Jurnal Matematika UNAND
Vol. **11** No. **2** Hal. 124 – 132
Edisi April 2022
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

ANALISIS KESTABILAN MODEL INANG PARASIT

LUTHFIAH KHAIRUNNISA, AHMAD IQBAL BAQI, MUHAFZAN*

Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : luthfiahk99@gmail.com, baqi@sci.unand.ac.id, muhafzan@sci.unand.ac.id

Diterima 31 Januari 2022 Direvisi 10 April 2022 Dipublikasikan 30 April 2022

Abstrak. Model inang parasit merupakan suatu model matematika yang menggambarkan interaksi dinamis antara inang dan parasit dalam suatu ekosistem. Dalam makalah ini dipelajari model inang parasit dalam bentuk persamaan beda non linier diskrit. Tujuan utama dari makalah ini adalah untuk mengetahui kestabilan titik tetap model dinamik inang parasit dengan menggunakan fungsi pertumbuhan Hassel. Dari hasil analisis diperoleh tiga titik tetap yang kestabilannya ditentukan oleh tingkat reproduksi inang. Sebagai hasil utama dari penelitian ini disajikan suatu syarat cukup untuk kestabilan asimtotik dari titik tetap model inang parasit.

Kata Kunci: Model Inang Parasit, Persamaan Beda Non Linier, Kestabilan Titik Tetap

1. Pendahuluan

Dalam suatu ekosistem, setiap makhluk hidup saling berinteraksi untuk kelangsungan hidupnya. Interaksi antar spesies makhluk hidup akan mempengaruhi kehidupan masing-masing populasinya. Interaksi inang dan parasit merupakan salah satu interaksi antar spesies makhluk hidup. Salah satu contoh interaksi inang parasit ini adalah tawon bracon dan inangnya, antara lain kepik dan wereng [10].

Kajian matematika tentang interaksi antara inang dan parasit pertama kali diperkenalkan oleh Nicholson dan Bailey pada tahun 1935 [9]. Secara umum, model inang parasit diberikan dalam bentuk sistem persamaan beda berikut [8].

$$\begin{aligned} H(k+1) &= \mu\, H(k)\, f(H(k), P(k)) \\ P(k+1) &= \ell H(k)[1 - f(H(k), P(k))], \end{aligned} \tag{1.1}$$

dengan $H(k)$ menyatakan populasi inang dewasa pada musim k, $P(k)$ menyatakan populasi parasit dewasa, pada musim k, dan $\mu > 1$ adalah laju reproduksi inang. Fungsi $f(H(k), P(k))$ adalah fraksi dari larva inang yang tidak terinfeksi. Kemudian, $H(k)[1 - f(H(k), P(k))]$ adalah kepadatan bersih larva inang yang terinfeksi, dengan setiap larva inang menghasilkan ℓ parasit dewasa pada musim berikutnya [8].

*Penulis Korespondensi

Dengan mengunakan fungsi pertumbuhan Hassel [3] untuk inang, yaitu

$$f(H(k), P(k)) = e^{-cP(k)}, \quad \mu = \frac{R}{(1 + aH(k))^b},$$

persamaan (1.1) menjadi

$$\begin{aligned} H(k+1) = &\quad \frac{RH(k)}{(1+H(k))^b} e^{-cP(k)} \\ P(k+1) = &\quad H(k)(1 - e^{-cP(k)}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

dengan $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, R menyatakan tingkat reproduksi inang dalam fungsi pertumbuhan Hassel, kesuburan parasit (ℓ) dan tingkat *feedback* inang parasit (a) diasumsikan masing-masing bernilai 1, Parameter b, dan c adalah positif dengan b menyatakan tingkat *feedback* inang parasit, dan c menyatakan tingkat kemampuan parasit mendapatkan inang [3,8]. Model (1.2) telah dikaji oleh Ufuktepe dan Kapcak dalam [12].

Pada makalah ini, dikaji kembali kestabilan model inang parasit (1.2) dengan memvariasikan nilai-nilai parameter yang terkait. Sebagai hasil utama dari penelitian ini, diperoleh suatu syarat cukup yang baru sebagai uji kestabilan asimtotik dari titik tetap model inang parasit.

