Jurnal Matematika UNAND
Vol. **11** No. **3** Hal. 171 – 180
Edisi Juli 2022
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

ANALISIS TITIK TETAP PADA PEMETAAN TERDOMINASI-α DI RUANG metrik-b SEGI EMPAT

NUR FARIDAH*, MALAHAYATI

Program Studi S1 Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga
Jl. Laksda Adisucipto, Yogyakarta, Indonesia 55281
email : nfaridah1412@gmail.com, malahayati@uin-suka.ac.id

Diterima 2 Februari 2022 Direvisi 19 Juli 2022 Dipublikasikan 31 Juli 2022

Abstrak. Ruang metrik-b segi empat merupakan himpunan tak kosong yang di dalamnya dilengkapi oleh suatu pemetaan dan memenuhi tiga aksioma yaitu definitas, simetri, dan ketaksamaan b-segi empat. Penelitian ini membahas tentang teorema titik tetap pada pemetaan terdominasi-α di ruang metrik-b segi empat. Proses konstruksi pembuktian melibatkan barisan Picard yang menjadi alat dalam menemukan titik tetapnya. Contoh 3.2 pada jurnal Shoaib [10] kurang tepat, sebab tidak memenuhi semua hipotesa pada Teorema 3.1. Oleh karena itu diberikan contoh baru dengan mendefinisikan ulang pemetaan yang memenuhi kondisi terdominasi α sehingga semua hipotesa pada teorema terpenuhi.

Kata Kunci: Pemetaan terdominasi, Ruang metrik-b segi empat, Titik tetap

1. Pendahuluan

Ruang metrik-b segi empat pertama kali diperkenalkan oleh George [6] yang termotivasi dari ruang metrik-b dan ruang metrik segi empat. Penelitian mengenai teorema titik tetap di ruang metrik-b, ruang metrik segi empat, dan ruang metrik-b segi empat telah banyak dibahas oleh para peneliti, di antaranya Afandi [1], Demma [4], Heu-Sheng Ding [5], dan Shoaib [10]. Teorema titik tetap menunjukkan bahwa titik tetap dari pemetaan satu-satu pada ruang metrik ada. Teorema ini pertama kali diperkenalkan oleh Stefan Banach yang dikenal sebagai prinsip kontraksi Banach [7].

Tahun 2020 Shoaib dkk. melakukan penelitian lebih lanjut tentang titik tetap di ruang metrik-b segi empat dan penerapannya pada graf [10] dengan menggunakan pemetaan terdominasi yang sudah dibahas sebelumnya oleh Shoaib [9] dan Arshad [2]. Penelitian tersebut digunakan dalam menganalisis pembuktian Teorema 3.1 yang menyatakan jika semua hipotesa pada teorema terpenuhi maka pemetaan T memiliki titik tetap. Selain itu, pada penelitian ini dibuktikan juga Contoh 3.2 pada

*penulis korespondensi

Shoaib [10] tidak memenuhi Teorema 3.1 karena ada hipotesa yang tidak terpenuhi, sehingga diberikan contoh baru yang memenuhi semua hipotesa pada Teorema 3.1.

2. Landasan Teori

Definisi 2.1. [5] *Diberikan himpunan tak kosong X dan bilangan real $b \geq 1$. Pemetaan $d : X \times X \to [0, \infty)$ disebut metrik-b segi empat apabila untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:*

(d1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (definitas)
(d2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri)
(d3) $d(x, y) \leq b\left[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)\right], \forall u, v \in X \setminus \{x, y\}$ dan $u \neq v$ (ketaksamaan b-segi empat)

Selanjutnya, pasangan (X, d) disebut ruang metrik-b segi empat.

Berikut ini diberikan definisi barisan-barisan di ruang metrik-b segi empat yang akan digunakan dalam pembuktian pada teorema selanjutnya.

