Jurnal Matematika UNAND
Vol. **11** No. **2** Hal. 133 – 140
Edisi April 2022
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

TEOREMA TITIK TETAP UNTUK KONTRAKSI REICH SIKLIK PADA RUANG KUASI αB-METRIK

ASRIADI*, NURWAN, LA ODE NASHAR

Program Studi Matematika,
FMIPA Universitas Negeri Gorontalo,
Jl. Jendral Sudirman No. 6, Gorontalo
email : asriadi@ung.ac.id, nurwan@ung.ac.id, laode.nashar@ung.ac.id

Diterima 7 Februari 2022 Direvisi 26 Maret 2022 Dipublikasikan 30 April 2022

Abstrak. Pemetaan kontraksi Reich siklik pada ruang kuasi αB-metrik akan diperkenalkan dalam tulisan ini. Akan ditunjukkan bahwa setiap pemetaan kontraksi Reich siklik memiliki titik tetap yang tunggal. Selain itu, diberikan pula contoh fungsi yang memenuhi kontraksi Reich siklik.

Kata Kunci: Kontraksi Reich Siklik, Titik Tetap.

1. Pendahuluan

Ide terkait kontraksi Reich pertama kali muncul dalam artikel [1] yang merupakan hasil langsung dari Reich sendiri dalam konteks ruang metrik. Tipe kontraksi Reich selanjutnya mengalami perkembangan berupa generalisasi, bukan hanya pada ruang metrik, tetapi juga pada struktur ruang lain. Dalam konteks ruang metrik, tipe kontraksi Reich termuat dalam hasil pada [2], [8] dan [4]. Untuk struktur ruang b-metrik dan generalisasinya, tipe kontraksi Reich dapat ditemukan pada [6],[13] dan [14]. Tipe kontraksi Reich terkait teori graf termuat pada [9]. Dalam ranah ruang *cone*-metrik, tipe kontraksi Reich terterapkan pada [11], [7] dan [16].

Dalam keterhubungan dengan pemetaan siklik dalam struktur tertentu, kajian sifatnya dapat ditemukan dalam [5] terkhusus pada ranah ruang metrik parsial, pada [3] untuk ruang metrik, dan dalam [12] untuk domain ruang b-metrik.

Pada tahun 2016, Nurwahyu [10] memperkenalkan konsep ruang kuasi αb-metrik yang merupakan generalisasi dari ruang b-metrik. Selain itu, pada [10] telah dibahas tentang kontraksi Banach dalam hubungannya dengan titik tetap. Dengan dimotivasi oleh hasil pada [12] dan [10], tulisan ini akan mengkaji tentang hubungan antara kontraksi Reich dan titik tetap dalam struktur ruang kuasi αb-metrik dengan sudut pandang pemetaan siklik.

*penulis korespondensi

2. Metode penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi literatur dalam bentuk penelusuran artikel. Tujuannya adalah mencari artikel penelitian terkait dengan kontraksi Reich siklik, melakukan klaim, dan kemudian membuktikan klaim. Klaim yang telah dibuktikan selanjutnya diungkapkan dalam bentuk teorema.

3. Pembahasan

Berikut adalah definisi ruang kuasi αb-metrik yang diungkapkan Nurwahyu [10].

Definisi 3.1. [10] *Diberikan himpunan tak kosong W dan bilangan $\alpha, b \in \mathbb{R}$ dengan $0 \leq \alpha < 1$ dan $1 \leq b$. Misalkan pemetaan $d : W^2 \to [0, \infty)$ memenuhi*

$$d(u,v) = d(v,u) = 0 \text{ jika dan hanya jika } u = v; \tag{3.1}$$

$$d(u,v) \leq \alpha \cdot d(v,u) + \frac{b}{2}(d(u,w) + d(w,v)) \tag{3.2}$$

*untuk semua $u, v, w \in W$. Maka (W, d) disebut sebuah **ruang kuasi αb-metrik**.*

Contoh 3.2. [10] Untuk bilangan riil $\mathbb{R}$, didefinisikan pemetaan $d : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ dimana

$$d(u,v) = \Bigg(\operatorname{sgn}|u - v|\Bigg)\Bigg(2u^2 + v^2\Bigg) \tag{3.3}$$

untuk semua $u, v \in \mathbb{R}$. Maka $(\mathbb{R}, d)$ adalah sebuah ruang kuasi αb-metrik dengan $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $b = 2$.