2. Landasan Teori

2.1. *Matriks*

Matriks adalah susunan angka-angka yang berbentuk persegi atau persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom. Matriks A dengan m baris dan n kolom disebut sebagai matriks berukuran $m \times n$ dinotasikan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matriks persegi $A_{n\times n}$ dikatakan memiliki invers jika terdapat matriks $B_{n\times n}$ sedemikian sehingga

$$AB = BA = I,$$

dengan $I_{n\times n}$ adalah matriks identitas. Matriks A dikatakan non-singular jika $det(A) \neq 0$, sebaliknya dikatakan matriks singular [4].

Definisi 2.1. [4] *Misalkan A adalah matriks $n \times n$. Vektor tak nol $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen bagi A jika $A\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\mathbf{x}$, yaitu*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{2.1}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, yang berkaitan dengan vektor eigen $\mathbf{x}$.

Untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks $A_{n\times n}$, tulis (2.1) sebagai :

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) merupakan suatu sistem persamaan linier homogen. Agar persamaan (2.2) memiliki solusi tak nol $\mathbf{x}$, maka mestilah

$$det(\lambda I - A) = 0. \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) disebut persamaan karakterisktik bagi matriks A.

2.2. *Persamaan Beda dan Kestabilannya*

Suatu sistem persamaan beda adalah suatu sistem persamaan yang berbentuk sebagai berikut.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)), \tag{2.4}$$

Jika $\mathbf{f}$ linier maka persamaan (2.4) disebut persamaan beda linier, sedangkan jika $\mathbf{f}$ non linier maka persamaan (2.4) disebut persamaan beda non linier [1]. Secara khusus, bentuk persamaan beda linier dapat ditulis sebagai berikut.

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0, \quad k \geq k_0 \geq 0. \tag{2.5}$$

Salah satu kajian dari sistem persamaan beda adalah kestabilan titik tetap dari sistem tersebut. Dalam [1] disebutkan bahwa, suatu titik $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik tetap dari sistem (2.4) jika:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*. \tag{2.6}$$

Untuk sistem linier, suatu titik $\mathbf{x}^*$ merupakan titik tetap dari sistem (2.5) jika

$$A\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^* \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) dapat ditulis menjadi $(A-I)\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Jika $(A-I)$ non singular, maka $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ adalah satu-satunya titik tetap. Sedangkan jika $(A-I)$ singular, maka terdapat tak hingga banyaknya titik tetap [5].

Definisi 2.2. [1] *Titik tetap* $\mathbf{x}^*$ *dari sistem* (2.4) *dikatakan*

1. *Stabil jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *dan* $k > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga jika* $\| \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^* \| < \delta$ *maka* $\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* \| < \varepsilon$ *untuk semua* $k > k_0 \geq 0$.
2. *Stabil asimtotik jika ia stabil dan terdapat* μ *sedemikian sehingga jika* $\| \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^* \| < \mu$ *maka* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*$.

Dalam [2] disebutkan bahwa kestabilan titik tetap sistem (2.4) dapat diperiksa dengan melinierkan sistem tersebut di sekitar titik tetap $\mathbf{x}^*$ dengan menggunakan ekspansi deret Taylor [5].

Secara umum di $\mathbb{R}^n$ berlaku

$$J_{\mathbf{x}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1(k)} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2(k)} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n(k)} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1(k)} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2(k)} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1(k)} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2(k)} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n(k)} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Matriks $J_{\mathbf{x}^*}$ disebut sebagai matriks Jacobian dari $\mathbf{f}$ di sekitar titik tetap $\mathbf{x}^*$.