Definisi 2.2. [6] *Diberikan ruang metrik-b segi empat (X, d) dan barisan $\{x_n \subset X\}$. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ apabila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$. Selanjutnya x disebut limit barisan $\{x_n\}$ dan barisan $\{x_n\}$ yang konvergen ke x dinotasikan dengan $\{x_n\} \to x$ untuk $n \to \infty$ atau $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Definisi 2.3. [6] *Diberikan ruang metrik-b segi empat (X, d) dan barisan $\{x_n\} \subset X$. Barisan $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy apabila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ dengan $m > n$ berlaku atau dapat dinotasikan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.*

Definisi 2.4. [6] *Ruang metrik-b segi empat dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy, konvergen di dalamnya.*

Definisi 2.5. [4] *Diberikan ruang metrik-b segi empat (X, d) dan pemetaan $T : X \to X$. Barisan $\{x_n\}$ disebut barisan Picard apabila untuk $x_0 \in X$ berlaku $x_n = T^n x_0 = T x_{n-1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.*

Selanjutnya, akan diberikan definisi notasi dan definisi pemetaan terdominasi-α di ruang metrik-b segi empat.

Definisi 2.6. [10] *Diberikan himpunan keluarga fungsi (pemetaan) naik tegas*

$$\bar{w} = \left\{ \delta : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \mid \sum_{k=1}^{+\infty} b^k \delta^k(t) < +\delta, b\delta^k(t) < t, \forall t > 0, b \geq 1 \right\}.$$

dimana δ^k merupakan iterasi ke k dari δ dan $b^{n+1}\delta n + 1(t) = b^n b\delta(\delta^n(t)) < b^n \delta^n(t)$.

Definisi 2.7. [2] *Diberikan ruang metrik-b segi empat (X, d) dengan bilangan real $b \geq 1$ dan $A \subseteq X$, serta pemetaan $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$. Pemetaan $T : X \to X$*

dikatakan terdominasi-α pada A, apabila memenuhi $\alpha(x, Tx) \geq 1$ untuk setiap $x \in A$. Lebih lanjut, untuk setiap $x, y \in X$ dan $a > 0$ didefinisikan

$$D(x,y) = maks\left\{d(x,y), \frac{d(x,Tx) \cdot d(y,Ty)}{a + d(x,y)}, d(x,Tx), d(y,Ty)\right\}$$

3. Teorema Titik Tetap pada Pemetaan Terdominasi-α di Ruang metrik-b Segi Empat Lengkap

Subbab ini akan membahas mengenai teorema titik tetap pada pemetaan terdominasi-α di ruang metrik-b segi empat lengkap beserta contoh yang sesuai dengan teorema tersebut.

Teorema 3.1. [*10*] *Diberikan ruang metrik-b segi empat lengkap (X, d) dengan bilangan real $b \geq 1$ dan pemetaan $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$, serta barisan Picard $\{x_n\}$. Jika $T : X \to X$ merupakan pemetaan terdominasi-α pada untuk $\delta \in \bar{w}$ yang memenuhi*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta(D(x, y) \tag{3.1}$$

untuk setiap $x, y \in \{x_n\}$ dengan $\alpha(x, y) \geq 1$, maka x_n konvergen ke $x^* \in X$. Lebih lanjut, jika pertidaksamaan (3.1) terpenuhi dengan $\alpha(x_n, x^*) \geq 1$, untuk setiap $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, maka T mempunyai titik tetap, yaitu x^* di X.

Bukti. Diberikan ruang metrik-b segi empat (X, d) dan $\{x_n\}$ merupakan barisan Picard. Ambil sebarang $x_0 \in X$, dan barisan $\{x_n\}$ didefinisikan sebagai:

$$x_{n+1} = Tx_n = T(T^n(x_0)) = T^{n+1}(x_0) \subseteq X.$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Apabila untuk suatu $x_n = x_{n+1}$, maka $x_n = x_{n+1} = Tx_n$. Jelas x_n adalah titik tetap pada T, untuk $x_n = x_{n+1}$. Selanjutnya, andaikan $x_n \neq x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, karena pemetaan $T : X \to X$ merupakan pemetaan terdominasi-α pada $\{x_n\}$ dan $\alpha(x_n, Tx_n) \geq 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$., berdasarkan pertidaksamaan (3.1), yaitu $d(Tx, Ty) \leq \delta(D(x, y))$. Maka:

