

PEMBANGKITAN POLA SIMETRI $p2$ DARI SIMULASI SISTEM DINAMIK

RIZKY PRABOWO, MAHDHIVAN SYAFWAN*, BUDI RUDIANTO

*Departemen Matematika dan Sains Data,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : mahdhivan@sci.unand.ac.id*

Diterima 27 Juni 2022 Direvisi 10 Agustus 2022 Dipublikasikan 21 Oktober 2022

Abstrak. Pola simetri $p2$ adalah pola simetri yang memenuhi simetri rotasi 180° dan simetri translasi di sepanjang sumbu- x dan sumbu- y dengan periode tertentu. Dalam makalah ini akan dibahas pembangkitan pola simetri $p2$ dari simulasi sistem dinamik dengan menggunakan aplikasi Matlab. Dalam hal ini dilakukan terlebih dahulu analisis terhadap syarat dan pemilihan pada fungsi dinamik yang memenuhi sifat-sifat pada pola simetri $p2$. Dalam proses pembangkitannya pada Matlab, setiap titik pada suatu bidang dijadikan sebagai titik awal pada iterasi sistem dinamik, kemudian warna yang diberikan pada titik tersebut ditentukan dari jumlah iterasi yang dihasilkan melalui kriteria konvergensi Euclidean. Berdasarkan simulasi terhadap beberapa kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi-fungsi dinamik, dihasilkan pola-pola simetri $p2$ yang lebih variatif.

Abstract. The symmetrical pattern $P2$ is a symmetrical pattern which has rotational symmetry of 180° and translational symmetry along the x -axis and y -axis with a certain period. In this article we discuss the generation of $p2$ symmetrical pattern from dynamical system simulations using Matlab application. In this case, the analysis of the conditions and the choice on the dynamical functions which has properties of the $p2$ symmetrical pattern is carried out. In the process of generating it in Matlab, each point on a plane is used as the starting point for iterations of the dynamical system, then the color assigned to that point is determined from the number of iterations generated through Euclidean convergence criterion. Based on the simulation of several combinations of parameter values in the dynamical functions, we obtain more varied $p2$ symmetrical patterns.

Kata Kunci: Isometri, Pola Simetri $p2$, Sistem Dinamik

1. Pendahuluan

Di zaman modern seperti sekarang ini banyak berkembang pola-pola atau desain geometri yang dapat ditemukan di berbagai produk kerajinan, seperti pada tenunan, permadani, keramik, batik dan lain-lain. Dalam proses pembuatannya,

*penulis korespondensi

masih banyak orang yang membuat secara manual dengan menggambar pola karena keinginan untuk mempertahankan keaslian dan ciri khas dari pola tersebut. Namun pola baru yang beragam dan artistik ternyata juga dapat dihasilkan melalui bantuan teknologi komputer dengan simulasi model matematika.

Salah satu pendekatan matematis yang digunakan dalam proses pembangkitan pola-pola baru adalah melalui simulasi sistem dinamik. Sistem dinamik adalah model matematika yang berisi aturan yang menjelaskan cara sejumlah kuantitas mengalami perubahan seiring waktu [6]. Melalui simulasi sistem dinamik, dihasilkan berbagai pola yang memiliki *wallpaper symmetries*, *spherical symmetries*, *frieze symmetries*, dan *archimedean tilings* [5].

Wallpaper symmetries adalah pola berulang dua dimensi yang merupakan kombinasi dari isometri pada bidang [2], sedangkan *spherical symmetries* adalah pola berulang grup titik dalam tiga dimensi [3]. Selanjutnya *frieze symmetries* adalah pola berulang dua dimensi yang merupakan kombinasi dari isometri pada bidang dalam satu arah [7], dan *archimedean tilings* adalah seni pengubinan dari poligon reguler [9].

Khusus untuk *wallpaper symmetries*, terdapat 17 jenis pola simetri, yang diberi nama sebagai berikut: $p1$, $p2$, pm , pg , $p2mm$, $p2mg$, $p2gg$, cm , $c2mm$, $p3$, $p3m1$, $p31m$, $p4$, $p4mm$, $p4gm$, $p6$ dan $p6mm$ [2]. Jenis-jenis pola simetri ini memiliki satu atau kombinasi dari simetri translasi, refleksi, refleksi geser (*glide reflection*) dan rotasi [9].