Definisi 2.3. [2] *Misalkan* $\mathbf{x}^*$ *adalah titik tetap dari sistem persamaan* (2.4) *dan* $J_{\mathbf{x}^*}$ *adalah matriks Jacobian dari* $\mathbf{f}$ *di sekitar titik tetap* $\mathbf{x}^*$*. Titik tetap* $\mathbf{x}^*$ *dikatakan titik tetap hiperbolik jika tidak ada nilai eigen dari matriks* $J_{\mathbf{x}^*}$ *yang modulusnya* 1*.*

Teorema 2.4. [2] *Titik tetap hiperbolik* $\mathbf{x}^*$ *dari sistem persamaan beda* (2.4) *adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika modulus dari semua nilai eigen matriks Jacobian* $J_{\mathbf{x}^*}$ *kurang dari* 1*.*

3. Pembahasan

Untuk menganalisis perilaku model (1.2), terlebih dahulu ditentukan titik tetap-titik tetap dari sistem (1.2). Misalkan (H^*, P^*) adalah titik tetap yang diinginkan, maka

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{RH^*}{(1+H^*)^b} e^{-cP^*}, \\ P^* &= H^*(1 - e^{-cP^*}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dari (3.1), diperoleh bahwa $(H^*, P^*) = (0, 0)$ adalah suatu titik tetap dari sistem (1.2). Selanjutnya, untuk $H^* \neq 0$ dan $P^* = 0$, dari persamaan pertama (3.1) diperoleh

$$H^* = R^{\frac{1}{b}} - 1, \tag{3.2}$$

yang menunjukkan bahwa $(H^*, P^*) = (R^{\frac{1}{b}} - 1, 0)$ adalah titik tetap kedua dari (1.2). Kemudian, untuk $H^* \neq 0$ dan $P^* \neq 0$, persamaan pertama (3.1) menghasilkan

$$P^* = \frac{1}{c} \ln \left(\frac{R}{(1+H^*)^b} \right), \tag{3.3}$$

sehingga $(H^*, P^*) = \left(H^*, \frac{1}{c} \ln \left(\frac{R}{(1+H^*)^b} \right) \right)$ merupakan titik tetap ketiga dari sistem (1.2).

Matriks Jacobian dari titik tetap $(0, 0)$ adalah

$$J_0 = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari J_0 adalah

$$\lambda_1 = R \text{ dan } \lambda_2 = 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.3, titik $(0, 0)$ adalah titik tetap hiperbolik jika $|R| \neq 1$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.4, titik tetap $(0, 0)$ adalah stabil asimtotik jika $0 < R < 1$.

Matriks Jacobian dari titik tetap $(R^{\frac{1}{b}} - 1, 0)$ adalah

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 + b(-1 + R^{-\frac{1}{b}}) & -c(-1 + R^{\frac{1}{b}}) \\ 0 & c(-1 + R^{\frac{1}{b}}) \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari J_1 adalah

$$\lambda_1 = 1 + b(-1 + R^{-\frac{1}{b}}) \text{ dan } \lambda_2 = c(-1 + R^{\frac{1}{b}}).$$

Berdasarkan Definisi 2.3, titik $(R^{\frac{1}{b}}-1,0)$ adalah titik tetap hiperbolik jika $|\lambda_1| \neq 1$ dan $|\lambda_2| \neq 1$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.4, titik tetap $(R^{\frac{1}{b}}-1,0)$ adalah stabil asimtotik jika $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$.
Untuk $|\lambda_1| < 1$, diperoleh

$$\frac{b-2}{b} < R^{-\frac{1}{b}} < 1. \tag{3.4}$$

Untuk $|\lambda_2| < 1$, diperoleh

$$\frac{c}{c+1} < R^{-\frac{1}{b}} < \frac{c}{c-1}. \tag{3.5}$$

Dari (3.4) dan (3.5) diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.1. [12] *Untuk sistem* (1.2)*, titik tetap* $(R^{\frac{1}{b}}-1,0)$ *adalah stabil asimtotik jika*

$$\text{maks}\left(\frac{c}{c+1}, \frac{b-2}{b}\right) < R^{-\frac{1}{b}} < 1.$$

Selanjutnya, matriks Jacobian di titik tetap $\left(H^*, \frac{1}{c}\ln\left(\frac{R}{(1+H^*)^b}\right)\right)$ adalah

$$J_2 = \begin{bmatrix} (1+H^*-bH^*)(1+H^*)^{-1} & -cH^* \\ 1-\frac{(1+H^*)^b}{R} & \frac{cH^*}{R}(1+H^*)^b \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari J_2 adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4C}}{2},$$

dengan

$$B = -\left[\frac{(1+H^*-bH^*)}{(1+H^*)} + \frac{cH^*}{R}(1+H^*)^b\right]$$

dan

$$C = \frac{cH^*}{R}\left[\frac{1+H^*-bH^*}{(1+H^*)^{1-b}} - (1+H^*)^b + R\right].$$