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \delta(D(x_n, x_{n+1})), \\
&= \delta(maks\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, Tx_n) \cdot d(x_{n+1}, Tx_{n+1})}{a + d(x_n, x_{n+1})}, \\
&\quad d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1})\}) \\
&= \delta(maks\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) \cdot d(x_{n+1}, x_{n+2})}{a + d(x_n, x_{n+1})}, \\
&\quad d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2})\}) \\
&\leq \delta(maks\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2})\}).
\end{aligned}$$

Diasumsikan $maks\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2})\} = d(x_{n+1}, x_{n+2})$, maka:

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \delta(d(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq bd(x_{n+1}, x_{n+2})).$$

Hal tersebut kontradiksi dengan $b\delta(t) < t, \forall t > 0$. Oleh karena itu

$$maks\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2})\} = d(x_n, x_{n+1}).$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(Tx_n, Tx_{n+1}), \\ &\leq \delta(d(x_n, x_{n+1}), \\ &\leq \delta\left[\delta(d(x_{n-1}, x_n))\right], \\ &= \delta^2(d(x_{n-1}, x_n)), \\ &\leq \delta^2(d(x_{n-2}, x_{n-1})), \\ d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \delta^{n+1}(d(x_0, x_1)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Selanjutnya, berdasarkan uraian di atas akan ditunjukkan bahwa T mempunyai titik tetap di X. Langkah awal untuk menunjukkan bahwa T mempunyai titik tetap, yaitu dengan menunjukkan bahwa barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di X dengan pembuktian sebagai berikut:

Akan dibuktikan bahwa barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di X. Diberikan $m, n \in \mathbb{N}$, dengan $m > n$. Andaikan $x_m = x_n$, maka diperoleh:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, Tx_n) = d(x_m, Tx_m) = d(x_m, x_{m+1}). \tag{3.3}$$

Berdasarkan persamaan (3.3), diperoleh:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(x_m, x_{m+1}), \leq \delta^{m-n}(d(x_n, x_{n+1})) < b\delta(d(x_n, x_{n+1})).$$

Hal tersebut kontradiksi dengan $b\delta(t) < t$ untuk setiap $t > 0$. Oleh karena itu, pengandaian di atas salah, sehingga barisan $x_m \neq x_n$, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$. Karena $\sum_{k=1}^{\infty} b^k\delta^k(t) < \infty$ untuk suatu $v \in \mathbb{N}$, maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} b^k\delta^k(\delta^{v-1}d(x_0, x_1))$ konvergen.

Apabila $b\delta(t) < t$, diperoleh:

$$b^{n+1}\delta^{n+1}(\delta^{v-1}d(x_0, x_1)) = b\delta\left(b^n\delta^n(\delta^{v-1}d(x_0, x_1))\right) < b^n\delta^n(\delta^{v-1}d(x_0, x_1)) \tag{3.4}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, untuk $\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon' > 0$. Karena deret $\sum_{k=1}^{\infty} b^k\delta^k(\delta^{v-1}d(x_0, x_1))$ konvergen terdapat $v_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$, sehingga diperoleh $b\delta(\delta^{v_{\varepsilon'}-1}d(x_0, x_1)) + b^2\delta^2(\delta^{v_{\varepsilon'}-1}d(x_0, x_1)) + \cdots < \varepsilon'$ (3.4).