Definisi 3.3. [10] *Diberikan sebuah ruang kuasi αb-metrik (W, d). Sebuah barisan $\{a_n\}$ pada W disebut **konvergen** ke suatu $a \in W$ jika $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = \lim_{n\to\infty} d(a, a_n) = 0$, ditulis $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*

Definisi 3.4. [10] *Diberikan sebuah ruang kuasi αb-metrik (W, d). Sebuah barisan $\{a_n\}$ pada W disebut sebuah **barisan Cauchy** jika $\lim_{m,n\to\infty} d(a_m, a_n) = \lim_{m,n\to\infty} d(a_n, a_m) = 0$.*

Definisi 3.5. [10] *Sebuah ruang kuasi αb-metrik (W, d) dikatakan **lengkap** jika setiap barisan Cauchy pada W konvergen.*

Definisi 3.6. [10] *Diberikan sebuah ruang kuasi αb-metrik (W, d) dan sebuah pemetaan $\phi : W \to W$. Sebuah $u \in W$ disebut **titik tetap** dari ϕ jika $\phi(u) = u$.*

Definisi 3.7. *Diberikan sebuah ruang kuasi αb-metrik (W, d) dan sebuah pemetaan $\phi : W \to W$. Pemetaan ϕ dikatakan **kontinu** pada W jika untuk setiap barisan konvergen $\{a_n\}$ di W berlaku $\lim_{n\to\infty} \phi(a_n) = \phi\Bigg(\lim_{n\to\infty}(a_n)\Bigg)$.*

Berikut adalah sifat dasar dari sebuah ruang kuasi αb-metrik.

Teorema 3.8. [15] *Misalkan (W, d) adalah sebuah ruang kuasi αb-metrik. Maka semua $u, v, w \in W$ memenuhi*

$$d(u,v) \leq \frac{b}{2(1 - \alpha^2)}(d(u,w) + d(w,v)) \tag{3.4}$$

dan

$$d(u,v) + d(v,u) \leq \frac{b}{2(1-\alpha)}(d(u,w) + d(w,v) + d(v,w) + d(w,u)). \tag{3.5}$$

Teorema 3.9. [10] *Misalkan (W,d) adalah sebuah ruang kuasi αb-metrik. Maka setiap barisan $\{a_n\}$ di W memiliki limit yang tunggal.*

Teorema 3.10. [10] *Misalkan (W,d) adalah sebuah ruang kuasi αb-metrik. Maka setiap barisan konvergen $\{a_n\}$ di W adalah barisan Cauchy.*

Salah satu syarat cukup agar sebuah barisan dalam ruang kuasi αb-metrik adalah barisan Cauchy diungkapkan dalam teorema berikut.

Teorema 3.11. [10] *Misalkan $\{a_n\}$ adalah sebuah barisan pada sebuah ruang kuasi αb-metrik (W,d). Jika $\{a_n\}$ memenuhi*

$$d(a_{n+1}, a_{n+2}) \leq s \cdot d(a_n, a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}, \ \textit{dan} \tag{3.6}$$

$$d(a_{n+2}, a_{n+1}) \leq t \cdot d(a_{n+1}, a_n), \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

untuk suatu $s,t \in \mathbb{R}^+$ dengan $bs + \alpha^2 < 1$ dan $bt + \alpha^2 < 1$ maka $\{a_n\}$ adalah suatu barisan Cauchy di W.

Sebagai implikasi Teorema 3.11, diperoleh:

Teorema 3.12. [10] *Misalkan (W,d) adalah sebuah ruang kuasi αb-metrik. Jika sebuah pemetaan $\phi : W \to W$ memenuhi **kontraksi Banach** yaitu terdapat $\lambda \in (0,1)$ dengan $b\lambda + \alpha^2 < 1$ sehingga*

$$d(\phi(u), \phi(v)) \leq \lambda \cdot d(u,v) \tag{3.8}$$

untuk semua $u,v \in W$ maka ϕ memiliki titik tetap yang tunggal pada W.

Selanjutnya, terkait dengan pemetaan siklik, definisi dan teorema sebagai hasil dari penelitian sebelumnya dapat dibaca di [3], [5], dan [12].