Sistem (1.2) adalah stabil asimtotik pada titik tetap $\left(H^*, \frac{1}{c}\ln\left(\frac{R}{(1+H^*)^b}\right)\right)$ jika $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$.
Untuk $|\lambda_1| < 1$, diperoleh

$$R > \frac{(1+H^*)^b(1+H^*+bH^*)c}{b+c(1+H^*)}. \tag{3.6}$$

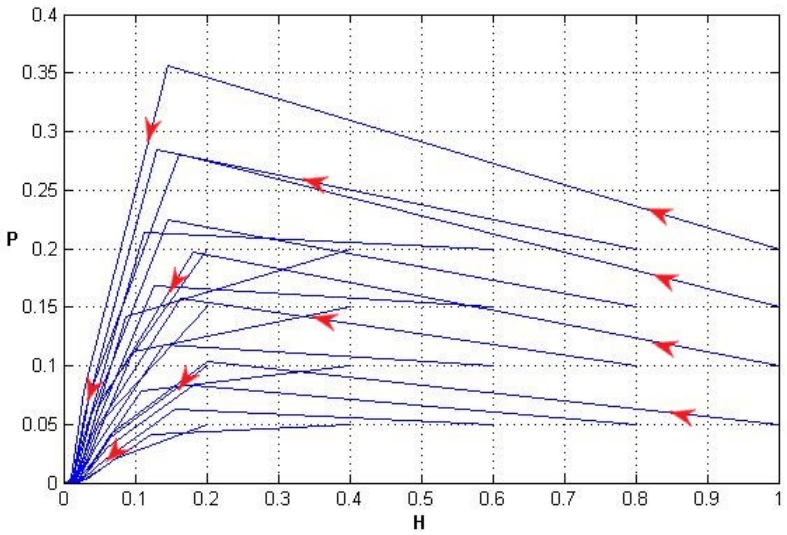
Untuk $|\lambda_2| < 1$, diperoleh

$$R < \frac{(1+H^*)^b(1+H^*+bH^*)c}{b+c(1+H^*)} \tag{3.7}$$

Dari (3.6) dan (3.7), diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.2. *Untuk sistem* (1.2)*, titik tetap* $\left(H^*, \frac{1}{c}\ln\left(\frac{R}{(1+H^*)^b}\right)\right)$ *adalah stabil asimtotik jika*

$$R = \frac{(1+H^*)^b(1+H^*+bH^*)c}{b+c(1+H^*)}.$$



Gambar 1. Potret fase sistem (1.2) untuk $R = 0.5$

Sebagai ilustrasi, berikut diberikan potret fase untuk ketiga titik tetap di atas. Untuk titik tetap $(0, 0)$, misalkan $b = 1.15$, $c = 2.2$, dan $R = 0.5$. Potret fasenya dapat dilihat pada Gambar 1.

Untuk titik tetap $(H^*, 0)$ dengan $H^* \neq 0$, misalkan $b = 1.15$, $c = 2.2$, dan $R = 1.5$. Sehingga, $(R^{\frac{1}{b}} - 1, 0) = (0.4227, 0)$. Potret fasenya dapat dilihat pada Gambar 2 [12].

Untuk titik tetap (H^*, P^*) dengan $H^* \neq 0$ dan $P^* \neq 0$, misalkan $b = 1.15$, $c = 3.2$, dan $R = 1.5$. Sehingga, $\left(H^*, \frac{1}{c} \ln\left(\frac{R}{(1+H^*)^b}\right)\right) = (0.374, 0.0125)$. Potret fasenya dapat dilihat pada Gambar 3 [12].