Asumsikan $x_m \neq x_n$, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m > n > v_{\varepsilon'}$. Maka apabila $m > n + 2$, diperoleh:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq b[d(x_n, x_{n+1}) + bd(x_{n+1}, x_{n+2}) + bd(x_{n+2}, x_m)], \\ &\leq b[d(x_n, x_{n+1}) + bd(x_{n+1}, x_{n+2})] + b^2[d(x_{n+2}, x_{n+3} + d(x_{n+3}, x_{n+4}) + \\ &\quad d(x_{n+4}, x_m)] \\ &\leq bd(x_n, x_{n+1}) + bd(x_{n+1}, x_{n+2}) + b^2d(x_{n+2}, x_{n+3} + b^2d(x_{n+3}, x_{n+4} + \\ &\quad b^3[d(x_{n+4}, x_{n+5}) + d(x_{n+5}, x_{n+6}) + d(x_{n+6}, x_m)] \\ &\leq b\delta^n d(x_0, x_1) + b\delta^{n+1}d(x_0, x_1) + b^2\delta^{n+2}d(x_0, x_1) + b^2\delta^{n+3}d(x_0, x_1) + \\ &\quad b^3\delta^{n+4}d(x_0, x_1) + b^3\delta^{n+5}d(x_0, x_1) + b^3\delta^{n+6}d(x_0, x_1) + ... \\ &\leq b\delta^n d(x_0, x_1) + b^2\delta^{n+1}d(x_0, x_1) + b^3\delta^{n+2}d(x_0, x_1) + b^4\delta^{n+3}d(x_0, x_1) + \\ &\quad b^5\delta^{n+4}d(x_0, x_1) + b^6\delta^{n+5}d(x_0, x_1) + b^7\delta^{n+6}d(x_0, x_1) + ... \\ &= b\delta(\delta^{n-1}d(x_0, x_1)) + b^2\delta^2(\delta^{n-1}d(x_0, x_1)) + b^3\delta^3(\delta^{n-1}d(x_0, x_1)) + ... \\ &< \varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned}$$

Untuk $m = n + 2$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+2}) &\leq b[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+3}) + d(x_{n+3}, x_{n+2})] \\
&\leq b[d(x_n, x_{n+1}) + b[d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+4}) + d(x_{n+4}, x_{n+3})] + \\
&\quad d(x_{n+3}, x_{n+2})] \\
&\leq bd(x_n, x_{n+1}) + b^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + b^3[d(x_{n+2}, x_{n+3}) + d(x_{n+3}, x_{n+5}) + \\
&\quad d(x_{n+5}, x_{n+4})] + b^2 d(x_{n+4}, x_{n+3}) + bd(x_{n+3}, x_{n+2}) \\
&\leq bd(x_n, x_{n+1}) + b^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + b^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + b^4[d(x_{n+3}, x_{n+4}) + \\
&\quad d(x_{n+4}, x_{n+6}) + d(x_{n+6}, x_{n+5})] + b^3 d(x_{n+5}, x_{n+4}) + b^2 d(x_{n+4}, x_{n+3}) + \\
&\quad bd(x_{n+3}, x_{n+2}) \\
&\leq bd(x_n, x_{n+1}) + b^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + b^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + b^4 d(x_{n+3}, x_{n+4}) + \\
&\quad b^5[d(x_{n+4}, x_{n+5}) + d(x_{n+5}, x_{n+7}) + d(x_{n+7}, x_{n+6})] + b^4 d(x_{n+6}, x_{n+5}) + \\
&\quad b^3 d(x_{n+5}, x_{n+4}) + b^2 d(x_{n+4}, x_{n+3}) + bd(x_{n+3}, x_{n+2}) \\
&\leq bd(x_n, x_{n+1}) + b^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + b^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + b^4 d(x_{n+3}, x_{n+4}) + \\
&\quad b^5 d(x_{n+4}, x_{n+5}) + ... + b^5 d(x_{n+7}, x_{n+6}) + b^4 d(x_{n+6}, x_{n+5}) + b^3 d(x_{n+5}, \\
&\quad x_{n+4}) + b^2 d(x_{n+4}, x_{n+3}) + bd(x_{n+3}, x_{n+2}) \\
&< 2[bd(x_n, x_{n+1}) + b^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + b^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + b^4 d(x_{n+3}, x_{n+4}) + \\
&\quad b^5 d(x_{n+4}, x_{n+5}) + ...] \\
&\leq 2[b\delta^n d(x_0, x_1) + b^2\delta^{n+1} d(x_0, x_1) + b^3\delta^{n+2} d(x_0, x_1) + b^4\delta^{n+3} d(x_0, x_1) + \\
&\quad b^5\delta^{n+4} d(x_0, x_1) + ...] \\
&= 2[b\delta(\delta^{n-1} d(x_0, x_1)) + b^2\delta^2(\delta^{n-1} d(x_0, x_1)) + b^3\delta^3(\delta^{n-1} d(x_0, x_1)) + b^4\delta^4 \\
&\quad (\delta^{n-1} d(x_0, x_1)) + b^5\delta^5(\delta^{n-1} d(x_0, x_1)) + ...] \\
&< 2[b\delta(\delta^{v_{\varepsilon'}-1} d(x_0, x_1)) + b^2\delta^2(\delta^{v_{\varepsilon'}-1} d(x_0, x_1)) + b^3\delta^3(\delta^{v_{\varepsilon'}-1} d(x_0, x_1)) + \\
&\quad b^4\delta^4(\delta^{v_{\varepsilon'}-1} d(x_0, x_1)) + b^5\delta^5(\delta^{v_{\varepsilon'}-1} d(x_0, x_1)) + ...] \\
&< 2\varepsilon' = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa untuk sebarang $\varepsilon > 0, \exists v_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$, sehingga untuk setiap $m, n > v_{\varepsilon'}$, berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, atau dapat dituliskan dengan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$. Berdasarkan Definisi 2.3, terbukti bahwa $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy dalam X. Oleh karena barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di ruang metrik-b segi empat lengkap, maka barisan $\{x_n\}$ konvergen. Misalkan barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x^* \in X$, atau dapat dituliskan:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0. \tag{3.5}$$