Pembangkitan pola-pola simetri di atas telah banyak dikaji pada penelitian-penelitian sebelumnya. Chung [2] melakukan pembangkitan pola simetri dengan menggunakan simulasi sistem dinamik diskrit. Dengan mengacu pada penelitian Chung ini, Putri [10] membahas dengan lebih detail tentang pola simetri $p6mm$, Viera [12] membahas dengan lebih detail tentang pola simetri $p2mm$, dan Cania membahas dengan lebih detail untuk pola simetri $p4$ [1].

Dalam makalah ini akan dibahas secara khusus pola simetri $p2$, yaitu pola yang memenuhi simetri translasi dan simetri rotasi 180° . Pola simetri ini akan dibangkitkan menggunakan simulasi sistem dinamik diskrit berikut:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + g(x_n, y_n), \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

untuk suatu fungsi f dan g dengan syarat-syarat yang akan ditentukan sedemikian sehingga banyaknya iterasi yang diperlukan dalam menyelesaikan sistem (1.1) menghasilkan gambar yang memiliki pola simetri $p2$. Dalam hal ini, pembangkitan pola simetri $p2$ berdasarkan syarat fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ dilakukan dengan menggunakan aplikasi Matlab.

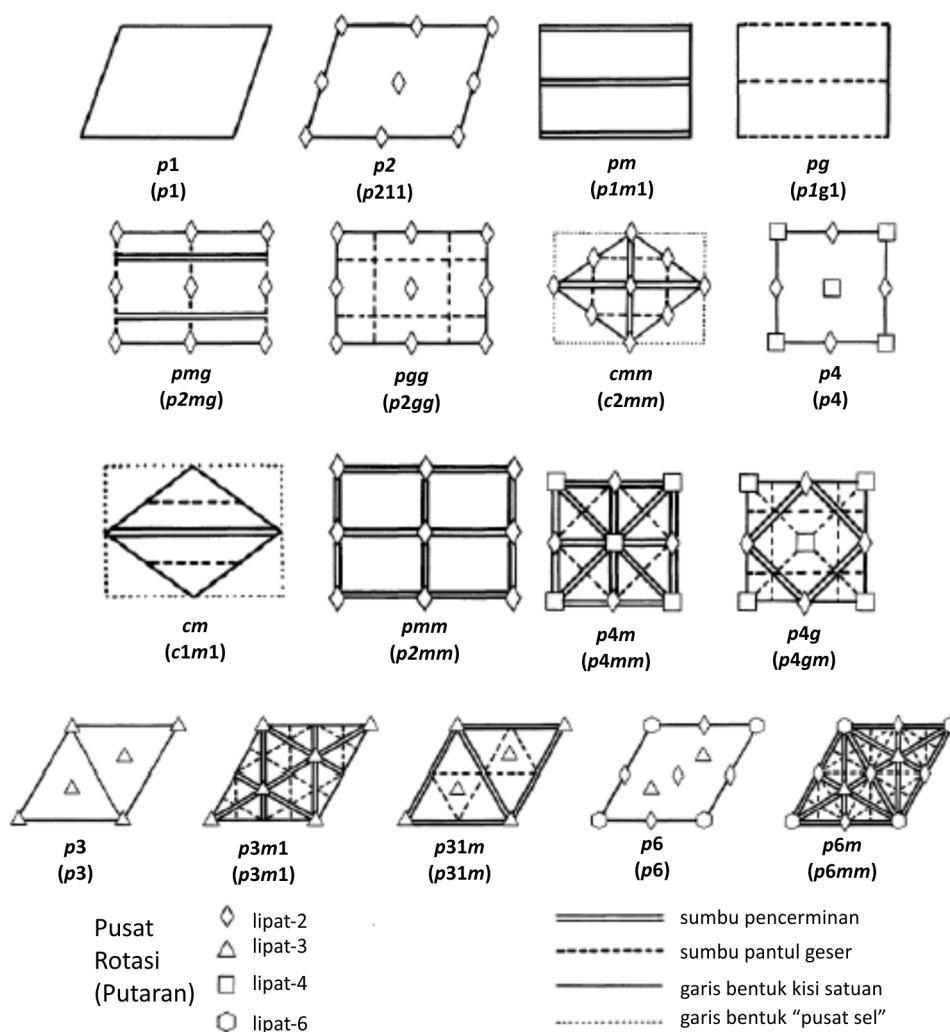
2. Landasan Teori

2.1. Pola Simetri

Poligon terkecil yang mengisi bidang (tidak berlubang) disebut kisi satuan (*lattice*). Sebuah kisi satuan dapat memiliki lebih dari satu pusat rotasi lipat- k . Suatu kisi

satuan dikatakan memiliki orde k jika mempunyai pusat rotasi lipat- k yang tertinggi [4].

