

BILANGAN KROMATIK LOKASI GABUNGAN DUA GRAF KIPAS F_n UNTUK BEBERAPA $n, n \geq 3$

FAKHRI ZIKRA, DES WELYYANTI*, LYRA YULIANTI

*Departemen Matematika dan Sains Data,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 fakhriizikraa@gmail.com, wely@sci.unand.ac.id, lyra@sci.unand.ac.id*

Diterima 7 Februari 2022 Direvisi 2 Maret 2022 Dipublikasikan 30 Juli 2022

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu k -pewarnaan dari G . Kelas warna pada G adalah himpunan titik dengan warna i , dinotasikan S_i , $1 \leq i \leq k$. Misalkan Π adalah suatu partisi terurut dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang saling bebas $S_1, S_2, \dots, S_k$, dengan titik-titik di S_i diberi warna i , $1 \leq i \leq k$. Jarak suatu titik v ke S_i , dinotasikan $d(v, S_i)$ didefinisikan sebagai $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$. Kode warna dari suatu titik $v \in V$ didefinisikan sebagai k -vektor yaitu:

$$c_{\Pi}(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)).$$

Jika setiap dua titik di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π , maka c disebut pewarnaan lokasi untuk G . Banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi untuk G , dinotasikan $\chi_L(G)$. Misalkan H adalah graf tak terhubung dan c adalah pewarnaan- k titik pada H yang menginduksi partisi Π dari $V(H)$. Pewarnaan c dikatakan pewarnaan k -lokasi jika semua kode warna dari semua titik di H berbeda. Bilangan kromatik lokasi dari graf H , dinotasikan $\chi'_L(H)$, adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga H mempunyai k -pewarnaan lokasi. Pada tulisan ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi dari gabungan dua graf kipas F_n dengan $n \geq 3$.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi, Graf Kipas, Kode Warna

1. Pendahuluan

Bilangan kromatik lokasi untuk pertama kalinya dikenalkan oleh Chartrand dkk pada tahun 2002. Konsep bilangan kromatik lokasi merupakan konsep pewarnaan titik suatu graf yang dipadukan dengan konsep dimensi partisi suatu graf. Pewarnaan titik suatu graf adalah pemberian warna ke semua titik pada suatu graf, dengan ketentuan setiap titik yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan titik pada suatu graf disebut bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$.

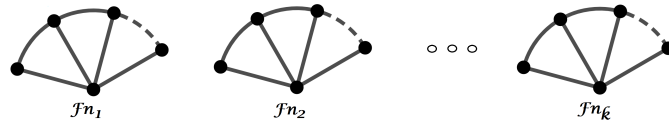
*penulis korespondensi

Penelitian Welyyanti dkk. pada tahun 2014 [8] menghasilkan suatu teori tentang perluasan pengertian bilangan kromatik lokasi suatu graf yang dapat diaplikasikan pada semua jenis graf termasuk pada graf tak terhubung. Selain itu, Behtoei dkk. [4] juga membahas tentang bilangan kromatik lokasi dari graf kipas. Pada artikel ini akan dibahas tentang bilangan kromatik lokasi dari graf yang merupakan gabungan dari dua graf kipas F_n dengan $n \geq 3$.

2. Beberapa Definisi

Definisi dasar teori graf yang digunakan dalam artikel ini dikutip dari [5].

Graf Kipas (F_n) merupakan suatu graf dengan $n + 1$ titik, dimana satu titik berderajat n , dua titik berderajat 2, dan $n - 2$ titik lainnya berderajat 3. Suatu graf tak terhubung yang dibentuk oleh beberapa gabungan graf kipas F_n dinotasikan sebagai $H = kF_n$, untuk $k \geq 2$, $n \geq 3$. Pada Gambar 1 dapat dilihat Graf $H = kF_n$ untuk $k \geq 1$, $n \geq 2$.



Gambar 1. Graf $H = kF_n$ untuk $k \geq 2$, $n \geq 2$

Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$, untuk u dan v yang bertetangga di G . Misalkan S_i adalah himpunan titik yang diberi warna i , untuk selanjutnya disebut sebagai kelas warna. Himpunan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k -pasang terurut

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Titik $v \in V(G)$ disebut titik dominan jika $d(v, S_i) = 1$ untuk $v \notin S_i$ dan 0 untuk yang lainnya. Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Berikut teorema yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi suatu graf yang diambil dari [6].

