Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **4** Hal. 43 – 49
ISSN : 2303–291X

HIMPUNAN KUBIK ASIKLIK DAN KUBUS DASAR

WIWI ULMAYANI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
wiwi.ulmayani@ymail.com

Abstract. Given a topological space X. Then define an algebra object $H_*(X)$ which is called the homology group of X. $H_*(X)$ is the collection the k^{th} homology group of X which is denoted by $H_k(X)$. An elementary cube Q is a finite product of elementary intervals $I = [l, l+1]$ or $I = [l, l]$, for some $l \in \mathbb{Z}$. In this paper, it is proved that all elementary cubes are acyclic, which means that $H_k(Q)$ is isomorphic to $\mathbb{Z}$ if $k = 0$, and $H_k(Q)$ is isomorphic to 0 if $k > 0$.

Kata Kunci: Topological space, acyclic, isomorphic

1. Pendahuluan

Misalkan diberikan ruang topologi X. Selanjutnya didefinisikan suatu objek aljabar *$H_*(X)$* yang disebut dengan homologi dari X, dimana secara topologi *$H_*(X)$* adalah sebuah invarian, artinya jika X dan Y adalah homeomorfik maka *$H_*(X)$* dan *$H_*(Y)$* adalah isomorfik,

$$X \approx Y \Rightarrow H_*(X) \cong H_*(Y),$$

dimana $H_*(X)$ merupakan koleksi dari grup homologi ke-k dari X yang dinotasikan dengan $H_k(X)$.

Misalkan diberikan suatu ruang topologi $G \subset \mathbb{R}^n$, yang mana dapat disederhanakan menjadi suatu graf. Kemudian graf tersebut diobservasi dan direpresentasikan secara kombinatorik dan dari kombinatorik ini diperoleh suatu objek aljabar *$H_*(G)$* yang disebut homologi dari G.

Pada tulisan ini, penulis akan fokus pada homologi kubik dimana ruang topologi dapat direpresentasikan sebagai sebuah kubik. Sebuah kubus dasar Q adalah suatu hasil kali hingga dari interval-interval dasar $I = [l, l+1]$ atau $I = [l, l]$ untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$. Jadi, $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$. Himpunan kubik merupakan suatu kelas khusus dari ruang topologi.

Berdasarkan definisi, sebuah himpunan kubik X disebut asiklik jika

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ jika } k = 0 \\ 0, \text{ selainnya} \end{cases}$$

untuk $k \geq 0$ dan $k \in \mathbb{Z}$.

Makalah ini bertujuan untuk mengkaji hubungan antara himpunan kubik asiklik dan kubus dasar.

2. Himpunan Kubik Asiklik dan Kubus Dasar

Berikut akan diberikan definisi tentang himpunan kubik asiklik.

Definisi 2.1. [5] *Suatu himpunan kubik X dikatakan asiklik jika*

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, \textit{ jika } k = 0 \\ 0, \textit{ selainnya} \end{cases}$$

untuk $k \geq 0$ dan $k \in \mathbb{Z}$.

Misalkan $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ sebuah kubus dasar. Untuk suatu $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$ misalkan $I_i(Q)$ *nondegenerate*, dengan $I_i(Q) = [l_i, l_i + 1]$, untuk suatu $l_i \in \mathbb{Z}$. Pilih $k > 0$. Keluarga *face* berdimensi k dari Q dapat diuraikan sebagai berikut

$$\mathcal{K}_k(Q) = \mathcal{K}_k([l], i) \cup \mathcal{K}_k([l, l+1], i) \cup \mathcal{K}_k([l+1], i),$$

dimana $\mathcal{K}_k(\Delta, i) := \{P \in \mathcal{K}_k(Q) | I_i(P) = \Delta\}$, dengan $\Delta := [l], [l, l+1], [l+1]$.

Berikut adalah contoh keluarga *face* berdimensi $k = 2$.