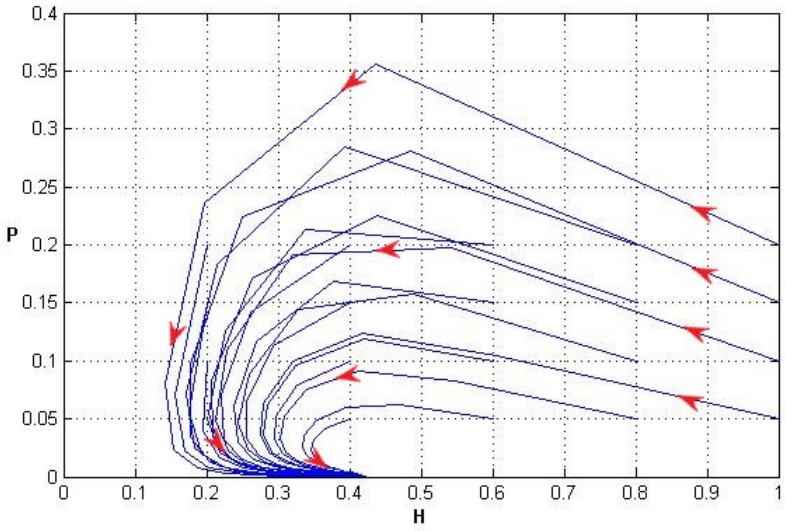
Untuk titik tetap (H^*, P^*) dengan $H^* \neq 0$ dan $P^* \neq 0$, misalkan $b = 3.5$, $c = 7.1$, dan $R = 6$. Potret fasenya dapat dilihat pada Gambar 4.

4. Kesimpulan

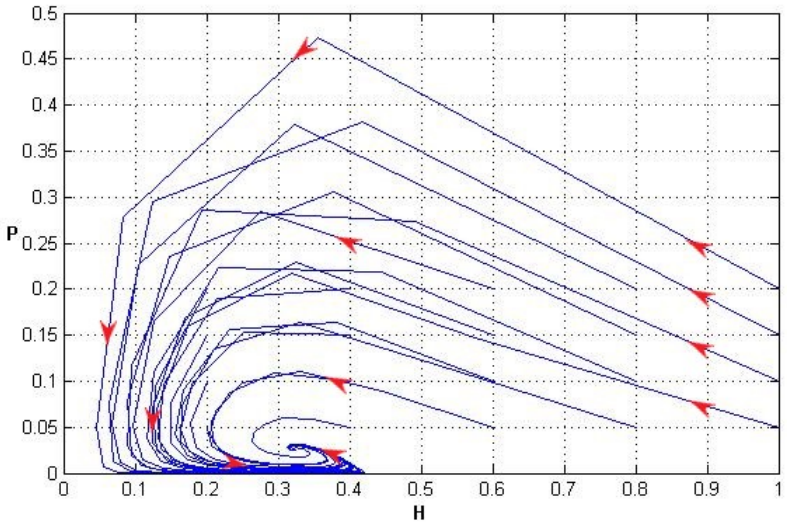
Model (1.2) memiliki tiga titik tetap yaitu $(0, 0)$, $(R^{\frac{1}{b}} - 1, 0)$, dan $\left(H^*, \frac{1}{c} \ln\left(\frac{R}{(1+H^*)^b}\right)\right)$. Titik tetap $(0, 0)$ adalah stabil asimtotik untuk $0 < R < 1$. Titik tetap $(R^{\frac{1}{b}} - 1, 0)$ adalah stabil asimtotik jika $\text{maks}\left(\frac{c}{c+1}, \frac{b-2}{b}\right) < R^{-\frac{1}{b}} < 1$. Sedangkan, titik tetap $\left(H^*, \frac{1}{c} \ln\left(\frac{R}{(1+H^*)^b}\right)\right)$ adalah stabil asimtotik jika

$$R = \frac{(1 + H^*)^b (1 + H^* + bH^*)c}{b + c(1 + H^*)}.$$

Dengan demikian, model (1.2) adalah stabil asimtotik untuk setiap $R > 0$.