Teorema 2.1. [6] *Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) \neq N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari titik-titik di G ke dalam kelas warna S_i . Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misalkan S_i dari Π . Akibatnya $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$. $\square$

Pada graf tak terhubung, definisikan bilangan kromatik lokasi dari graf tak terhubung sebagai berikut. Misalkan H adalah graf tak terhubung dan c adalah pewarnaan- k titik pada H yang menginduksi partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dari $V(H)$. Kode warna dari titik $v \in V(H)$ adalah

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)),$$

dengan $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Pewarnaan c dikatakan pewarnaan lokasi- k jika semua kode warna dari semua titik di H berbeda. Bilangan kromatik lokasi dari graf tak terhubung H , dinotasikan $\chi'_L(H)$, adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga H mempunyai k -pewarnaan lokasi. Jika tidak ada nilai k yang memenuhi maka $\chi'_L(H) = \infty$. Akibatnya bilangan kromatik lokasi untuk graf tak terhubung dapat bernilai hingga dan tak hingga [6].

Berikut adalah teorema yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung yang diambil dari [8].

Teorema 2.2. [8] Untuk setiap i , misal G_i adalah suatu graf terhubung dan misalkan $H = \bigcup_{i=1}^m G(i)$. Jika $\chi'_L(H) < \infty$, maka $s \leq \chi'_L(H) \leq t$, dimana $s = \max\{\chi_L(G_i) | i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ dan $t = \min\{|V(G_i)| | i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$.

Bukti. Karena $s = \max\{\chi_L(G_i) | i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$, maka terdapat suatu bilangan bulat $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ sedemikian sehingga $\chi_L(G_k) = s$. Ini berarti bahwa setiap pewarnaan lokasi graf H harus memiliki paling sedikit s warna di setiap komponen dari H . Akibatnya $\chi'_L(H) \geq s$. Selanjutnya, akan ditunjukkan batas atas dari $\chi'_L(H)$. Karena $t = \min\{|V(G_i)| | i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$, maka terdapat suatu bilangan bulat $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ sedemikian sehingga $\chi'_L(G_k) = t$. Ini berarti bahwa pewarnaan lokasi dari H harus memiliki paling banyak t warna di setiap komponen dari H . Akibatnya $\chi'_L(H) \leq t$. $\square$

3. Pembahasan

Pada Teorema 3.1 akan dibahas tentang bilangan kromatik lokasi dari gabungan Graf Kipas $H = kF_n$ untuk beberapa nilai n .

Teorema 3.1. Misalkan terdapat graf $H = kF_n$ untuk $k = 2$ dan $n \geq 3$, maka

$$\chi'_L(H) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 3 \text{ dan } 4, \\ 5, & \text{untuk } 8 \leq n \leq 15. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan terdapat graf $H = 2F_n$ untuk $n \geq 3$. Definisikan suatu pewarnaan $c : V(H) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$, dengan q merupakan banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan tersebut. Karena graf $H = 2F_n$ merupakan graf tak terhubung yang dibangun oleh dua graf kipas F_n , maka berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh:

$$q \leq \chi'_L(H) \leq n + 1.$$

Selanjutnya, akan ditentukan nilai q yang memenuhi $\chi'_L(H) = q$ dengan $k = 2$ untuk $n \geq 3$, yang akan dibagi menjadi kasus sebagai berikut.

Kasus 1. Untuk $n = 3$ dan $n = 4$.

(a) $n = 3$.

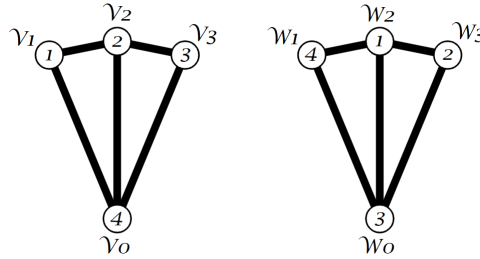
Misalkan terdapat graf $H_1 = 2F_3$. Berikan pewarnaan $c_1 : V(H_1) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sedemikian sehingga:

$$c_1(v) = \begin{cases} 1, & \text{jika } v = v_1, w_2, \\ 2, & \text{jika } v = v_2, w_3, \\ 3, & \text{jika } v = v_3, w_0, \\ 4, & \text{jika } v = v_0, w_1. \end{cases}$$

Diperoleh bahwa $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dengan

$$S_1 = \{v_1, w_2\}, S_2 = \{v_2, w_3\}, S_3 = \{v_3, w_0\} \text{ dan } S_4 = \{v_0, w_1\}.$$

Pewarnaan tersebut diberikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf $H = 2F_3$