Sekarang, dalam hubungannya dalam pemetaan siklik pada ruang kuasi αb-metrik, berikut adalah definisi dan teorema sebagai hasil penelitan pada tulisan ini.

Teorema 3.13. *Misalkan (W,d) adalah sebuah ruang kuasi αb-metrik. Jika sebuah pemetaan $\phi : W \to W$ memenuhi **kontraksi Reich***

$$\begin{aligned} d(\phi(u), \phi(v)) \leq\ & \theta \cdot \min\{d(u,v), d(v,u)\} + \mu \cdot \min\{d(u,\phi(u)), d(\phi(u),u)\} \\ & + \sigma \cdot \min\{d(v,\phi(v)), d(\phi(v),v)\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

dimana $\theta, \mu, \sigma \in \mathbb{R}^+$ dengan $b(\theta + \mu + \sigma) + \alpha^2 < 1$ untuk semua $u,v \in W$ maka ϕ memiliki titik tetap yang tunggal pada W.

Bukti. Definisikan barisan $\{a_n\}$ pada W dengan $a_{n+1} = \phi(a_n)$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Misalkan $\delta(p,q) := \min\{d(p,q), d(q,r)\}$ untuk $p,q \in W$. Berdasarkan (3.9) diperoleh

$$\begin{aligned} (\phi(a_n), \phi(a_{n+1})) &\leq \theta \cdot \delta(a_n, a_{n+1}) + \mu \cdot \delta(d(a_n, \phi(a_n))) + \sigma \cdot \delta(d(a_{n+1}, \phi(a_{n+1}))) \\ &\leq \theta \cdot d(a_n, a_{n+1}) + \mu \cdot d(a_n, \phi(a_n)) + \sigma \cdot d(a_{n+1}, \phi(a_{n+1})) \\ &= \theta \cdot d(a_n, a_{n+1}) + \mu \cdot d(a_n, a_{n+1})) + \sigma \cdot d(\phi(a_n), \phi(a_{n+1})) \end{aligned}$$

maka

$$(\phi(a_n), \phi(a_{n+1})) \leq \frac{\theta + \mu}{1 - \sigma} \cdot d(a_n, a_{n+1}). \tag{3.10}$$

Dengan cara yang sama, masih berdasarkan (3.9), diperoleh

$$\begin{aligned}(\phi(a_{n+1}), \phi(a_n)) &\leq \theta \cdot \delta(a_n, a_{n+1}) + \mu \cdot \delta(d(a_n, \phi(a_n))) + \sigma \cdot \delta(d(a_{n+1}, \phi(a_{n+1}))) \\ &\leq \theta \cdot d(a_{n+1}, a_n) + \mu \cdot d(\phi(a_{n+1}), a_{n+1}) + \sigma \cdot d(\phi(a_n), a_n) \\ &= \theta \cdot d(a_{n+1}, a_n) + \mu \cdot d(\phi(a_{n+1}), \phi(a_n)) + \sigma \cdot d(a_{n+1}, a_n)\end{aligned}$$

maka

$$(\phi(a_{n+1}), \phi(a_n)) \leq \frac{\theta + \sigma}{1 - \mu} \cdot d(a_{n+1}, a_n). \tag{3.11}$$

Karena barisan $\{a_n\}$ memenuhi (3.10) dan (3.11) dengan $\theta, \mu, \sigma \in \mathbb{R}^+$ dan $b(\theta+\mu+\sigma) + \alpha^2 < 1$ maka barisan $\{a_n\}$ memenuhi syarat cukup dari Teorema 3.11. Jadi, barisan $\{a_n\}$ adalah barisan Cauchy di W.

Selanjutnya, karena (W, d) lengkap maka terdapat $z \in W$ sehingga $\lim_{n\to\infty}(a_n) = z$. Akibat dari kekontinuan ϕ maka

$$\phi(z) = \phi(\lim_{n\to\infty}(a_n)) = \lim_{n\to\infty} \phi(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = z.$$

Jadi, z adalah sebuah titik tetap dari ϕ pada W.