Contoh 2.2. Misalkan $Q = [p, p+1] \times [l, l+1] \times [q]$. Maka

$$\mathcal{K}_1(Q) = \{[p, p+1] \times [l] \times [q], [p] \times [l, l+1] \times [q], [p+1] \times [l, l+1] \times [q], [p, p+1] \times [l+1] \times [q]\}$$

dan

$$\mathcal{K}_2(Q) = \{[p, p+1] \times [l, l+1] \times q\},$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1([l], 2) &= \{[p, p+1] \times [l] \times [q]\}, \\ \mathcal{K}_1([l, l+1], 2) &= \{[p] \times [l, l+1] \times [q], [p+1] \times [l, l+1] \times [q]\} \\ \mathcal{K}_1([l+1], 2) &= \{[p, p+1] \times [l+1] \times [q]\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dan

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2([l], 2) &= \emptyset, \\ \mathcal{K}_2([l, l+1], 2) &= \{[p, p+1] \times [l, l+1] \times [q]\} \\ \mathcal{K}_2([l+1], 2) &= \emptyset. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Misalkan $z \in Z_k(Q)$ yang memiliki sifat bahwa $|z|$ tidak memuat kubus dasar dengan komponen $[l+1]$. Maka $|z|$ tidak memuat kubus dasar dengan komponen $[l, l+1]$.

Lema berikut digunakan untuk membuktikan Teorema 2.4.

Lema 2.3. [5] *Asumsikan $Q \in \mathcal{K}^d$ dan $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$. Jika z merupakan siklik ke-*k *pada Q sedemikian sehingga $\langle z, \widehat{P} \rangle = 0$ untuk setiap $P \in \mathcal{K}_k([l+1], i)$, maka $\langle z, \widehat{P} \rangle = 0$ untuk setiap $P \in \mathcal{K}_k([l, l+1], i)$.*

Bukti. Karena z merupakan rantai pada Q, maka

$$z = \sum_{P \in \mathcal{K}_k(Q)} \langle z, \widehat{P} \rangle \widehat{P}.$$

Oleh karena itu, untuk sebarang $R \in \mathcal{K}_{k-1}(Q)$, berlaku

$$\begin{aligned}\langle \partial z, \widehat{R} \rangle &= \langle \partial (\sum_{P \in \mathcal{K}_k(Q)} \langle z, \widehat{P} \rangle \widehat{P}), \widehat{R} \rangle \\ &= \langle \sum_{P \in \mathcal{K}_k(Q)} \langle z, \widehat{P} \rangle \partial \widehat{P}, \widehat{R} \rangle \\ &= \sum_{P \in \mathcal{K}_k(Q)} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P}, \widehat{R} \rangle.\end{aligned}$$

Karena z siklik, maka untuk sebarang $R \in \mathcal{K}_{k-1}(Q)$ berlaku

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \langle \partial z, \widehat{R} \rangle = \sum_{P \in \mathcal{K}_k([l],i)} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P}, \widehat{R} \rangle + \sum_{P \in \mathcal{K}_k([l,l+1],i)} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P}, \widehat{R} \rangle + \\ & \sum_{P \in \mathcal{K}_k([l+1],i)} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P}, \widehat{R} \rangle \end{aligned}$$

Karena $\langle z, \widehat{P} \rangle = 0$ untuk setiap $P \in \mathcal{K}_k([l+1], i)$, maka

$$0 = \langle \partial z, \widehat{R} \rangle = \sum_{P \in \mathcal{K}_k([l],i)} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P}, \widehat{R} \rangle + \sum_{P \in \mathcal{K}_k([l,l+1],i)} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P}, \widehat{R} \rangle \tag{2.3}$$

Misalkan $P_0 \in \mathcal{K}_k([l, l+1], i)$, dan misalkan R_0 kubus dasar yang didefinisikan sebagai