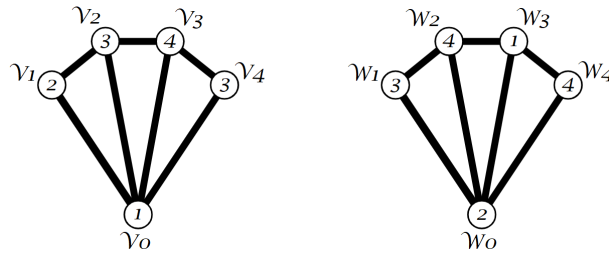
Diperoleh kode warna dari titik-titik pada graf H_1 sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c_\Pi(v_0) &= (d(v_0, S_1), d(v_0, S_2), d(v_0, S_3), d(v_0, S_4)) = (1, 1, 1, 0), \\ c_\Pi(v_1) &= (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4)) = (0, 1, 2, 1), \\ c_\Pi(v_2) &= (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4)) = (1, 0, 1, 1), \\ c_\Pi(v_3) &= (d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3), d(v_3, S_4)) = (2, 1, 0, 1), \\ c_\Pi(w_0) &= (d(w_0, S_1), d(w_0, S_2), d(w_0, S_3), d(w_0, S_4)) = (1, 1, 0, 1), \\ c_\Pi(w_1) &= (d(w_1, S_1), d(w_1, S_2), d(w_1, S_3), d(w_1, S_4)) = (1, 2, 1, 0), \\ c_\Pi(w_2) &= (d(w_2, S_1), d(w_2, S_2), d(w_2, S_3), d(w_2, S_4)) = (0, 1, 1, 1), \\ c_\Pi(w_3) &= (d(w_3, S_1), d(w_3, S_2), d(w_3, S_3), d(w_3, S_4)) = (1, 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa titik-titik pada komponen F_3 di graf H_1 memiliki kode warna berbeda, sehingga $\chi'_L(H_1) \leq 4$. Karena terdapat dua titik dominan pada graf tersebut, jelas bahwa banyaknya warna yang digunakan adalah paling sedikit empat, sehingga $\chi'_L(H_1) \geq 4$.

(b) $n = 4$.

Dengan cara yang serupa, misalkan titik-titik graf $H_2 = 2F_4$ diberikan warna seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf $H_2 = 2F_4$

Kode warna dari titik-titik pada graf H_2 disajikan sebagai berikut.

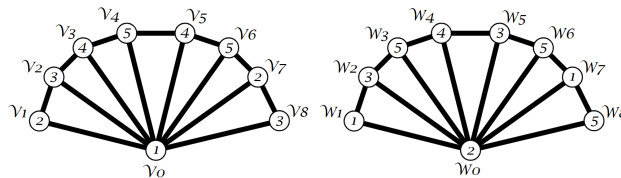
$$\begin{aligned} c_{\Pi}(v_0) &= (0, 1, 1, 1), & c_{\Pi}(v_1) &= (1, 0, 1, 2), \\ c_{\Pi}(v_2) &= (1, 1, 0, 1), & c_{\Pi}(v_3) &= (1, 2, 1, 0), \\ c_{\Pi}(v_4) &= (1, 2, 0, 1), & c_{\Pi}(w_0) &= (1, 0, 1, 1), \\ c_{\Pi}(w_1) &= (2, 1, 0, 1), & c_{\Pi}(w_2) &= (1, 1, 1, 0), \\ c_{\Pi}(w_3) &= (0, 1, 2, 1), & c_{\Pi}(w_4) &= (1, 1, 2, 0). \end{aligned}$$

Berdasarkan penyajian kode warna di atas, dapat dilihat bahwa setiap titik di H_2 memiliki kode warna berbeda. Jadi, $\chi'_L(H_2) \leq 4$. Selanjutnya, karena H_1 termuat dalam H_2 , maka haruslah $\chi'_L(H_2) \geq \chi'_L(H_1) = 4$.

Kasus 2. Untuk $8 \leq n \leq 15$.

(a) $n = 8$.

Misal diberikan 5-pewarnaan pada graf $H_3 = 2F_8$ seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Graf $H_3 = 2F_8$

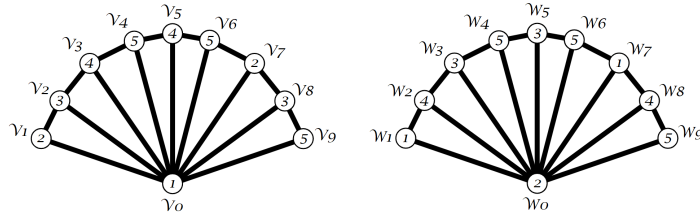
Kode warna dari titik-titik pada graf H_3 terhadap Π disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(v_0) &= (0, 1, 1, 1, 1), c_{\Pi}(v_1) = (1, 0, 1, 2, 2), c_{\Pi}(v_2) = (1, 1, 0, 1, 2) \\ c_{\Pi}(v_3) &= (1, 2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_4) = (1, 2, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_5) = (1, 2, 2, 0, 1), \\ c_{\Pi}(v_6) &= (1, 1, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_7) = (1, 0, 1, 2, 1), c_{\Pi}(v_8) = (1, 1, 0, 2, 2), \\ c_{\Pi}(w_0) &= (1, 0, 1, 1, 1), c_{\Pi}(w_1) = (0, 1, 1, 2, 2), c_{\Pi}(w_2) = (1, 1, 0, 2, 1), \\ c_{\Pi}(w_3) &= (2, 1, 1, 1, 0), c_{\Pi}(w_4) = (2, 1, 1, 0, 1), c_{\Pi}(w_5) = (2, 1, 0, 1, 1), \\ c_{\Pi}(w_6) &= (1, 1, 1, 2, 0), c_{\Pi}(w_7) = (0, 1, 2, 2, 1), c_{\Pi}(w_8) = (1, 1, 2, 2, 0). \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa semua titik di H_3 memiliki kode warna berbeda, sehingga diperoleh $\chi'_L(H_3) \leq 5$. Jika diberikan 4-pewarnaan, akan terdapat paling sedikit dua titik dominan dengan warna yang sama. Jadi, $\chi'_L(H_3) \geq 5$.

