Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **4** Hal. 50 - 53
ISSN : 2303–291X

PELABELAN TOTAL (a, d)-SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF $2K_{1,n}$

MARTHA AYUNDA

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
marthaayunda@gmail.com

Abstrak. Pelabelan pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, \cdots, p + q\}$, dimana $p = |V(G)|$ dan $q = |E(G)|$. Suatu pelabelan f dikatakan pelabelan *total* (a, d)*-sisi antiajaib* terhadap graf G jika himpunan bobot sisi G, dinotasikan dengan $W = \{w(xy)|w(xy) = f(x) + f(xy) + f(y) \mid xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W = \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(q-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$. Suatu pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada G dikatakan *super* apabila $f(V(G)) = \{1, 2, \cdots, p\}$. Dalam makalah ini dikaji kembali tentang pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada graf $2K_{1,n}$, dimana $K_{1,n}$ adalah graf bintang dengan n sisi.

Kata Kunci: Pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super, graf $2K_{1,n}$

1. Pendahuluan

Suatu pelabelan dari graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan bijektif dari elemen graf G ke himpunan bilangan bulat positif. Apabila daerah asal dari pemetaan hanya himpunan titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik**. Apabila daerah asalnya hanya himpunan sisi, maka pelabelan disebut **pelabelan sisi**. Apabila daerah asal merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut **pelabelan total**.

Misal terdapat $G = (V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$. Notasi $|V(G)|$ berarti banyaknya titik pada G, sementara $|E(G)|$ berarti banyaknya sisi pada G. Suatu pelabelan f dikatakan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib terhadap graf G jika himpunan bobot sisi G, dinotasikan dengan $W = \{w(xy)|w(xy) = f(x) + f(xy) + f(y) \mid xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W = \{a, a + d, a + 2d, \cdots, a + (q - 1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$. Suatu pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada G dikatakan *super* apabila $f(V(G)) = \{1, 2, \cdots, p\}$. Pada makalah ini akan ditentukan apakah terdapat pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada graf $2K_{1,n}$.

2. Pelabelan Total (a, d)-Sisi Antiajaib Super Pada Graf $2K_{1,n}$

Untuk mengkaji pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada graf $2K_{1,n}$, terlebih dahulu akan ditentukan kembali pelabelan titik (a, d)-sisi antiajaib pada graf $2K_{1,n}$.

Teorema 2.1. *[3] Jika $n \geq 2$, maka graf $2K_{1,n}$ mempunyai pelabelan titik $(4, 2)$-sisi antiajaib.*

Bukti. Misalkan $n \geq 2$, akan ditunjukkan bahwa graf $2K_{1,n}$ mempunyai suatu pelabelan titik $(4, 2)$-sisi antiajaib. Konstruksikan pelabelan titik untuk graf $2K_{1,n}$ sebagai berikut.

$$f_1(x_{1,i}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = 0 \\ 2i + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

$$f_1(x_{2,i}) = \begin{cases} 2n + 2, & \text{jika } i = 0, \\ 2i, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Diperoleh bobot sisi untuk graf $2K_{1,n}$ terhadap pelabelan f_1 yang dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{f_1}^1 &= \{f(x_{1,0}) + f(x_{1,i}) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{2i + 2 \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{4, 6, 8, \cdots, 2n + 2\}. \qquad (2.1) \\ W_{f_1}^2 &= \{f(x_{2,0}) + f(x_{2,i}) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{2n + 2i + 2 \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{2n + 4, 2n + 6, \cdots, 4n + 2\}. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Dari bobot sisi tersebut jelas terlihat bahwa himpunan merupakan barisan aritmatika dengan suku awal $a = 4$ dan beda $d = 2$. Dapat ditunjukkan bahwa f_1 adalah pelabelan titik $(4, 2)$-sisi antiajaib. □

Teorema 2.2. *[3] Jika $n \geq 2$ maka graf $2K_{1,n}$ mempunyai pelabelan total $(4n + 6, 1)$-sisi antiajaib super dan pelabelan total $(2n + 7, 3)$-sisi antiajaib super.*

Bukti. Misalkan $n \geq 2$, akan ditunjukkan bahwa graf $2K_{1,n}$ mempunyai suatu pelabelan total $(4n + 6, 1)$-sisi antiajaib super dan pelabelan total $(2n + 7, 3)$-sisi antiajaib super. Dari Teorema 2.1, diperoleh pelabelan titik $(4, 2)$-sisi antiajaib. Pelabelan titik tersebut akan digunakan untuk mengkonstruksi suatu pelabelan total $(4n + 6, 1)$-sisi antiajaib super.

Pandang dua kasus berikut.