Sekarang, andaikan ϕ memiliki titik tetap lain $z^* \in W$. Dari (3.9) akan diperoleh:

$$\begin{aligned}(z, z^*) &\leq (\phi(z), \phi(z^*)), \\ &\leq \theta \cdot \delta(z, z^*) + \mu \cdot \delta(d(z, \phi(z))) + \sigma \cdot \delta(d(z^*, \phi(z^*))), \\ &\leq \theta \cdot d(z, z^*) + \mu \cdot d(z, \phi(z)) + \sigma \cdot d(z^*, \phi(z^*)), \\ &= \theta \cdot d(z, z^*) + \mu \cdot d(z, z) + \sigma \cdot d(z^*, z^*), \\ &= \theta \cdot d(z, z^*),\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(z^*, z) &\leq (\phi(z^*), \phi(z)), \\ &\leq \theta \cdot \delta(z^*, z) + \mu \cdot \delta(d(z^*, \phi(z^*))) + \sigma \cdot \delta(d(z, \phi(z))), \\ &\leq \theta \cdot d(z^*, z) + \mu \cdot d(z^*, z^*)) + \sigma \cdot d(z, \phi(z)), \\ &= \theta \cdot d(z^*, z) + \mu \cdot d(z^*, z^*) + \sigma \cdot d(z, z), \\ &= \theta \cdot d(z^*, z),\end{aligned}$$

yang berarti

$$(1 - \theta) \cdot (d(z, z^*) + d(z, z^*) \leq 0. \tag{3.12}$$

Karena $1 - \theta > 0$, mengingat $\theta, \mu, \sigma \in \mathbb{R}^+$ dan $b(\theta + \mu + \sigma) + \alpha^2 < 1$, maka kondisi (3.12) akan memaksa $d(z, z^*) = d(z, z^*) = 0$. Akibatnya, $z^* = z$ yang berarti ϕ memiliki titik tetap yang tunggal pada W. □

Definisi 3.14. *Diberikan himpunan bagian tak kosong P dan Q dari sebuah ruang kuasi αb-metrik (W, d). Sebuah pemetaan $\psi : P \cup Q \to P \cup Q$ disebut* ***pemetaan siklik*** *jika $\psi(P) \subseteq Q$ dan $\psi(Q) \subseteq P$.*

Definisi 3.15. *Diberikan himpunan bagian tak kosong P dan Q dari sebuah ruang kuasi αb-metrik (W,d). Sebuah pemetaan siklik $\psi : P \cup Q \to P \cup Q$ disebut* ***kontraksi Reich siklik*** *jika terdapat $\theta, \mu, \sigma \in \mathbb{R}^+$ dengan $b(\theta + \mu + \sigma) + \alpha^2 < 1$ sehingga*

$$\begin{aligned} d(\psi(u), \psi(v)) &\leq \theta \cdot \min\{d(u,v), d(v,u)\} + \mu \cdot \min\{d(u,\psi(u)), d(\psi(u),u)\} \\ &\quad + \sigma \cdot \min\{d(v,\psi(v)), d(\psi(v),v)\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

untuk semua $u \in P$, $v \in Q$.

Teorema 3.16. *Diberikan sebuah ruang kuasi αb-metrik (W,d) dan sebuah kontraksi Reich siklik $\psi : P \cup Q \to P \cup Q$ dengan P dan Q himpunan bagian tak kosong dari W. Maka ψ memiliki titik tetap yang tunggal pada $P \cap Q$.*

Bukti. Ambil sebarang $h \in P$, maka $\psi(h) \in Q$. Pandang barisan $\{\psi_n(h)\}$ dengan $\psi_{n+1}(h) := \psi(\psi_n(h))$ dan $\psi_1(h) := \psi(h)$. Misalkan pula $\delta(p,q) := \min\{d(p,q), d(q,r)\}$ untuk $p, q \in W$. Karena ψ adalah sebuah pemetaan Reich siklik maka untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, berdasarkan (3.13), didapatkan