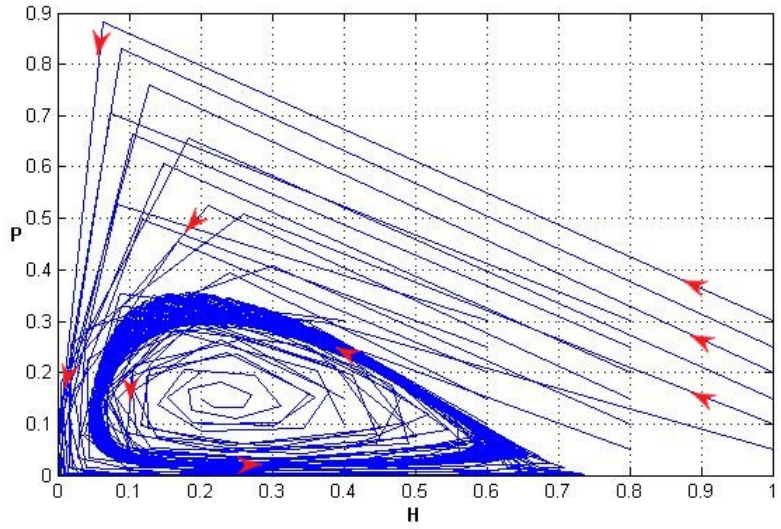


Gambar 2. [12] Potret fase sistem (1.2) untuk $R = 1.5$



Gambar 3. [12] Potret fase sistem (1.2) untuk $R = 1.5$

Selain itu, kestabilan titik tetap $(0, 0)$ bermakna bahwa inang dan parasit punah jika $k \to \infty$. Di titik tetap $(R^{\frac{1}{b}} - 1, 0)$ parasit punah dan inang mendekati $R^{\frac{1}{b}} - 1$ jika $k \to \infty$. Di titik tetap $\left(H^*, \frac{1}{c} \ln\left(\frac{R}{(1+H^*)^b}\right)\right)$ inang dan parasit tidak punah dan



Gambar 4. [12] Potret fase sistem (1.2) untuk $R = 6$

parasit mendekati $\frac{1}{c} \ln \left(\frac{R}{(1+H^*)^b} \right)$ jika $k \to \infty$.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Budi Rudianto, Bapak Narwen, Ibu Riri Lestari, dan Bapak Mahdhivan Syafwan yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Elaydi, S., 2005, *An Introductions to Difference Equations*, Edisi ke-3, Springer, New York

[2] Galor, O., 2006, *Discrete Dynamical System*, Springer, Providence, USA.

[3] Hassel, M.P., dan H.N. Comins, 1976, Discrete Time Models for Two-Species Competition, *Theoritical Population Biology*, Vol. **9**: 202-221

[4] Howard, A., dan Rorres, C., 2014, *Elementary Liner Algebra*, Edisi ke-11, John Wiley & Sons, Inc. Canada

[5] Kelley, W.G., dan Peterson, Allan C., 2001, *Difference Equations*, Academic Press, USA

[6] Khan, A.Q., dan M.N. Qureshi, 2015, Dynamics of a modified Nicholson-Bailey host-parasitoid model, *Advanced in Difference Equation*, Vol. **2015**: 23

[7] Kuswardani, R.A., dan Maimunah, 2013, *Buku Ajar : Hama Tanaman Pertanian*, Universitas Medan Area, Medan

[8] Misra, J.C. dan A. Mitra, 2005, Instabilities in Single-Species and Host-Parasitoid Systems : Period Doubling Bifurcations and Chaos, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. **52**: 525-538

[9] Nicholson, A.J., dan V.A. Bailey, 1935, The balance of animal populations. part 1, *Proc. of Zoological Society of London*, Vol. **3**: 551-598

[10] Nuraeni, Y., dkk., 2014, Keanekaragaman Serangga Parasitoid untuk Pengendalian Hama pada Tanaman Kehutanan. *Biodiversitas*

[11] Qureshi M.N., dkk., 2014, Asymptotic behavior of a Nicholson-Bailey model, *Advanced in Difference Equation*, Vol. **2014**: 62

[12] Ufuktepe, U. dan Kapcak S., 2013, Stability Analysis of Host Parasite Model, *Advanced in Difference Equation*, Vol. **2013**: 79