Diperoleh bahwa sebarang barisan bagian dari $\{x_n\}$ konvergen ke $x^* \in X$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa x^* merupakan titik tetap pada pemetaan T. Andaikan $d(x^*, Tx^*) > 0$, maka berdasarkan pertidaksamaan ruang metrik-b segi empat, diperoleh:

$$\begin{aligned}
d(x^*, Tx^*) &\leq b[d(x^*, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*)] \\
&\leq b[d(x^*, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx^*)].
\end{aligned}$$

Karena $\alpha(x_n, x^*) \geq 1$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq b[d(x^*, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx^*)] \\ &\leq b[d(x^*, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + \delta(\text{maks}\{d(x_n, x^*), \\ &\quad \frac{d(x_n, Tx_n) \cdot d(x^*, Tx^*)}{a + d(x_n, x^*)}, d(x_n, Tx_n), d(x^*, Tx^*)\})] \\ &= b[d(x^*, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + \delta(\text{maks}\{d(x_n, x^*), \\ &\quad \frac{d(x_n, x_{n+1}) \cdot d(x^*, Tx^*)}{a + d(x_n, x^*)}, d(x_n, x_{n+1}), d(x^*, Tx^*)\})]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Berdasarkan persamaan (3.5) untuk $n \to \infty$, maka dari pertidaksamaan (3.6) diperoleh

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) \leq b[&d(x^*, x^*) + d(x^*, x^*) + \delta(\text{maks}\{d(x^*, x^*), \\ &\frac{d(x^*, x^*) \cdot d(x^*, Tx^*)}{a + d(x^*, x^*)}, d(x^*, x^*), d(x^*, Tx^*)\})] \end{aligned} \tag{3.7}$$

Berdasarkan Definisi 2.1 bahwa $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, maka dari pertidaksamaan (3.7) diperoleh:

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq b[d(x^*, x^*) + d(x^*, x^*) + \delta(\text{maks}\{d(x^*, x^*), \\ &\quad \frac{d(x^*, Tx^*) \cdot d(x^*, x^*)}{a + d(x^*, x^*)}, d(x^*, x^*), d(x^*, Tx^*)\})] \\ &= b[0 + 0 + \delta(\text{maks}\{0, \frac{d(x^*, Tx^*) \cdot 0}{a + 0}, 0, d(x^*, Tx^*)\})], \\ &= b[\delta d(x^*, Tx^*)], \\ &= b\delta d(x^*, Tx^*). \end{aligned}$$