$$\begin{aligned} d(\psi_{n+1}(h), \psi_{n+2}(h)) &= d(\psi(\psi_n(h)), \psi(\psi_{n+1}(h))), \\ &\leq \theta \cdot \delta(\psi_n(h), \psi_{n+1}(h)) + \mu \cdot \delta(\psi_n(h), \psi(\psi_n(h))) \\ &\quad + \sigma \cdot \delta(\psi_{n+1}(h), \psi(\psi_{n+1}(h))) \\ &\leq \theta \cdot d(\psi_n(h), \psi_{n+1}(h)) + \mu \cdot d(\psi_n(h), \psi(\psi_n(h))) \\ &\quad + \sigma \cdot d(\psi_{n+1}(h), \psi(\psi_{n+1}(h))), \\ &= \theta \cdot d(\psi_n(h), \psi_{n+1}(h)) + \mu \cdot d(\psi_n(h), \psi_{n+1}(h)) \\ &\quad + \sigma \cdot d(\psi_{n+1}(h), \psi_{n+2}(h)), \end{aligned}$$

maka

$$d(\psi_{n+1}(h), \psi_{n+2}(h)) \leq \frac{\theta + \mu}{1 - \sigma} \cdot d(\psi_n(h), \psi_{n+1}(h)). \tag{3.14}$$

Masih berdasarkan (3.13), untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ diperoleh juga bahwa:

$$\begin{aligned} d(\psi_{n+2}(h), \psi_{n+1}(h)) &= d(\psi(\psi_{n+1}(h)), \psi(\psi_n(h))), \\ &\leq \theta \cdot \delta(\psi_n(h), \psi_{n+1}(h)) + \mu \cdot \delta(\psi_{n+1}(h), \psi(\psi_{n+1}(h))) \\ &\quad + \sigma \cdot \delta(\psi_n(h), \psi(\psi_n(h))), \\ &\leq \theta \cdot d(\psi_{n+1}(h), \psi_n(h)) + \mu \cdot d(\psi(\psi_{n+1}(h)), \psi_{n+1}(h)) \\ &\quad + \sigma \cdot d(\psi_{n+1}(h), \psi(\psi_n(h))), \\ &= \theta \cdot d(\psi_{n+1}(h), \psi_n(h)) + \mu \cdot d(\psi_{n+2}(h), \psi_{n+1}(h)) \\ &\quad + \sigma \cdot d(\psi_{n+1}(h), \psi_n(h)), \end{aligned}$$

maka

$$d(\psi_{n+2}(h), \psi_{n+1}(h)) \leq \frac{\theta + \sigma}{1 - \mu} \cdot d(\psi_{n+1}(h), \psi_n(h)). \tag{3.15}$$

Akibat barisan $\{\psi_n(h)\}$ memenuhi (3.14) dan (3.15) dimana $\theta, \mu, \sigma \in \mathbb{R}^+$ dengan $b(\theta + \mu + \sigma) + \alpha^2 < 1$ maka menurut Teorema 3.11, barisan $\{\psi_n(h)\}$ adalah sebuah barisan Cauchy di W. Dengan demikian, karena (W,d) adalah sebuah ruang kuasi αb-metrik lengkap maka barisan $\{\psi_n(h)\}$ konvergen ke sebuah $g \in W$.

Dari definisi $\{\psi_n(h)\}$ diperoleh bahwa $\psi_{2m}(h) \in P$ dan $\psi_{2m+1}(h) \in Q$ untuk semua $m \in \mathbb{N}$. Karena $\lim_{n\to\infty} \phi(\psi_{2m}(h)) = \lim_{n\to\infty} \phi(\psi_{2m+1}(h)) = g$ serta P dan Q adalah himpunan tertutup tak kosong maka $g \in P \cap Q$. Hal ini berarti $P \cap Q \neq \emptyset$.

Selanjutnya, karena $P, Q \subseteq W$ dengan (W, d) lengkap dan $P \cap Q$ tertutup maka $P \cap Q$ juga lengkap. Di sisi lain, akibat dari ψ memenuhi

$$\begin{aligned} d(\psi(p), \psi(q)) \leq \theta \cdot \min\{d(p,q), d(q,p)\} &+ \mu \cdot \min\{d(p, \psi(p)), d(\psi(p), p)\} \\ &+ \sigma \cdot \min\{d(q, \psi(q)), d(\psi(q), q)\} \end{aligned}$$

untuk semua $p, q \in P \cap Q$, maka menurut Teorema 3.13 disimpulkan bahwa ψ memiliki titik tetap tunggal di $P \cap Q$. $\square$

Contoh 3.17. Untuk bilangan real $\mathbb{R}$, didefinisikan pemetaaan $j : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ dimana

$$j(u,v) = \Big(\operatorname{sgn}|u - v|\Big)\Big(2u^2 + 3v^2\Big) \tag{3.16}$$

untuk semua $u, v \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, j)$ adalah sebuah ruang kuasi αb-metrik.

