Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **4** Hal. 27 – 33
ISSN : 2303–291X

PENGKONSTRUKSIAN BILANGAN TIDAK KONGRUEN

RATI MAYANG SARI

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
rati.mayangsari21@gmail.com

Abstrak. Dalam penelitian ini dikaji tentang pengkonstruksian bilangan tidak kongruen dengan menggunakan matriks *Monsky* dan rank dari matriks tersebut sebagai batas dari $y^2 = x(x^2 - n^2)$. Metode ini menggunakan faktor prima yang berbeda yang dapat ditulis dalam bentuk $8k + 3$, untuk sebarang $k \geq 4$. Sehingga dengan menggunakan metode tersebut, diperoleh bilangan tidak kongruen yang berbeda dengan yang diperoleh pada Iskra.

Kata Kunci: Bilangan kongruen, bilangan tidak kongruen, matriks Monsky

1. Pendahuluan

Suatu bilangan bulat positif n dikatakan bilangan kongruen jika bilangan tersebut merupakan nilai dari luas suatu segitiga siku-siku, dimana panjang ketiga sisinya merupakan bilangan rasional [5]. Dengan kata lain, n dikatakan kongruen jika terdapat $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$ sedemikian sehingga $a^2 + b^2 = c^2$ dan $\frac{1}{2}ab = n$. Secara sebanding, rank dari kurva eliptik

$$y^2 = x(x^2 - n^2) \tag{1.1}$$

adalah positif [1]. Jika tidak positif, maka bilangan n tidak kongruen.

Sebelumnya bilangan kongruen dan bilangan tidak kongruen telah dipelajari, dengan memfokuskan pada faktor prima dari bilangan n tersebut. Seperti pada [6], telah ditunjukkan bahwa terdapat tak terhingga banyaknya bilangan tidak kongruen ganjil dan *squarefree* dengan banyak faktor prima.

Pada [4], Iskra memperoleh bilangan tidak kongruen dengan menunjukkan bahwa rank dari kurva eliptik $y^2 = x(x^2 - n^2)$ adalah nol. Ini memerlukan pembuktian bahwa banyak pasangan persamaan kuadrat terhadap $\mathbb{Q}$ yang tidak dapat diselesaikan.

Pada makalah ini akan dikaji tentang bagaimana cara menentukan bilangan tidak kongruen dengan menggunakan matriks *Monsky*, dan rank dari matriks tersebut sebagai batas dari rank $y^2 = x(x^2 - n^2)$.

2. Pengkonstruksian Bilangan Tidak Kongruen

Definisi 2.1. [5] *Suatu bilangan bulat positif n dikatakan bilangan kongruen jika bilangan tersebut merupakan nilai dari luas suatu segitiga siku-siku, dimana panjang* *ketiga sisinya merupakan bilangan rasional. Dengan kata lain, n dikatakan kongruen jika terdapat $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$ sedemikian sehingga $a^2 + b^2 = c^2$ dan $\frac{1}{2}ab = n$.*

Dalam [4] telah diperoleh beberapa bilangan tidak kongruen yang memuat banyak faktor prima dengan menggunakan teorema berikut.

Teorema 2.2. [4] *Misalkan $p_1, p_2, \cdots, p_t$ merupakan bilangan prima yang berbeda yang mana $p_i \equiv 3 \pmod 8$ dan $\left(\frac{p_j}{p_i}\right) = -1$ untuk $j < i$. Maka $n = p_1 p_2 \cdots p_t$ adalah bilangan tidak kongruen.*

3. Aljabar Linier Untuk Mengkonstruksi Bilangan Tidak Kongruen

Berikut ini akan disajikan Proposisi 3.1 dan Proposisi 3.2 yang akan digunakan untuk pembuktian beberapa lema yang menjadi syarat cukup untuk n yang merupakan bilangan tidak kongruen.

Proposisi 3.1. [1] *Jika $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, dan $\boldsymbol{D}$ adalah matriks bujur sangkar, maka*

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}), \text{ jika } \mathbf{A}^{-1} \text{ ada;} \\ \det(\mathbf{D})\det(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}), \text{ jika } \mathbf{D}^{-1} \text{ ada.} \end{cases}$$

Proposisi 3.2. [1] *Jika $\mathbf{B}$ merupakan matriks $n \times n$ yang dapat dibalik, dan jika $\mathbf{D}$ dan $\mathbf{C}$ adalah matriks $n \times k$, maka*

$$\det(\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{D}^T) = \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{I} + \mathbf{D}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})$$

Untuk memudahkan pengkonstruksian bilangan tidak kongruen, akan didefinisikan tiga matriks yang akan digunakan dalam pengkonstruksian bilangan tidak kongruen.