Hal tersebut kontradiksi dengan $b\delta(t) < t$ untuk setiap $t > 0$,. Oleh karena itu, pengandaian di atas salah sehingga $d(x^*, Tx^*) = 0$. Selanjutnya, karena $d(x^*, Tx^*) = 0 = d(Tx^*, x^*)$, maka $Tx^* = x^*$. Jadi T mempunyai titik tetap x^* di X. □

Berikut adalah contoh dalam [10] yang menyatakan bahwa contoh tersebut memenuhi Teorema 3.1. Akan tetapi, pada penelitian ini akan ditunjukkan bahwa terdapat beberapa hipotesa yang tidak dipenuhi.

Contoh 3.2. [10] Diberikan himpunan $X = A \cup B$ dimana $A : \left\{\frac{1}{n} : n \in \{2, 3, 4, 5\}\right\}$ dan $B = [1, \infty)$. Pemetaan $d : X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan dengan:

$$d(x, y) = \begin{cases} d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) = 0.03, \\ d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = 0.02, \\ d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = d\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) = 0.6, \\ \mid x - y \mid^2, & \text{untuk } x, y \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Selanjutnya, diberikan pemetaan $T : X \to X$ didefinisikan dengan:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{, jika } x \in A, \\ \frac{1}{3}, & \text{, jika } x = 1, \\ 9x^{100} + 85, & \text{untuk } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Pemetaan $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan dengan:

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{5}, & \text{jika } x, y \in \{x_n\}, \\ \frac{4}{7}, & \text{untuk } x, y \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Maka dapat ditunjukkan bahwa T tidak memenuhi semua hipotesa pada Teorema 3.1.

Penjelasan.

Untuk menunjukkan bahwa T mempunyai titik tetap di X, maka cukup ditunjukkan bahwa T memenuhi semua hipotesa pada Teorema 3.1:

- (X, d) merupakan ruang metrik-b segi empat.
- Barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Picard.
- Pemetaan T merupakan pemetaan terdominasi-α.
- Memenuhi pertidaksamaan $d(Tx, Ty) \geq \delta(D, x, y)), \forall x, y \in \{x_n\}$.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa (X, d) merupakan ruang metrik-b segi empat. Ambil sebarang $x, y, u, v \in X$ dimana $u \neq v$ dengan $u, v \in X \setminus \{x, y\}$ dan $b \geq 1$.

(d1) Akan ditunjukkan bahwa $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
($\Rightarrow$) Akan dibuktikan jika $d(x, y) = 0$, maka $x = y$. Diketahui $d(x, y) = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\Leftrightarrow |\ x - y\ |^2 = 0, \\ &\Leftrightarrow x - y = 0, \\ &\Leftrightarrow x = y, \end{aligned}$$

Jadi terbukti jika $d(x, y) = 0$, maka $x = y$.
($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika $x = y$, maka $d(x, y) = 0$. Diketahui $x = y$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\ x - y\ |^2, \\ &= |\ x - x\ |^2, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi terbukti jika $x = y$, maka $d(x, y) = 0$.
Karena syarat perlu dan syarat cukup terpenuhi, maka benar bahwa $s(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(d2) Akan ditunjukkan bahwa $d(x, y) = d(y, x)$.
Berdasarkan definisi pemetaan d di atas, jelas dipenuhi karena $d(x, y)$ bernilai real positif dan untuk nilai mutlak dipenuhi. Jadi benar bahwa $d(x, y) = d(y, x)$.

(d3) Akan ditunjukkan bahwa untuk suatu $b \geq 1$ berlaku

$$d(x, y) \leq b[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)],$$

(d3.a) Untuk $x, y, u, v \in A$ dengan $x = y$, maka:

$$0 = d(x, y) \geq b[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)] = b(0.65).$$

Sehingga, untuk $b \geq 1$ berlaku $d(x, y) \geq b[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)]$.