(b) $n = 9$.

Misalkan titik-titik pada graf $H_4 = 2F_9$ diberikan warna seperti pada Gambar 5.



Gambar 5. Graf $H_4 = 4F_9$

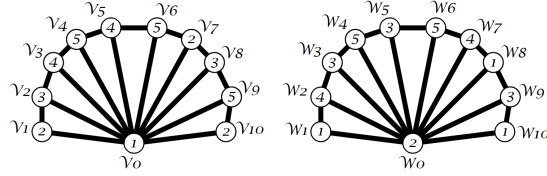
Kode warna dari titik-titik pada graf H_4 terhadap Π disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(v_0) &= (0, 1, 1, 1, 1), c_{\Pi}(v_1) = (1, 0, 1, 2, 2), c_{\Pi}(v_2) = (1, 1, 0, 1, 2), \\ c_{\Pi}(v_3) &= (1, 2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_4) = (1, 2, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_5) = (1, 2, 2, 0, 1), \\ c_{\Pi}(v_6) &= (1, 1, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_7) = (1, 0, 1, 2, 1), c_{\Pi}(v_8) = (1, 1, 0, 2, 1), \\ c_{\Pi}(v_9) &= (1, 2, 1, 2, 0), c_{\Pi}(w_0) = (1, 0, 1, 1, 1), c_{\Pi}(w_1) = (0, 1, 2, 1, 2), \\ c_{\Pi}(w_2) &= (1, 1, 1, 0, 2), c_{\Pi}(w_3) = (2, 1, 0, 1, 1), c_{\Pi}(w_4) = (2, 1, 1, 2, 0), \\ c_{\Pi}(w_5) &= (2, 1, 0, 2, 1), c_{\Pi}(w_6) = (1, 1, 1, 2, 0), c_{\Pi}(w_7) = (0, 1, 2, 1, 1), \\ c_{\Pi}(w_8) &= (1, 1, 2, 0, 1), c_{\Pi}(w_9) = (2, 1, 2, 1, 0). \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa titik-titik pada komponen F_9 di graf H_4 memiliki kode warna berbeda dan terbukti bahwa $\chi'_L(H_4) \leq 5$. Selanjutnya, karena H_3 termuat dalam H_4 , maka haruslah $\chi'_L(H_4) \geq \chi'_L(H_3) = 5$.

(c) $n = 10$.

Misalkan titik-titik pada graf $H_5 = 2F_{10}$ diberikan warna seperti pada Gambar 6.


 Gambar 6. Graf $H_4 = 2F_{10}$

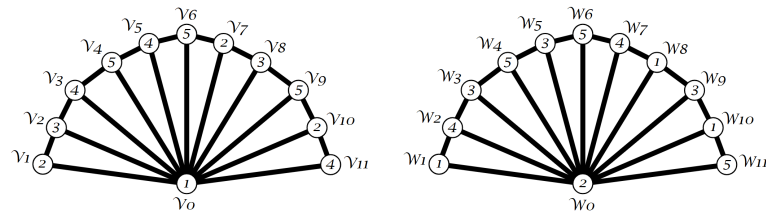
Kode warna dari titik-titik pada graf $H_5 = 2F_{10}$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 c_{\Pi}(v_0) &= (0, 1, 1, 1, 1), c_{\Pi}(v_1) = (1, 0, 1, 2, 2), c_{\Pi}(v_2) = (1, 1, 0, 1, 2), \\
 c_{\Pi}(v_3) &= (1, 2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_4) = (1, 2, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_5) = (1, 2, 2, 0, 1), \\
 c_{\Pi}(v_6) &= (1, 1, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_7) = (1, 0, 1, 2, 1), c_{\Pi}(v_8) = (1, 1, 0, 2, 1), \\
 c_{\Pi}(v_9) &= (1, 1, 1, 2, 0), c_{\Pi}(v_{10}) = (1, 0, 2, 2, 1), c_{\Pi}(w_0) = (1, 0, 1, 1, 1), \\
 c_{\Pi}(w_1) &= (0, 1, 2, 1, 2), c_{\Pi}(w_2) = (1, 1, 1, 0, 2), c_{\Pi}(w_3) = (2, 1, 0, 1, 1), \\
 c_{\Pi}(w_4) &= (2, 1, 1, 2, 0), c_{\Pi}(w_5) = (2, 1, 0, 2, 1), c_{\Pi}(w_6) = (2, 1, 1, 1, 0), \\
 c_{\Pi}(w_7) &= (1, 1, 2, 0, 1), c_{\Pi}(w_8) = (0, 1, 1, 1, 2), c_{\Pi}(w_9) = (1, 1, 0, 2, 2), \\
 c_{\Pi}(w_{10}) &= (0, 1, 1, 2, 2).
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa titik-titik pada komponen F_{10} di graf $H_5 = 2F_{10}$ memiliki kode warna berbeda. Terbukti bahwa $\chi'_L(H_5) \leq 5$. Selanjutnya, karena H_4 termuat dalam H_5 , maka haruslah $\chi'_L(H_5) \geq \chi'_L(H_4) = 5$.