Setiap jenis kisi satuan dapat membentuk sebuah pola dengan melakukan satu atau lebih isometri terhadap kisi satuan tersebut. Pola seperti ini dikenal dengan istilah pola simetri. Terdapat 17 tipe pola simetri yang dapat dilihat pada Gambar 1 [11].



Gambar 1. [11] Tipe-tipe Pola Simetri

Huruf p menyatakan sel primitif (kisi satuan) yang memiliki pusat dengan orde rotasi tertinggi berada pada titik kisi dan c menyatakan sel terpusat yang memiliki sumbu refleksi yang tegak lurus dengan satu atau dua sisi sel. Huruf m (*mirror*) menyatakan sumbu refleksi dan g menyatakan bahwa tidak ada refleksi melainkan

refleksi geser. Nilai α menyatakan sudut rotasi terhadap sumbu- x yang bergantung pada n (orde rotasi), yaitu $\alpha = 180^\circ$ untuk $n = 1$ atau $n = 2$, $\alpha = 45^\circ$ untuk $n = 4$, $\alpha = 60^\circ$ untuk $n = 3$ atau $n = 6$ [11].

Berdasarkan definisi, pola simetri $p2$ adalah pola berulang dua dimensi yang memiliki simetri translasi sepanjang sumbu- x dan sumbu- y dan simetri rotasi sebesar π . Pola ini tidak memiliki simetri refleksi dan simetri refleksi geser. Pola ini memiliki kisi satuan berbentuk jajaran genjang dan pusat rotasi lipat-2. Contoh gambar yang memiliki pola simetri $p2$ adalah motif batik Parang Nilik [8] seperti terlihat pada Gambar 2.



Gambar 2. [8] Motif Batik Parang Nilik yang memenuhi pola simetri $p2$

3. Pembahasan

3.1. Syarat dan Pemilihan Fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$

3.1.1. Syarat Pada Isometri

(1) Simetri Translasi

Misalkan sistem (1.1) memiliki simetri translasi dengan periode T di sepanjang sumbu- x , yaitu tersebut tidak berubah setelah ditransformasi $x' = x - T$ dan $y' = y$. Substitusi x' dan y' yang diperoleh ke persamaan (1.1), maka didapatkan

$$\begin{cases} x'_{n+1} = x'_n + f(x'_n + T, y'_n), \\ y'_{n+1} = y'_n + g(x'_n + T, y'_n). \end{cases} \quad (3.1)$$

Agar persamaan (1.1) dan (3.1) identik, maka

$$\begin{cases} f(x + T, y) = f(x, y), \\ g(x + T, y) = g(x, y). \end{cases} \quad (3.2)$$

Hal serupa berlaku juga jika sistem (1.1) mempunyai simetri translasi dengan periode T^* di sepanjang sumbu- y , yaitu $x' = x$ dan $y' = y - T^*$,

sehingga diperoleh

$$\begin{cases} x'_{n+1} = x'_n + f(x'_n, y'_n + T^*), \\ y'_{n+1} = y'_n + g(x'_n, y'_n + T^*). \end{cases} \quad (3.3)$$

Agar persamaan (1.1) dan (3.3) identik, maka

$$\begin{cases} f(x, y + T^*) = f(x, y), \\ g(x, y + T^*) = g(x, y). \end{cases} \quad (3.4)$$

Jika sistem (1.1) memiliki simetri translasi sepanjang sumbu- x dan sumbu- y dengan periode masing-masing T dan T^* , maka akan berlaku persamaan (3.2) dan (3.4), yaitu

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x + T, y) = f(x, y + T^*), \\ g(x, y) = g(x + T, y) = g(x, y + T^*). \end{cases} \quad (3.5)$$

(2) Simetri Rotasi

Misalkan sistem (1.1) tidak mengalami perubahan setelah dilakukan rotasi sebesar θ yang berlawanan arah jarum jam. Dalam hal ini transformasi yang berlaku sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

dengan

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa $\det(T_\theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, sehingga T_θ dapat diinverskan. Akibatnya berlaku

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Dengan melakukan substitusi persamaan (3.7) ke persamaan (1.1), diperoleh

$$T_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = T_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}.$$