(d3.b) Untuk $x = 1, y = 4, u = 2$, dan $v = 3$, maka:

$$9 = d(x, y) \geq b[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)] = b(3).$$

Jika dipilih $b = 3 > 1$ maka berlaku $d(x, y) \leq b[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)]$.

(d3.c) Untuk $x, y, u, v \in X$ yang lainnya dibuktikan secara analog. Berdasarkan uraian di atas dari (d3.a) - (d3.c), terbukti bahwa

$$d(x, y) \leq b[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)], dengan\, b = 3 > 1.$$

Oleh karena (d1) - (d3) terpenuhi, maka benar bahwa (X, d) merupakan ruang metrik-b segi empat.

Kedua, akan dibentuk barisan Picard $\{x_n\}$. Diberikan $x_0 = 1$, maka berdasarkan pemetaan T di atas, diperoleh barisan Picard: $\{x_n\} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \cdots\}$.

Ketiga, akan ditunjukkan bahwa T merupakan pemetaan terdominasi-α pada barisan Picard $\{x_n\}$. Berdasarkan hasil kedua, diperoleh barisan $\{x_n\} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \cdots\}$, sehingga:

(a) Untuk $x = 1$, maka $T(1) = \frac{1}{3}$, sehingga diperoleh $\alpha(1, T(1)) = \alpha\left(1, \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{5} \geq 1$.
(b) Untuk $x = \frac{1}{3}$, maka $T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5}$, sehingga diperoleh $\alpha\left(\frac{1}{3}, T\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \alpha\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{5} \geq 1$.
(c) Untuk $x = \frac{1}{5}$, maka $T\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$, sehingga diperoleh $\alpha\left(\frac{1}{5}, T\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \alpha\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{5} \geq 1$.

Karena $\alpha(x, Tx) \geq 1$ untuk setiap $x \in \{x_n\} \subseteq X$, maka benar bahwa T merupakan pemetaan terdominasi- α pada $\{x_n\}$.

Keempat, akan ditunjukkan bahwa $d(Tx, Ty) \leq \delta D(x, y), \forall x, y \in \{x_n\}$.
Didefinisikan $\delta(t) = \frac{t}{10}$ untuk $t > 0$. Selanjutnya berdasarkan hasil kedua diperoleh barisan $\{x_n\} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \cdots\}$, sehingga untuk $x = \frac{1}{3}$ dan $y = 1$, diperoleh:

$$d(Tx, Ty) = d(T(\frac{1}{3}), T(1)) = d(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}) = 0.6. \tag{3.8}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\delta\left(D\left(x, y\right)\right) &= \delta\left(D\left(\frac{1}{3}, 1\right)\right) \\
&= \delta\left(\text{maks}\left\{d\left(\frac{1}{3}, 1\right), \frac{d\left(\frac{1}{3}, T\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cdot d\left(1, T\left(1\right)\right)}{a + d\left(\frac{1}{3}, 1\right)}, d\left(\frac{1}{3}, T\left(\frac{1}{3}\right)\right), d\left(1, T\left(1\right)\right)\right\}\right) \\
&= \delta\left(\text{maks}\left\{d\left(\frac{1}{3}, 1\right), \frac{d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) \cdot d\left(1, \frac{1}{3}\right)}{a + d\left(\frac{1}{3}, 1\right)}, d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right), d\left(1, \frac{1}{3}\right)\right\}\right), \\
&= \delta\left(\text{maks}\left\{0.44, \frac{0.6 \cdot 0.44}{a + 0.44}, 0.6, 0.44\right\}\right), \\
&= \delta\left(0.6\right) = \frac{0.6}{10} = 0.06.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Berdasarkan persamaan (3.8) dan persamaan (3.9) diperoleh $0,6 \geq 0,06$. Oleh karena itu $d(Tx, Ty) \nleq \delta D(x, y)$. Hal ini berakibat pertidaksamaan pada Teorema 3.1 tidak terpenuhi. Jadi pemetaan T yang diberikan pada Contoh 3.2 tidak memenuhi semua hipotesa pada Teorema 3.1.