Jika $\Big(\operatorname{sgn}|u - v|\Big)\Big(2u^2 + 3v^2\Big) = \Big(\operatorname{sgn}|v - u|\Big)\Big(2v^2 + 3u^2\Big) = 0$ maka akan memaksa $u = v = 0$ atau $u = v$ saja. Jika $u = v$ maka berdasarkan pendefinisian j pada (3.16) haruslah $j(u,v) = j(v,u) = 0$. Dengan demikian, $u, v \in \mathbb{R}$ berlaku $j(u,v) = j(v,u) = 0$ jika dan hanya jika $u = v$.

Selanjutnya, ambil sebarang $u, v, w \in \mathbb{R}$. Berdasarkan definisi j pada (3.16) diperoleh $j(u,w) = 2u^2 + 3w^2$, $j(w,v) = 2w^2 + 3v^2$, dan $j(v,u) = 2v^2 + 3u^2$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} j(u,v) &= 2u^2 + 3v^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(2v^2 + 3u^2) + \frac{2}{3}((2u^2 + 3w^2) + (2w^2 + 3v^2)) \\ &\leq \frac{1}{2} j(v,u) + \frac{2}{3}(j(u,w) + j(w,v)). \end{aligned}$$

Pilih $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $b = \frac{4}{3}$. Dengan demikian, karena kedua syarat telah terpenuhi maka $(\mathbb{R}, j)$ adalah sebuah ruang kuasi αb-metrik.

Contoh 3.18. Pandang interval $I_1 = [-2, 1]$ dan $I_2 = [-1, 2]$ yang merupakan subhimpunan ruang kuasi αb-metrik $(\mathbb{R}, j)$ pada Contoh 3.17. Didefinisikan fungsi $f : I_1 \cup I_2 \to I_1 \cup I_2$ dengan $f(u) = \frac{-u}{2}$ untuk semua $u \in I_1 \cup I_2$ Perhatikan bahwa jika $p \in I_1$ maka $f(p) \in I_2$. Sebaliknya, jika $q \in I_2$ maka $f(q) \in I_1$ Jadi, f adalah sebuah pemetaan siklik pada $I_1 \cup I_2$ Perhatikan juga bahwa dari pendefinisian j dan f, untuk $p \in I_1$ dan $q \in I_2$ dengan $p \neq q$, diperoleh

$$j(f(p), f(q)) = 2(f(p))^2 + 3(f(q))^2 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{4}q^2;$$

$$j(p,q) = 2p^2 + 3q^2;$$

$$j(q,p) = 2q^2 + 3p^2;$$

$$j(p, f(p)) = 2q^2 + 3\left(\frac{-p}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}p^2;$$

$$j(f(p), p) = 2\left(\frac{-p}{2}\right)^2 + 3p^2 = \frac{7}{2}q^2;$$

$$j(q, f(q)) = 2q^2 + 3\left(\frac{-q}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}q^2;$$

$$j(f(q), q) = 2\left(\frac{-q}{2}\right)^2 + 3q^2 = \frac{7}{2}q^2.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} j(f(p), f(q)) &= \frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{4}q^2 \\ &\leq \frac{1}{50}(2p^2 + 2q^2) + \frac{1}{5}(\frac{11}{4}p^2) + \frac{7}{25}(\frac{11}{4}q^2) \\ &\leq \frac{1}{50} \cdot \min\{j(p, q), j(q, p)\} + \frac{1}{5} \cdot \min\{j(p, f(p)), j(f(p), p)\} \\ &+ \frac{7}{25} \cdot \min\{j(q, f(q)), j(f(q), q)\} \end{aligned}$$

yang secara singkat ditulis

$$\begin{aligned} j(f(p), f(q)) &\leq \frac{1}{50} \cdot \min\{j(p, q), j(q, p)\} + \frac{1}{5} \cdot \min\{j(p, f(p)), j(f(p), p)\} \\ &+ \frac{7}{25} \cdot \min\{j(q, f(q)), j(f(q), q)\}. \end{aligned}$$

Dengan mengambil $\theta = \frac{1}{50}$, $\mu = \frac{1}{5}$, dan $\sigma = \frac{7}{25}$ maka

$$\theta + \mu + \sigma = \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{7}{25} = \frac{1}{2}$$

dan

$$b(\theta + \mu + \sigma) + \alpha^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 < 1$$

Dengan demikian, fungsi f adalah sebuah kontraksi Reich siklik pada $I_1 \cup I_2$ Berdasarkan Teorema 3.16, fungsi f memiliki titik tetap tunggal pada $I_1 \cap I_2 = [-1, 1]$.