(d) $n = 11$.

Misalkan titik-titik pada graf $H_6 = 2F_{11}$ diberikan warna seperti pada Gambar 7.


 Gambar 7. Graf $H_6 = 2F_{11}$

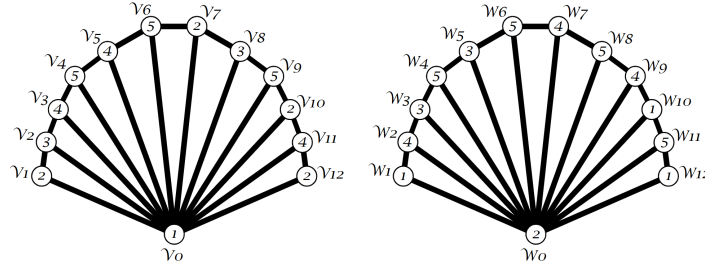
Kode warna dari titik-titik pada graf H_6 disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
c_{\Pi}(v_0) &= (0, 1, 1, 1, 1), c_{\Pi}(v_1) = (1, 0, 1, 2, 2), c_{\Pi}(v_2) = (1, 1, 0, 1, 2) \\
c_{\Pi}(v_3) &= (1, 2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_4) = (1, 2, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_5) = (1, 2, 2, 0, 1), \\
c_{\Pi}(v_6) &= (1, 1, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_7) = (1, 0, 1, 2, 1), c_{\Pi}(v_8) = (1, 1, 0, 2, 1), \\
c_{\Pi}(v_9) &= (1, 1, 1, 2, 0), c_{\Pi}(v_{10}) = (1, 0, 2, 1, 1), c_{\Pi}(v_{11}) = (1, 1, 2, 0, 2), \\
c_{\Pi}(w_0) &= (1, 0, 1, 1, 1), c_{\Pi}(w_1) = (0, 1, 2, 1, 2), c_{\Pi}(w_2) = (1, 1, 1, 0, 2), \\
c_{\Pi}(w_3) &= (2, 1, 0, 1, 1), c_{\Pi}(w_4) = (2, 1, 1, 2, 0), c_{\Pi}(w_5) = (2, 1, 0, 2, 1), \\
c_{\Pi}(w_6) &= (2, 1, 1, 1, 0), c_{\Pi}(w_7) = (1, 1, 2, 0, 1), c_{\Pi}(w_8) = (0, 1, 1, 1, 2), \\
c_{\Pi}(w_9) &= (1, 1, 0, 2, 2), c_{\Pi}(w_{10}) = (0, 1, 1, 2, 1), c_{\Pi}(w_{11}) = (1, 1, 2, 2, 0),
\end{aligned}$$

Dari penyajian kode warna di atas, dapat dilihat bahwa titik-titik pada komponen F_{11} di graf H_6 memiliki kode warna berbeda. Terbukti bahwa $\chi'_L(H_6) \leq 5$. Selanjutnya, karena H_5 termuat dalam H_6 , maka haruslah $\chi_L(H_6) \geq \chi'_L(H_5) = 5$.

(e) $n = 12$.

Misalkan titik-titik pada graf $H_7 = 2F_{12}$ diberikan warna seperti pada Gambar 8.