$$I_j(R_0) = \begin{cases} [l+1], \text{ jika j = i} \\ I_j(P_0), \text{ selainnya.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Maka, R_0 bukan *face* dari P untuk $P \in \mathcal{K}_k([l], i)$, karena $I_i(P) = [l]$ sedangkan $I_i(R_0) = [l+1]$. Akibatnya $\sum_{P \in \mathcal{K}_k([l],i)} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P}, \widehat{R} \rangle$ pada ruas kanan (2.3) tidak muncul untuk $R = R_0$. Namun, R_0 adalah face dari P untuk $P \in \mathcal{K}_k([l, l+1], i)$ jika dan hanya jika $P = P_0$. Ini berarti bahwa persamaan (2.4) direduksi $R = R_0$ menjadi $0 = \langle z, \widehat{P_0} \rangle \langle \partial \widehat{P_0}, \widehat{R_0} \rangle$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} R_0 &= I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_i \times \cdots \times I_d \\ &= I_1 \times I_2 \times \cdots \times [l+1] \times \cdots \times I_d \\ \widehat{R_0} &= I_1 \times I_2 \times \cdots \widehat{\times [l+1]} \times \cdots \times I_d \\ &= \widehat{I_1} \diamond \widehat{I_2} \diamond \cdots \diamond \widehat{[l+1]} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d} \\ &= \widehat{[l+1]} \diamond \widehat{I_1} \diamond \widehat{I_2} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_{i-1}} \diamond \widehat{I_{i+1}} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d} \\ &= \widehat{[l+1]} \diamond \underbrace{\widehat{I_1} \diamond \widehat{I_2} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_{i-1}} \diamond \widehat{I_{i+1}} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d}}_{\widehat{J'}} \\ &= \widehat{[l+1]} \diamond \widehat{J'} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} P_0 &= I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_i \times \cdots \times I_d \\ &= I_1 \times I_2 \times \cdots \times [l, l+1] \times \cdots \times I_d \\ \widehat{P_0} &= I_1 \times I_2 \times \cdots \times \widehat{[l, l+1]} \times \cdots \times I_d \\ &= \widehat{I_1} \diamond \widehat{I_2} \diamond \cdots \diamond \widehat{[l, l+1]} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d} \\ &= \widehat{[l, l+1]} \diamond \widehat{I_1} \diamond \widehat{I_2} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_{i-1}} \diamond \widehat{I_{i+1}} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d} \\ &= \underbrace{\widehat{[l, l+1]}}_{\widehat{I'}} \diamond \underbrace{\widehat{I_1} \diamond \widehat{I_2} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_{i-1}} \diamond \widehat{I_{i+1}} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d}}_{\widehat{J'}}. \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \partial \widehat{P_0} &= \partial \widehat{I'} \diamond \widehat{J'} + (-1)^{dim I'} \widehat{I'} \diamond \partial \widehat{J'} \\ &= \partial \widehat{[l, l+1]} \diamond \widehat{J'} + (-1) \widehat{[l, l+1]} \diamond \partial \widehat{J'} \\ &= (\widehat{[l+1]} - \widehat{[l]}) \diamond \widehat{J'} + (-1) \widehat{[l, l+1]} \diamond \partial \widehat{J'} \\ &= \widehat{[l+1]} \diamond \widehat{J'} - \widehat{[l]} \diamond \widehat{J'} + (-1) \widehat{[l, l+1]} \diamond \partial \widehat{J'}. \end{aligned}$$

Karena $\langle \partial \widehat{P_0}, \widehat{R_0} \rangle \neq 0$, diperoleh $\langle z, \widehat{P_0} \rangle = 0$. □

Teorema berikut merupakan hasil kajian utama dalam makalah ini.

Teorema 2.4. [5] *Setiap kubus dasar adalah asiklik.*

Bukti. Misalkan Q adalah kubus dasar. Karena Q *connected*, maka menurut [5], $H_0(Q) \cong \mathbb{Z}$. Sehingga cukup ditunjukkan bahwa $H_k(Q) = 0$ untuk $k > 0$, yang ekivalen dengan menunjukkan bahwa setiap siklik ke-k pada Q adalah batas (*boundary*). Dalam hal ini akan ditunjukkan dengan induksi pada $n := \dim Q$.

- Untuk $n = 0$.
  Jika $n = 0$, maka $Z_k(Q) = C_k(Q) = 0 = B_k(Q)$ yang menunjukkan bahwa $H_k(Q) = 0$.
- Untuk $n > 0$.
  Asumsikan bahwa $H_k(Q) = 0$, untuk semua kubus dasar dengan dimensi yang lebih kecil dari n. Karena $n > 0$, pilih sebarang i sedemikian sehingga $I_i(Q)$ *nondegenerate*. Untuk setiap $P \in \mathcal{K}_k([l+1], i)$, misalkan P^* kubus dasar yang diberikan oleh

  $$I_j(P^*) := \begin{cases} [l, l+1], & \text{jika } j = i \\ I_j(P), & \text{selainnya.} \end{cases}$$