Definisi 3.3. [1] *Untuk suatu bilangan bulat positif r yang merupakan ukuran dari suatu matriks, didefinisikan matriks $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{Q}$, dan $\boldsymbol{A}$ sebagai berikut*

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_r = \begin{bmatrix} r-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & r-2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_r = \begin{bmatrix} r & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & r-2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notasi $\mathbf{I} = \mathbf{I}_r$ menyatakan matriks identitas dengan ukuran $r \times r$, sementara notasi $\mathbf{0} = \mathbf{0_r}$ menyatakan matriks yang entri-entrinya adalah nol.

Lema 3.4 sampai Lema 3.10 diperlukan untuk mengkonstruksi bilangan tidak kongruen.

Lema 3.4. [*1*] *Misalkan* $\boldsymbol{Q}$ *didefinisikan seperti pada Definisi 3.3, maka*

$$\boldsymbol{Q}^2 = 2\boldsymbol{Q} \equiv \boldsymbol{0}_r (mod\ 2). \tag{3.1}$$

Pada Lema 3.5 berikut akan diturunkan suatu kesamaan yang melibatkan matriks $\mathbf{U}$.

Lema 3.5. [*1*] *Misalkan* $\boldsymbol{U}$ *didefinisikan seperti pada Definisi 3.3, maka*

$$\boldsymbol{U(U{+}I)} \equiv \boldsymbol{0}_r\ (mod\ 2). \tag{3.2}$$

Bukti dari ketiga Lema berikutnya hanya menggunakan perhitungan langsung.

Lema 3.6. [*1*] *Misalkan* $\boldsymbol{U}$ *dan* $\boldsymbol{Q}$ *seperti pada Definisi 3.3, maka*

$$\boldsymbol{UQ} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \cdots & 0 & r \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Lema 3.7. [*1*] *Misalkan* $\boldsymbol{U}$ *dan* $\boldsymbol{Q}$ *seperti pada Definisi 3.3, maka*

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{I}) \equiv \begin{bmatrix} r & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} (mod\ 2). \tag{3.4}$$

Lema 3.8. [*1*] *Misalkan* $\boldsymbol{A}$ *seperti pada Definisi 3.3, maka*

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ r & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} (mod\ 2).$$

Lema 3.9. [*1*] *Misalkan matriks* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_r$ *seperti pada Definisi 3.3,* r *adalah ukuran dari matriks tersebut yang merupakan bilangan genap dan matriks* $\boldsymbol{T}$ *didefinisikan sebagai*

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix},$$

maka $det[\boldsymbol{T}] \equiv 1 (mod\ 2)$*.*

Lema terakhir ini merupakan langkah penting dalam pengkonstruksian keluarga dari bilangan tidak kongruen dengan sebarang banyak faktor prima. Lema ini menunjukkan bahwa apabila bilangan prima yang tepat ditambahkan ke bilangan tidak kongruen yang ada, maka diperoleh bilangan tidak kongruen dengan sebarang banyak faktor prima.

Lema 3.10. [*1*] *Misalkan* m *merupakan bilangan bulat genap tidak negatif dan* t *merupakan bilangan bulat positif yang memenuhi* $t \geq m$*. Misalkan terdapat suatu matriks* $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{2t}$*, yang diberikan oleh*

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}+\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{U} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{11} & \boldsymbol{U}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{U}_{22} \end{bmatrix},$$

dimana matriks $\boldsymbol{U}_{11}$ *merupakan sebuah matriks yang berukuran* $(t-m) \times (t-m)$ *(mungkin kosong) sebagai berikut*

$$U_{11} = \begin{bmatrix} t-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & t-2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m \end{bmatrix},$$

sementara matriks $\boldsymbol{U}_{12}$ *merupakan matriks yang berukuran* $(t-m) \times m$ *dengan semua entrinya adalah bilangan 1, dan matriks* $\boldsymbol{U}_{22}$ *adalah sebuah matriks yang berukuran* $m \times m$ *(mungkin kosong) yang berisi bilangan bulat, dengan*

$$\det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{U}_{22} \\ \boldsymbol{U}_{22}+\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\right) \equiv 1\ (mod\ 2). \tag{3.5}$$