- Kasus 1, $d = 1$.
  Konstruksikan pelabelan total terhadap $2K_{1,n}$ sebagai berikut.

  $$f_2(V(2K_{1,n})) = f_1(V(2K_{1,n})),$$

  dimana f_1 adalah pelabelan titik pada Teorema 2.1, dan pelabelan sisi $f_2 : E(2K_{1,n})$ sebagai berikut.

  $$\begin{aligned} f_2(x_{1,0}x_{1,i}) &= 4n + 3 - i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ f_2(x_{2,0}x_{2,i}) &= 3n + 3 - i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

  Dari pelabelan total tersebut diperoleh bobot sisi untuk graf $K_{1,n}$ yang pertama terhadap pelabelan f_2 dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{f_2}^1 &= \{w_{f_2}^1(x_{1,0}x_{1,i}) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{w_{f_1}^1(x_{1,0}x_{1,i}) + f_2(x_{1,0}x_{1,i}) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{(2i+2) + (4n+3-i) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{4n+5+i \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{4n+6, 4n+7, \cdots, 5n+5\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dari pelabelan total tersebut diperoleh bobot sisi untuk graf $K_{1,n}$ yang kedua terhadap pelabelan f_2 dapat dihitung sebagai berikut :

$$\begin{aligned} W_{f_2}^2 &= \{w_{f_2}^2(x_{2,0}x_{2,i}) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{w_{f_2}^2(x_{2,0}x_{2,i}) + f_2(x_{2,0}x_{2,i}) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{(2n+2i+2) + (3n+3-i) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{5n+5+i \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{5n+6, 5n+7, \cdots, 6n+5\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dapat dilihat bahwa himpunan bobot sisi tersebut merupakan barisan aritmatika dengan suku awal $a = 4n + 6$ dan beda $d = 1$. Karena titik-titik pada graf $2K_{1,n}$ dilabeli dengan label pada himpunan $\{1, 2, 3, \cdots, 2n+2\}$, maka dapat disimpulkan bahwa f_2 mempunyai pelabelan total $(4n + 6, 1)$-sisi antiajaib super.

- Kasus 2, $d = 1$.
  Konstruksikan pelabelan total terhadap $2K_{1,n}$ sebagai berikut :

  $$f_3(V(2K_{1,n})) = f_1(V(2K_{1,n})),$$

  dimana f_1 adalah pelabelan titik pada Teorema 2.1, dan pelabelan sisi $f_3 : E(2K_{1,n})$ sebagai berikut.

  $$\begin{aligned} f_3(x_{1,0}x_{1,i}) &= 2n+2+i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ f_3(x_{2,0}x_{2,i}) &= 3n+2+i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

  Dari pelabelan total tersebut diperoleh bobot sisi untuk graf $K_{1,n}$ yang pertama terhadap pelabelan f_3 dapat dihitung sebagai berikut.

  $$\begin{aligned} W_{f_3}^1 &= \{w_{f_3}^1(x_{1,0}x_{1,i}) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{w_{f_3}^1(x_{1,0}x_{1,i}) + f_3(x_{1,0}x_{1,i}) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{(2i+2) + (2n+2+i) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{2n+3i+4 \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{2n+7, 2n+10, \cdots, 5n+4\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

  Dari pelabelan total tersebut diperoleh bobot sisi untuk graf $2K_{1,n}$ yang kedua terhadap pelabelan f_3 dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{f_3}^2 &= \{w_{f_3}^2(x_{2,0}x_{2,i}) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{w_{f_3}^2(x_{2,0}x_{2,i}) + f_3(x_{2,0}x_{2,i}) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{(2n + 2i + 2) + (3n + 2 + i) \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{5n + 3i + 4 \mid i = 1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{5n + 7, 5n + 10, \cdots, 8n + 4\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dapat dilihat bahwa himpunan bobot sisi tersebut merupakan barisan aritmatika dengan suku awal $a = 2n + 7$ dan beda $d = 3$. Karena titik-titik pada graf $2K_{1,n}$ dilabeli dengan label pada himpunan $\{1, 2, 3, \cdots, 2n + 2\}$, maka dapat disimpulkan bahwa f_3 mempunyai pelabelan total $(2n + 7, 3)$-sisi antiajaib super$\square$

3. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Budi Rudianto, M.Si, Ibu Hazmira Yozza, M.Si, Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si dan Bapak Drs. Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Baca, M. dan M. Miller. 2008. **Super Edge-Antimagic Graphs**. Brown Walker Press, Boca Raton-Florida

[2] Chartrand, G. and L. Lesniak. 1996. **Graphs and Digraphs**. *Third edition.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton-Florida

[3] Dafik, J. Ryan and M. Baca, M. Miller. 2008. Antimagic labeling of the union of two stars. *Australasian Journal of Combinatorics.* **42** : 35 – 44

[4] Sugeng. K. A. 2005. *Magic and Antimagic Labeling of Graphs. Ph.D-Thesis*, tidak diterbitkan