Gambar 8. Graf $H_7 = 2F_{12}$

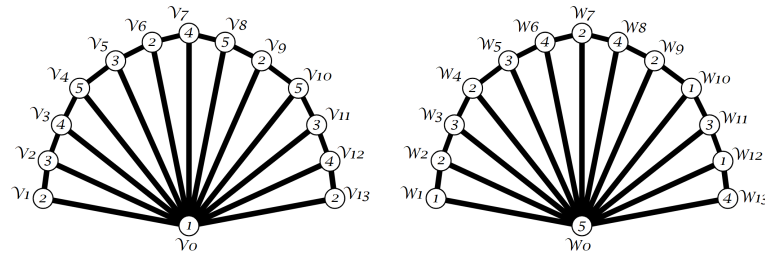
Kode warna dari titik-titik pada graf H_7 disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
c_{\Pi}(v_0) &= (0, 1, 1, 1, 1), c_{\Pi}(v_1) = (1, 0, 1, 2, 2), c_{\Pi}(v_2) = (1, 1, 0, 1, 2), \\
c_{\Pi}(v_3) &= (1, 2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_4) = (1, 2, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_5) = (1, 2, 2, 0, 1) \\
c_{\Pi}(v_6) &= (1, 1, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_7) = (1, 0, 1, 2, 1), c_{\Pi}(v_8) = (1, 1, 0, 2, 1), \\
c_{\Pi}(v_9) &= (1, 1, 1, 2, 0), c_{\Pi}(v_{10}) = (1, 0, 2, 1, 1), c_{\Pi}(v_{11}) = (1, 1, 2, 0, 2), \\
c_{\Pi}(v_{12}) &= (1, 0, 2, 1, 2), c_{\Pi}(w_0) = (1, 0, 1, 1, 1), c_{\Pi}(w_1) = (0, 1, 2, 1, 2), \\
c_{\Pi}(w_2) &= (1, 1, 1, 0, 2), c_{\Pi}(w_3) = (2, 1, 0, 1, 1), c_{\Pi}(w_4) = (2, 1, 1, 2, 0), \\
c_{\Pi}(w_5) &= (2, 1, 0, 2, 1), c_{\Pi}(w_6) = (2, 1, 1, 1, 0), c_{\Pi}(w_7) = (2, 1, 2, 0, 1), \\
c_{\Pi}(w_8) &= (2, 1, 2, 1, 0), c_{\Pi}(w_9) = (1, 1, 2, 0, 1), c_{\Pi}(w_{10}) = (0, 1, 2, 1, 1), \\
c_{\Pi}(w_{11}) &= (1, 1, 2, 2, 0), c_{\Pi}(w_{12}) = (0, 1, 1, 2, 1).
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa titik-titik pada komponen F_{12} di graf H_7 memiliki kode warna berbeda. Terbukti bahwa $\chi'_L(H_7) \leq 5$. Selanjutnya, karena H_6 termuat dalam H_7 , maka haruslah $\chi'_L(H_7) \geq \chi'_L(H_6) = 5$.

(f) $n = 13$.

Misalkan titik-titik pada graf $H_8 = 2F_{13}$ diberikan warna seperti pada Gambar 9.



Gambar 9. Graf $H_8 = 2F_{13}$

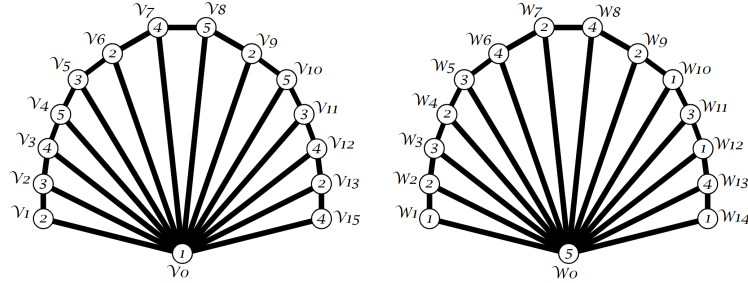
Kode warna dari titik-titik pada graf H_8 disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 c_{\Pi}(v_0) &= (0, 1, 1, 1, 1), c_{\Pi}(v_1) = (1, 0, 1, 2, 2), c_{\Pi}(v_2) = (1, 1, 0, 1, 2), \\
 c_{\Pi}(v_3) &= (1, 2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_4) = (1, 2, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_5) = (1, 1, 0, 2, 1), \\
 c_{\Pi}(v_6) &= (1, 0, 1, 1, 2), c_{\Pi}(v_7) = (1, 1, 2, 0, 1), c_{\Pi}(v_8) = (1, 1, 2, 1, 0), \\
 c_{\Pi}(v_9) &= (1, 0, 2, 2, 1), c_{\Pi}(v_{10}) = (1, 1, 1, 2, 0), c_{\Pi}(v_{11}) = (1, 2, 0, 1, 1), \\
 c_{\Pi}(v_{12}) &= (1, 1, 1, 0, 2), c_{\Pi}(v_{13}) = (1, 0, 2, 1, 2), c_{\Pi}(w_0) = (1, 1, 1, 1, 0), \\
 c_{\Pi}(w_1) &= (0, 1, 2, 2, 1), c_{\Pi}(w_2) = (1, 0, 1, 2, 1), c_{\Pi}(w_3) = (2, 1, 0, 2, 1), \\
 c_{\Pi}(w_4) &= (2, 0, 1, 2, 1), c_{\Pi}(w_5) = (2, 1, 0, 1, 1), c_{\Pi}(w_6) = (2, 1, 1, 0, 1), \\
 c_{\Pi}(w_7) &= (2, 0, 2, 1, 1), c_{\Pi}(w_8) = (2, 1, 2, 0, 1), c_{\Pi}(w_9) = (1, 0, 2, 1, 1), \\
 c_{\Pi}(w_{10}) &= (0, 1, 1, 2, 1), c_{\Pi}(w_{11}) = (1, 2, 0, 2, 1), c_{\Pi}(w_{12}) = (0, 2, 1, 1, 1), \\
 c_{\Pi}(w_{13}) &= (1, 2, 2, 0, 1).
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa titik-titik pada komponen F_{13} di graf H_8 memiliki kode warna berbeda. Terbukti bahwa $\chi'_L(H) \leq 5$. Selanjutnya, karena H_7 termuat dalam H_8 , maka haruslah $\chi'_L(H_8) \geq \chi'_L(H_7) = 5$.