Daftar Pustaka

[1] Reich, S., 1971, Kannan's Fixed Point Theorem, *Bull. Univ. Mat. Italiana*, Vol. **4**(4): 1 – 11.

[2] Hardy, G. E., 1973, A Generalization of Fixed Point Theorem of Reich, *Canad. Math. Bull.*, Vol. **16**(2): 201 – 206.

[3] Kirk, W.A, Srinivasan, W. S, Veeramani, P., 2003, Fixed Points For Mappings Satisfying Cyclical Contractive Conditions, *Fixed Point Theory*, Vol. **4**(1): 79 – 89.

[4] Lazar, T., Mot, G., Petrusel G., Szentesi, S., 2010, The Theory of Reich's Fixed Point Theorem for Multivalued Operators, *Hindawi Publishing Corporation*, Vol. **2010**: 1 – 10.

[5] E. Karapinar, E., Erhan, I. M.,Ulus, A.Y., 2012, Fixed Point Theorem for Cyclic Maps on Partial Metric Spaces, *Natural Sciences Publishing Cor.*, Vol. **6**(1): 239 – 244.

[6] Uthayakumar, R., Prabakar, G. A., 2013, An Iterated Function System for Reich Contraction in Complete b Metric Space, *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, Vol. **7**(11): 1640 – 1643.

[7] Malhotra, S. K., Shukla, S., Sen, R., 2013, Some Fixed Point Theorems for Ordered Reich Type Contractions in Cone Rectangular Metric Spaces, *Acta Math. Univ. Comenianae*, Vol. **82**(2): : 165 – 175.

[8] Phon-on, A., Sama-Ae, A., Makaje, N., Riyapan, P., 2015, Reich Type Weak Contractions on Metric Spaces Endowed with A Graph, *Fixed Point Theory and Applications*, Vol. **2015**(57): 1 – 12.

[9] Alfuraidan, M. R., Bachar, M., Khamsi, M. A., 2016, A Graphical Version of Reich's Fixed Point Theorem, *Journal Nonlinear Science and Appications*, Vol. **2016**(9): 3931 – 3938

[10] Nurwahyu, B., 2017, Fixed Point Theorems for Generalized Contraction Mappings in Quasi αB-Metric Space, *Far East Journal of Mathematical Sciences* Vol **101**(8): 1813 – 1832.

[11] Tiwari, S. K., Das, K., 2017, Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems for Generalized T-Reich Contraction with c-Distance, *International Journal of Advances in Mathematics*, Vol. **2017**(6): 1 – 9

[12] Malahayati, 2017, Ketunggalan Titik Tetap di Ruang Dislocated Quasi B-Metrik pada Pemetaan Siklik, *Jurnal Matematika "Mantik"*, Vol. **3**(1): 39 – 43.

[13] Mitrovic, Z. D, Radenovic, S., 2017, The Banach And Reich Contractions In B_v(S)-Metric Spaces, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, Vol. **17**(19): 3087 – 3095.

[14] Xiaoyan Lv, Feng Y., 2018, Some Fixed Point Theorems for Reich Type Contraction in Generalized Metric Spaces, *Journal of Mathematical Analysis*, Vol. **9**(5): 80 – 88.

[15] Nurwahyu, B., Nasrun, A., Aris, N., 2018, Some Properties of Fixed Point for Contraction Mappings in Quasi αb-metric Space, *IOP Conf. Series: Journal of Physics*, Series **979**: 1 – 6.

[16] Abusalim, S. M, Fadail, Z. M., 2021, Fixed Point Results of T-Reich Contraction, T-Kannan Contraction and T-Banach Contraction on Cone b-Metric Spaces under Generalized c-Distance, *International Journal of Mathematical Analysis*, Vol. **15**(2): 71 – 83.