  Maka P adalah *face* dari P^*. Misalkan z sebuah siklik ke-k pada Q. Definisikan

  $$\begin{aligned} c &:= \sum_{P \in \mathcal{K}_k([l+1], i)} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P^*}, \widehat{P} \rangle \widehat{P^*}, \\ z' &:= z - \partial c. \end{aligned}$$

Untuk setiap $P_0 \in \mathcal{K}_k([l+1], i)$, berlaku

$$\begin{aligned}\langle \partial c, \widehat{P_0} \rangle &= \langle \partial (\sum_{P \in \mathcal{K}_k([l+1],i)} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P^*}, \widehat{P} \rangle \widehat{P^*}), \widehat{P_0} \rangle \\ &= \langle \sum_{P \in \mathcal{K}_k([l+1]} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P^*}, \widehat{P} \rangle \partial \widehat{P^*}, \widehat{P_0} \rangle \\ &= \sum_{P \in \mathcal{K}_k([l+1]} \langle z, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P^*}, \widehat{P} \rangle \langle \partial \widehat{P^*}, \widehat{P_0} \rangle.\end{aligned}$$

Karena $I_i(P^*) = [l, l+1]$ dan $I_i(P_0) = [l+1]$, akibatnya $\langle \partial \widehat{P^*}, \widehat{P_0} \rangle \neq 0$ jika dan hanya jika $P = P_0$. Oleh karena itu,$\langle \partial c, \widehat{P_0} \rangle = \langle z, \widehat{P_0} \rangle$ dan $\langle z^{'}, \widehat{P_0} \rangle = 0$. Berdasarkan Lema 2.3, $|z^{'}| \subset Q^{'}$, dimana $Q^{'}$ merupakan kubus berdimensi $n-1$ yang didefinisikan sebagai

$$I_j(Q^{'}) := \begin{cases} [l], & \text{jika } j = i \\ I_j(Q), & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Dari induksi, diperoleh $z^{'} = \partial c^{'}$. Ini menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} z &= \partial c + z^{'} \\ &= \partial c + \partial c^{'} \\ &= \partial (c + c^{'}), \end{aligned}$$

dengan z adalah batas. □

Kebalikan dari Teorema 2.4 tidak berlaku, karena setiap himpunan kubik yang asiklik belum tentu merupakan kubus dasar.

Contoh 2.5. Misal himpunan kubik

$$\Gamma^{'} = [1,3] \times [2].$$

Definisikan $Q_1 = [1,2] \times [2]$ dan $Q_2 = [2,3] \times [2]$. Himpunan-himpunan dari kubus dasar Q_1 dan Q_2 adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(Q_1) &= [1] \times [2], [2] \times [2] \\ \mathcal{K}_0(Q_2) &= [2] \times [2], [3] \times [2] \\ \mathcal{K}_1(Q_1) &= [1,2] \times [2] \\ \mathcal{K}_1(Q_2) &= [2,3] \times [2] \end{aligned}$$

Maka basis untuk himpunan rantai-rantai dari Q_1 dan Q_2 adalah

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{K}}_0(Q_1) &= \{\widehat{[1] \times [2]}, \widehat{[2] \times [2]}\} \\ &= \{\widehat{[1]} \diamond \widehat{[2]}, \widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]}\}, \\ \widehat{\mathcal{K}}_0(Q_2) &= \{\widehat{[2] \times [2]}, \widehat{[3] \times [2]}\} \\ &= \{\widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]}, \widehat{[3]} \diamond \widehat{[2]}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{K}}_1(Q_1) &= \{\widehat{[1,2] \times [2]}\}\\ &= \{\widehat{[1,2]} \diamond \widehat{[2]}\},\\ \widehat{\mathcal{K}}_1(Q_2) &= \{\widehat{[2,3] \times [2]}\}\\ &= \{\widehat{[2,3]} \diamond \widehat{[2]}\}.\end{aligned}$$

Untuk menghitung operator batas dari $\Gamma^{'}$, perlu dihitung batas dari anggota-anggota basisnya.