Berikut diberikan contoh yang menyatakan bahwa pemetaan T mempunyai titik tetap di X.

Contoh 3.3. Diberikan himpunan $X = A \cup B$ dimana $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \{2, 3, 4, 5\}\right\}$ dan $B = [1, \infty)$. Pemetaan $d : X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan denga:

$$d(x, y) = \begin{cases} d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) = 0.03, & \\ d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = 0.02, & \\ d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = d\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) = 0.6, & \\ \mid x - y \mid^2, & \text{untuk } x, y \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Selanjutnya, diberikan pemetaan $T_1 : X \to X$ yang didefinisikan oleh:

$$T_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{jika } x \in A, \\ \frac{1}{2}, & \text{jika } x = 1, \\ 9x^{100} + 85, & \text{untuk } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Pemetaan $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan dengan:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{5}, & \text{jika } x, y \in \{x_n\}, \\ \frac{4}{7}, & \text{untuk } x, y \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Maka dapat ditunjukkan bahwa T_1 mempunyai titik tetap di X.

Contoh 3.3 mendefinisikan ulang pemetaan T yang disebutkan di Contoh 3.2 sehingga contoh ini memenuhi semua hipotesa pada Teorema 3.1. Pembuktiannya dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti konstruksi pembuktian pada Contoh 3.2.

4. Kesimpulan

Pembuktian mengenai titik tetap pada pemetaan terdominasi-α di ruang metrik-b segi empat lengkap dimulai dengan membentuk suatu barisan Picard sehingga barisan tersebut merupakan barisan Cauchy yang konvergen ke suatu titik. Selanjutnya, titik tersebut yang akan menjadi calon titik tetap pada pemetaan terdominasi-α. Contoh yang diberikan di artikel ini memenuhi semua hipotesa pada Teorema 3.1 dengan mendefinisikan ulang pemetaan yang memenuhi kondisi terdominasi-α.

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga atas dukungan dalam menyelesaikan penelitian ini.

Daftar Pustaka

[1] Afandi. M.I., 2011, *Teorema Ketunggalan Titik Tetap di Ruang metrik-b Lengkap*, *Skripsi*, tidak diterbitkan, UIN Sunan Kalijaga

[2] Arshad, M., Kadelburg, Z., Redenovic, S., Shoaib, A., Shukla, S., 2017, Fixed Points of α- Dominated Mappings on Dislocated Quasi Metric Spaces, *Filomat* **31**(11): 3041 – 3056

[3] Bartle, R. G., dan Sherbert, D.R., 2011, *Introduction to Real Analysis Fourth Edition*, University of Illinois, Urbana-Champaign

[4] Demma, M., Vetro, P., 2015, Picard Sequence and Fixed Point Results on b-Metric Spaces, *Journal of Function Spaces* Vol **2**: 1 – 6

[5] Ding, H.S., Imdad, M., Redenovi, S., Vujaconi, J., 2016, On Some Fixed Point Results in b-metric, Rectangular and b-rectangular Metric Spaces, *Arab Journal of Mathematical Sciences* Vol. **22**: 151 – 164

[6] George, R., Redenovi, S., Reshma, K.P., Shukla, S., 2015, Rectangular b-metric Space and Contraction Principles, *J. Nonlinear Sci. Appl.* Vol. **8**: 1005 – 1013

[7] Kreyszig, E., 1978, *Introductory Functional Analysis with Application*, John Wiley and Sons, New York

[8] Shirali, Satish and Vasudeva, Harkrishan L., 2006, *Metric Spaces*, London: SpringerVerlag

[9] Shoaib, A., 2015, $\alpha - v$ Dominated Mappings and Related Common Fixed Point Results in Closed Ball, *J. Concr. Appl. Math.* Vol. **13**: 152 – 170

[10] Shoaib, A., Rasham, T., Marino, M., Lee J.R., Park, C., 2020, Fixed Point Results for Dominated Mappings in Rectangular b-metric Spaces with Applications, *AIMS Mathematics* Vol. **5**: 5221 – 5229