Maka $\det(\boldsymbol{M}) \equiv 1\ (mod\ 2)$*. Telah ditetapkan bahwa matriks kosong memiliki determinan sama dengan* 1 *dan jika* $\boldsymbol{U}_{22}$ *adalah kosong, maka* $\boldsymbol{U}_{22}+\boldsymbol{I}_0$ *sama dengan matriks kosong.*

4. Hasil dan Pembahasan

Teorema berikut merupakan teorema utama untuk mengkonstruksi bilangan tidak kongruen. Untuk membuktikan teorema ini digunakan matriks *Monsky* dan rank dari kurva eliptik (1.1).

Teorema 4.1. [1] *Misalkan m merupakan bilangan bulat genap tidak negatif dan t merupakan bilangan bulat positif yang memenuhi $t \geq m$. Himpunan N_m merupakan himpunan dari bilangan bulat positif dengan faktorisasi prima $p_1 p_2 \cdots p_t$, dimana $p_1, p_2, \cdots, p_t$ merupakan bilangan prima yang berbeda yang terbentuk dari $8k+3$, untuk suatu $k \geq 4$ yang mana*

$$\left(\frac{p_j}{p_i}\right) = \begin{cases} -1, \text{ jika } 1 \leq j < i \text{ dan } (j,i) \neq (1,m), \\ +1, \text{ jika } 1 \leq j < i \text{ dan } (j,i) = (1,m). \end{cases} \tag{4.1}$$

Jika $n \in N_m$, maka n tidak kongruen. Selain itu untuk $m > 0$, himpunan N_m merupakan pasangan yang saling lepas.

Bukti. Lema 3.10 digunakan untuk menghasilkan bilangan tidak kongruen. Untuk pemilihan faktor prima seperti yang disebutkan dalam Teorema 4.1, dituliskan matriks *Monsky* sebagai berikut

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}+\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{U} \end{bmatrix},$$

dimana

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix},$$

dengan $\mathbf{U}_{11}$ dan $\mathbf{U}_{12}$ telah diberikan pada Lema 3.10.

Untuk $m = 0$, maka matriks $\mathbf{U}_{22}$ adalah matriks kosong. Jika $m > 0$, maka $\mathbf{U}_{22} = \mathbf{A}_m$. Berdasarkan Lema 3.9, syarat dari Lema 3.10 terpenuhi apabila $\mathbf{U}_{22}$ dipilih sesuai kondisi yang telah disebutkan sebelumnya.

Dengan menggunakan Lema 3.10 dapat ditarik kesimpulan bahwa

$$\det(\mathbf{M}) \equiv 1 \ (mod\ 2).$$

Dengan demikian rank dari $\mathbf{M}$ sama dengan $2t$. Oleh karena itu, $s(n) = 0$ jika $n \in N_m$ dan berdasarkan ketidaksamaan $r(n) \leq s(n)$, maka rank persamaan (1.1) sama dengan nol. Oleh karena itu, n adalah bilangan tidak kongruen. Notasikan N_0 sebagai keluarga dari bilangan tidak kongruen yang diperoleh dari Iskra [4].

Dengan cara menukarkan sebarang dua bilangan prima pertama di sebarang $n \in N_2$, diperoleh $N_2 \subseteq N_0$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa semua himpunan N_m lainnya adalah himpunan baru.

Asumsikan bahwa bilangan bulat positif n yang tidak kongruen tadi memenuhi

$$n \in N_m \cap N_{m'},$$

untuk bilangan bulat genap m dan m' dengan $m' > m \geq 4$. Misalkan terdapat bilangan n dengan faktorisasi prima sebagai berikut

$$n = p_1 p_2 \ldots p_t \in N_m$$

dan suatu permutasi π dari faktor prima p_i dari n sebagai berikut

$$n = q_1 q_2 \dots q_t \in N_{m'},$$

dimana q_i merupakan faktor prima dari n dan

$$\left(\frac{q_j}{q_i}\right) = \begin{cases} -1, \text{ jika } 1 \leq j < i \text{ dan } (j,i) \neq (1,m'), \\ +1, \text{ jika } 1 \leq j < i \text{ dan } (j,i) = (1,m'). \end{cases} \tag{4.2}$$