$$\begin{aligned}\partial(\widehat{[1,2]} \diamond \widehat{[2]}) &= \partial\widehat{[1,2]} \diamond \widehat{[2]} + (-1)^{\dim\ \widehat{[1,2]}}\widehat{[1,2]} \diamond \partial\widehat{[2]}\\ &= (\widehat{[2]} - \widehat{[1]}) \diamond \widehat{[2]} + (-1)^1\widehat{[1,2]} \diamond 0\\ &= (\widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]} - \widehat{[1]} \diamond \widehat{[2]}) + 0\\ &= \widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]} - \widehat{[1]} \diamond \widehat{[2]}\\ &= -\widehat{[1]} \diamond \widehat{[2]}) + \widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial(\widehat{[2,3]} \diamond \widehat{[2]}) &= \partial\widehat{[2,3]} \diamond \widehat{[2]} + (-1)^{\dim\ \widehat{[2,3]}}\widehat{[2,3]} \diamond \partial\widehat{[2]}\\ &= (\widehat{[3]} - \widehat{[2]}) \diamond \widehat{[2]} + (-1)^1\widehat{[2,3]} \diamond 0\\ &= (\widehat{[3]} \diamond \widehat{[2]} - \widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]}) + 0\\ &= \widehat{[3]} \diamond \widehat{[2]} - \widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]}\\ &= -\widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]}) + \widehat{[3]} \diamond \widehat{[2]}.\end{aligned}$$

Selanjutnya tentukan basis dari Q_1 dan Q_2

$$\begin{aligned}\partial(\widehat{[1,2]} \diamond \widehat{[2]}) &= -\widehat{[1]} \diamond \widehat{[2]}) + \widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]}\\ &= -1(\widehat{[1]} \diamond \widehat{[2]}) + 1(\widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial(\widehat{[2,3]} \diamond \widehat{[2]}) &= -\widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]}) + \widehat{[3]} \diamond \widehat{[2]}\\ &= -1(\widehat{[2]} \diamond \widehat{[2]}) + 1(\widehat{[3]} \diamond \widehat{[2]}),\end{aligned}$$

sehingga basis dari $\Gamma^{'}$ dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\partial_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Untuk memperoleh $Z_1(\Gamma^{'})$, akan dicari $\ker \partial_1$, dengan menyelesaikan persamaan

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

yang memberikan $\alpha_1 = -\alpha_1 = 0$. Sehingga diperoleh $\alpha_1 = 0$. Karena $Z_1(\Gamma^{'}) = 0$, $B_1(\Gamma^{'}) = 0$ akibatnya

$$H_1(\Gamma^{'}) \cong 0.$$

Untuk $k = 0$,

$$\widehat{Q}(R) = \begin{cases} 1, \, R = [1] \times [2] \\ 0, \, \text{selainnya.} \end{cases} \tag{2.5}$$

$c([1] \times [2]) = \alpha\widehat{[1] \times [2]}([1] \times [2]) = \alpha$, dimana $\alpha \in \mathbb{Z}$. Lebih khusus, $Z_0(X) \cong C_0(X) = \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

3. Kesimpulan

Misalkan X adalah himpunan kubik. Selanjutnya misalkan $Q \subset X$ adalah kubus dasar. Setiap kubus dasar Q adalah asiklik, yang berarti bahwa

$$H_k(Q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, \, \text{jika } k = 0 \\ 0, \, \text{ selainnya.} \end{cases}$$

Namun tidak semua himpunan kubik yang asiklik adalah kubus dasar.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, Bapak Prof. Dr. I Made Arnawa dan Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert. 2000.**Introduction To Real Analysis**, 3^{rd} ed., USA: Copyright Act

[2] Herstein, I. N. 1999. **Topics in Algebra**. 2^{nd} ed. John Wiley and Sons, New York

[3] Jacob, Bill. 1990. **Linear Algebra**. W. H. Freeman and Company. New York

[4] Kaczynski. T, K. Mischaikow, M. Mrozek. 2000. **Algebraic Topology : A Computational Approach**. New York

[5] Kaczynski. T, K. Mischaikow, M. Mrozek. 2004. **Computational Homology**. Springer-Verlag. New York

[6] Min Yan. 2010. **Topology**. Hongkong University of Science and Technology. Hongkong