(g) $n = 14$.

Misalkan titik-titik pada graf H_9 diberikan warna seperti pada Gambar 10.

Gambar 10. Graf $H_9 = 2F_{14}$

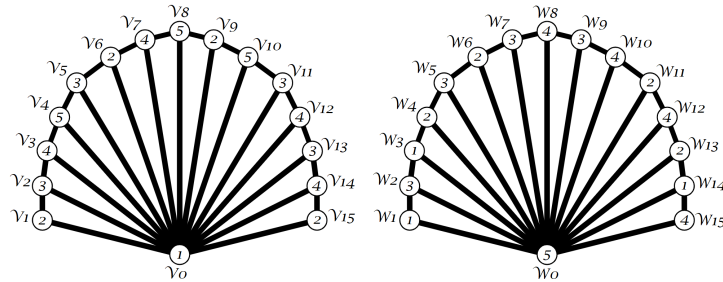
Kode warna dari titik-titik pada graf H_9 disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 c_{\Pi}(v_0) &= (0, 1, 1, 1, 1), c_{\Pi}(v_1) = (1, 0, 1, 2, 2), c_{\Pi}(v_2) = (1, 1, 0, 1, 2), \\
 c_{\Pi}(v_3) &= (1, 2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_4) = (1, 2, 1, 1, 0), c_{\Pi}(v_5) = (1, 1, 0, 2, 1), \\
 c_{\Pi}(v_6) &= (1, 0, 1, 1, 2), c_{\Pi}(v_7) = (1, 1, 2, 0, 1), c_{\Pi}(v_8) = (1, 1, 2, 1, 0), \\
 c_{\Pi}(v_9) &= (1, 0, 2, 2, 1), c_{\Pi}(v_{10}) = (1, 1, 1, 2, 0), c_{\Pi}(v_{11}) = (1, 2, 0, 1, 1), \\
 c_{\Pi}(v_{12}) &= (1, 1, 1, 0, 2), c_{\Pi}(v_{13}) = (1, 0, 2, 1, 2), c_{\Pi}(v_{14}) = (1, 1, 2, 0, 2), \\
 c_{\Pi}(w_0) &= (1, 1, 1, 1, 0), c_{\Pi}(w_1) = (0, 1, 2, 2, 1), c_{\Pi}(w_2) = (1, 0, 1, 2, 1), \\
 c_{\Pi}(w_3) &= (2, 1, 0, 2, 1), c_{\Pi}(w_4) = (2, 0, 1, 2, 1), c_{\Pi}(w_5) = (2, 1, 0, 1, 1), \\
 c_{\Pi}(w_6) &= (2, 1, 1, 0, 1), c_{\Pi}(w_7) = (2, 0, 2, 1, 1), c_{\Pi}(w_8) = (2, 1, 2, 0, 1), \\
 c_{\Pi}(w_9) &= (1, 0, 2, 1, 1), c_{\Pi}(w_{10}) = (0, 1, 1, 2, 1), c_{\Pi}(w_{11}) = (1, 2, 0, 2, 1), \\
 c_{\Pi}(w_{12}) &= (0, 2, 1, 1, 1), c_{\Pi}(w_{13}) = (1, 2, 2, 0, 1), c_{\Pi}(w_{14}) = (0, 2, 2, 1, 1).
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa titik-titik pada komponen F_{14} di graf H_9 memiliki kode warna berbeda. Terbukti bahwa $\chi'_L(H_9) = 5$. Selanjutnya, karena H_8 termuat dalam H_9 , maka haruslah $\chi'_L(H_9) \geq \chi'_L(H_8) = 5$.

(h) $n = 15$.

Misalkan titik-titik pada graf $H_{10} = 2F_{15}$ diberikan warna seperti pada Gambar 11.

