan $b = v_1$, maka lintasan *rainbow* adalah

$$z_4, y_{11}, y_{12}, y_{13}, x_3, x_2, x_1, w_4, w_5, v_1.$$

(xi) Jika $a = z_4$ dan $b = v_2$, maka lintasan *rainbow* adalah

$$z_4, z_3, z_2, y_5, y_4, x_{15}, x_{16}, w_9, w_8, v_2.$$

(xii) Jika $a = z_4$ dan $b = v_3$, maka lintasan *rainbow* adalah

$$z_4, z_3, y_8, y_7, x_{11}, x_{12}, w_{12}, w_{11}, v_3.$$

(xiii) Jika $a = z_4$ dan $b = v_i$, dimana $i = 4, 5$, maka lintasan *rainbow* adalah

$$z_4, y_{11}, y_{12}, x_6, x_5, w_1, w_2, v_5, v_4.$$

(xiv) Jika $a = z_5$ dan $b = v_i$, dimana $i = 1, 2, 3$, maka lintasan *rainbow* adalah

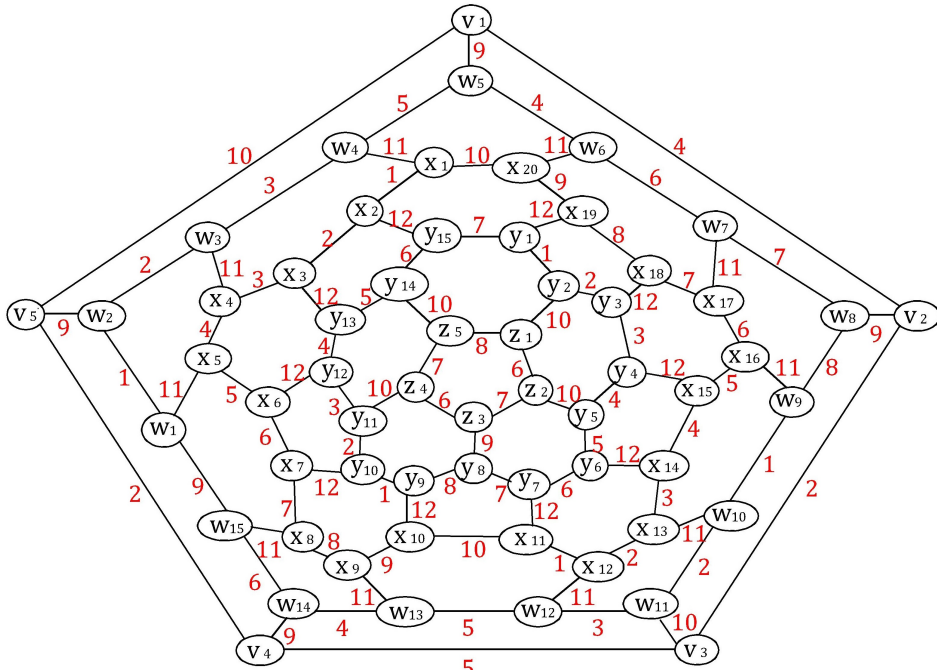
$$z_5, y_{14}, y_{15}, x_2, x_1, w_4, w_5, v_1, v_2, v_3.$$

(xv) Jika $a = z_5$ dan $b = v_i$, dimana $i = 4, 5$, maka lintasan *rainbow* adalah

$$z_5, y_{14}, y_{13}, x_3, x_4, x_5, w_1, w_2, v_5, v_4.$$

Dari Kasus 1 – Kasus 7, telah ditunjukkan bahwa selalu terdapat lintasan *rainbow* di antara setiap dua titik sebarang di B_{60} . Diperoleh bahwa $rc(B_{60}) \leq 12$. $\square$

Pada Gambar 2 diberikan pewarnaan yang memberikan batas atas *rainbow connection number* untuk graf *Buckminsterfullerene* B_{60} .



Gambar 2. $rc(B_{60}) \leq 12$

4. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah diperoleh batas atas *rainbow connection number* untuk graf *Buckminsterfullerene* B_{60} , yaitu

$$rc(B_{60}) \leq 12.$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dodi Devianto, Bapak Effendi, dan Ibu Haripamyu yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Andova, V., Kardos, F., dan Skrekovski, R. 2014. Fullerene Graphs and Some Relevant Graph Invariants. *Topics in Chemical Graph Theory, University of Kragujevac and Faculty of Science. Kragujevac*: 39 – 54, Mathematical Chemistry Monographs. 978-86-6009-027-2
- [2] Aryani, S.B., Yulianti, L. dan Sy, S. 2018. Batas Atas Bilangan Rainbow Connection Untuk Graf Kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$. *Jurnal Matematika UNAND*. **VII**(1):143-148
- [3] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory, Graduated Texts In Mathematics*. Springer. New York.
- [4] Chartrand, G., Kalamazoo, Johns, G., Valley, S., McKeon, K., dan Zhang, P. 2008. Rainbow Connection in Graph. *Mathematica Bohemica*. **133**: 85 – 98
- [5] Li, X. dan Sun, Y. 2012. *Rainbow Connection of Graphs*. Springer, New York.
- [6] Nessa. 2018. Bilangan Rainbow Connection Untuk Graf Kubik $C_{n,2n,n}$. *Jurnal Matematika UNAND*. **VII**(1): 109 – 114
- [7] Sy, S., Medika, G,H. Yulianti, L. 2013. The Rainbow Connection Number of Fan and Sun. *Applied Mathematical Sciences*. **7**: 3155 – 3160