Misalkan k menyatakan indeks terbesar yang mana p_k tidak ditetapkan oleh permutasi π. Jelas bahwa $k \geq 2$. Jika $k = 2$ maka $q_1 = p_2$ dan $q_2 = p_1$, sehingga $\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1$, ini kontradiksi dengan persamaan (4.2) karena $m' > m \geq 4$. Jika $k = 3$, maka urutan dari himpunan $\{q_1, q_2, q_3\}$ adalah salah satu dari urutan himpunan $\{p_3, p_1, p_2\}, \{p_3, p_2, p_1\}, \{p_1, p_3, p_2\}$ atau $\{p_2, p_3, p_1\}$. Sesuai dengan urutan himpunan tersebut, maka simbol *Legendre*-nya adalah

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1, \quad \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1, \quad \left(\frac{q_2}{q_3}\right) = +1, \quad \left(\frac{q_2}{q_3}\right) = +1,$$

yang masing-masingnya bertentangan dengan persamaan (4.2) dan ketaksamaan $m' > m \geq 4$. Oleh karena itu, haruslah $k \geq 4$.

Dari definisi k diketahui bahwa $p_k = q_j$ untuk suatu j yang memenuhi $1 \leq j < k$. Jika $p_k = q_1$, maka

$$\{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\} = \{q_2, q_3, \dots, q_k\} \tag{4.3}$$

dan

$$\left(\frac{q_1}{q_i}\right) = -1 \tag{4.4}$$

untuk $2 \leq i \leq k$ dan $i \neq m'$, dapat disimpulkan bahwa dari (4.3), (4.4) dan ketaksamaan $k \geq 4$, simbol $\left(\frac{p_k}{p_l}\right)$ bernilai -1 untuk paling sedikit dua nilai dari l yang memenuhi $1 \leq l \leq k-1$. Ini kontradiksi dengan persamaan (4.1). Jika $q_k = p_1$ maka didapatkan sebuah kontradiksi dengan cara yang sama. Oleh karena itu haruslah $p_k = q_j$ untuk suatu j, dimana $2 \leq j \leq k-1$. Selanjutnya $q_k = p_i$ untuk suatu i yang memenuhi $2 \leq i \leq k-1$. Maka dari (4.2) haruslah diperoleh bahwa

$$\left(\frac{q_j}{q_k}\right) = -1,$$

sehingga

$$\left(\frac{p_k}{p_i}\right) = -1,$$

yang mana ini kontradiksi dengan persamaan (4.1). Dengan demikian, dapat dilihat bahwa himpunan N_m dan $N_{m'}$ berbeda. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa untuk bilangan bulat $m \geq 4$, bilangan tidak kongruen yang berada dalam himpunan N_m berbeda dari bilangan tidak kongruen yang diperoleh pada teorema Iskra [4]. $\square$

Sebagai contoh, bilangan 627 merupakan bilangan tidak kongruen yang diperoleh pada [4] yang mempunyai faktor prima sebagai berikut

$$627 = 3 \times 11 \times 19$$

dan bilangan 14.108.257 merupakan bilangan tidak kongruen yang diperoleh dengan menggunakan Teorema 4.1 yang mempunyai faktor prima sebagai berikut

$$14.108.257 = 43 \times 59 \times 67 \times 83$$

Dapat dilihat bahwa terdapat bilangan tidak kongruen baru yang berbeda dengan yang diperoleh [4].

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Ibu Dr. Yanita, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy dan Bapak Narwen, M. Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Reinholz, L., B.K. Spearman and Q. Yang. 2013. Families of Non-congruent numbers with Arbitrarily Many Prime Factors. *Journal of Number Theory* **133** : 318 – 327

[2] Anton, H. 1991. **Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan-Jilid 1**. Penerbit Erlangga, Jakarta

[3] Rosen, Kenneth H. 2003. **Discrete Mathematics and Its Application, Fifth Edition**. McGraw-Hill, North America

[4] Iskra, B. 1996. Non-congruent Numbers with Arbitrarily Many Prime Factors Congruent to 3 Modulo 8. *Journal of Number Theory* **72** ser.A

[5] Rosen, Kenneth H. 2003. **Elementary Number Theory and Its Applications, Fifth Edition**. McGraw-Hill, North America

[6] Heath-Brown, D.R. 1994. The Size of Selmer Groups for The Congruent Number Problem, II. *Invent.Math 118* **(2)** : 331 - 370