Gambar 11. Graf $H_{10} = 2F_{15}$

Kode warna dari titik-titik pada graf H_{10} disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(v_0) &= (0, 1, 1, 1, 1), c_{\Pi}(v_1) = (1, 0, 1, 2, 2), c_{\Pi}(v_2) = (1, 1, 0, 1, 2), \\ c_{\Pi}(v_3) &= (1, 2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_4) = (1, 2, 1, 1, 0), c_{\Pi}(v_5) = (1, 1, 0, 2, 1), \\ c_{\Pi}(v_6) &= (1, 0, 1, 1, 2), c_{\Pi}(v_7) = (1, 1, 2, 0, 1), c_{\Pi}(v_8) = (1, 1, 2, 1, 0), \\ c_{\Pi}(v_9) &= (1, 0, 2, 2, 1), c_{\Pi}(v_{10}) = (1, 1, 1, 2, 0), c_{\Pi}(v_{11}) = (1, 2, 0, 1, 1), \\ c_{\Pi}(v_{12}) &= (1, 2, 1, 0, 2), c_{\Pi}(v_{13}) = (1, 2, 0, 1, 2), c_{\Pi}(v_{14}) = (1, 1, 1, 0, 2), \\ c_{\Pi}(v_{15}) &= (1, 0, 2, 1, 2), c_{\Pi}(w_0) = (1, 1, 1, 1, 0), c_{\Pi}(w_1) = (0, 2, 1, 2, 1), \\ c_{\Pi}(w_2) &= (1, 2, 0, 2, 1), c_{\Pi}(w_3) = (0, 1, 1, 2, 1), c_{\Pi}(w_4) = (1, 0, 1, 2, 1), \\ c_{\Pi}(w_5) &= (2, 1, 0, 2, 1), c_{\Pi}(w_6) = (2, 0, 1, 2, 1), c_{\Pi}(w_7) = (2, 1, 0, 1, 1), \\ c_{\Pi}(w_8) &= (2, 2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(w_9) = (2, 2, 0, 1, 1), c_{\Pi}(w_{10}) = (2, 1, 1, 0, 1), \\ c_{\Pi}(w_{11}) &= (2, 0, 2, 1, 1), c_{\Pi}(w_{12}) = (2, 1, 2, 0, 1), c_{\Pi}(w_{13}) = (1, 0, 2, 1, 1), \\ c_{\Pi}(w_{14}) &= (0, 1, 2, 1, 1), c_{\Pi}(w_{15}) = (1, 2, 2, 0, 1). \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa titik-titik pada komponen F_{15} di graf H_{10} memiliki kode warna berbeda. Terbukti bahwa $\chi'_L(H) = 5$. Selanjutnya, karena H_9 termuat dalam H_{10} , maka haruslah $\chi'_L(H_{10}) \geq \chi'_L(H_9) = 5$. $\square$

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah dibahas bilangan kromatik lokasi dari gabungan dua graf kipas F_n untuk beberapa nilai n , dengan hasil sebagai berikut.

Misalkan terdapat graf $H = 2F_n$, maka:

$$\chi'_L(H) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 3 \text{ dan } 4, \\ 5, & \text{untuk } 8 \leq n \leq 15. \end{cases}$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Susila Bahri, bapak Syafrizal Sy, dan bapak Narwen yang telah memberikan kritikan dan masukan sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Asmiati and E.T. Baskoro, 2012, Characterizing All Graphs Containing Cycles With Locating-Chromatic Number 3, *AIP Conf. Proc*: 321 – 357
- [2] Asmiati, H. Assiyatun, E. T. Baskoro, D. Suprijanto, R. Simanjuntak and S. Uttunggadewa, 2012, The locating-chromatic number of frecracker graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences* Vol. **63**(1): 11 – 23
- [3] Azhari, M., 2020, Bilangan Kromatik Lokasi Graf Tak Terhubung dengan Graf Lintasan dan Graf Bintang Ganda sebagai Komponen-komponennya, *Skripsi S-1*, tidak diterbitkan, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, Indonesia
- [4] Behtoei, A. dan Anbarloei, M., 2014, The Locating Chromatic Number of The Join Graphs, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society* Vol. **40**(6): 1491 – 1504

- [5] Bondy, J.A., U.S.R. Murty, 1976, *Graph Theory with Application*, Elsevier Science Publishing, New York
- [6] Chartrand, G., M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang, 2002, The locating-chromatic number of a graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**: 89 – 101
- [7] Welyyanti, D., 2018, Beberapa Syarat Cukup untuk Bilangan Kromatik Lokasi Hingga pada Graf Tak Terhubung, *Eksakta* Vol. **19**(1): 76 – 82
- [8] Welyyanti, D., Baskoro, E.T, Simanjuntak, R., Utungadewa, S., 2014, The Locating-Chromatic Number of Disconnected Graph, *Far East Journal of Mathematical Science* Vol. **94**(2): 169 – 182
- [9] Welyyanti, D., Lestari, R., Putri, S.R., 2019, The Locating-Chromatic Number of Disconnected Graph with Path and Cycle Graph as its Components, *IOP Conference Series*, **1317**: 1 – 7