Kalikan kedua ruas dengan T_θ didapatkan

$$\begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} + T_\theta \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Agar persamaan (1.1) dan (3.8) menjadi identik, maka haruslah

$$f(x', y') = \cos \theta f(x, y) - \sin \theta g(x, y), \quad (3.9)$$

$$g(x', y') = \sin \theta f(x, y) + \cos \theta g(x, y). \quad (3.10)$$

3.1.2. Pemilihan Fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$

Sebagaimana yang sudah dijelaskan sebelumnya, pola simetri $p2$ memiliki rotasi dengan sudut rotasi $\theta = \pi$. Berdasarkan persamaan (3.6), diperoleh hasil rotasi sebesar $\theta = \pi$ sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Substitusi nilai $\theta = \pi$ ke persamaan (3.9) dan (3.10), kemudian gunakan persamaan (3.11), maka diperoleh

$$f(x, y) = -f(-x, -y), \quad (3.12)$$

$$g(x, y) = -g(-x, -y). \quad (3.13)$$

Misalkan solusi dari persamaan (3.12) dan (3.13) dapat dinyatakan masing-masing sebagai

$$f(x, y) = rh(x, y) + sh(-x, -y) \quad (3.14)$$

dan

$$g(x, y) = tk(x, y) + uk(-x, -y) \quad (3.15)$$

untuk suatu fungsi h dan k tak-nol, r, s, t dan u adalah bilangan riil tak-nol.

Dengan menggunakan persamaan (3.11) dan (3.14), persamaan (3.12) menghasilkan $r = -s$. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (3.11) dan (3.15), persamaan (3.13) menghasilkan $t = -u$.

Substitusikan $r = -s$ dan $t = -u$ masing-masing ke persamaan (3.14) dan (3.15), maka diperoleh

$$f(x, y) = -sh(x, y) + sh(-x, -y), \quad (3.16)$$

$$g(x, y) = -uk(x, y) + uk(-x, -y). \quad (3.17)$$

Misalkan periode simetri translasi sepanjang sumbu- x sama dengan periode translasi sepanjang sumbu- y , yaitu $T = T^*$. Dengan demikian persamaan (3.5) menjadi

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x + T, y) = f(x, y + T), \\ g(x, y) = g(x + T, y) = g(x, y + T). \end{cases} \quad (3.18)$$

Asumsikan fungsi $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ periodik sepanjang sumbu- x dan sumbu- y dengan periode 2π . Dengan demikian $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ untuk kasus khusus masing-masing dapat dinyatakan dalam deret Fourier dua variabel sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos mx \cos ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos mx \sin ny + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin mx \cos ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \sin mx \sin ny \end{aligned} \quad (3.19)$$

dan

$$k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_{mn} \cos mx \cos ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_{mn} \sin mx \cos ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{D}_{mn} \sin mx \sin ny \quad (3.20)$$

Berdasarkan analisis lebih lanjut terhadap persamaan (3.12) dan (3.13), $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ masing-masing dapat disederhanakan menjadi

$$h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin mx \cos ny. \quad (3.21)$$

dan

$$k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_{mn} \sin mx \cos ny. \quad (3.22)$$

Selanjutnya substitusikan nilai $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ masing-masing pada persamaan (3.16) dan (3.17), diperoleh

$$f(x, y) = -2s \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin mx \cos ny \right\} \quad (3.23)$$

dan

$$g(x, y) = -2u \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_{mn} \sin mx \cos ny \right\} \quad (3.24)$$

Dengan demikian fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ yang membuat sistem (1.1) memiliki pola simetri $p2$ masing-masing diberikan oleh persamaan (3.23) dan (3.24).

3.2. Pembangkitan Pola Simetri $p2$

Pembangkitan pola simetri $p2$ dalam makalah ini diperoleh melalui simulasi numerik terhadap sistem (1.1) dengan menggunakan aplikasi Matlab. Untuk pewarnaan titik (*pixel*) digunakan cara berikut [2]: setiap titik (x, y) pada suatu bidang $A \subset \mathbb{R}^2$ dijadikan sebagai titik awal (x_0, y_0) pada iterasi (1.1), sehingga diperoleh barisan titik $\{(x_n, y_n)\}$. Proses iterasi dijalankan selama memenuhi kriteria konvergensi Euclidean berikut:

$$\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \leq \epsilon, \quad n \geq 0,$$

untuk suatu toleransi galat ϵ , atau telah tercapai jumlah maksimum iterasi, misalkan K . Setelah proses iterasi berakhir, pilih warna pada titik (x, y) berdasarkan jumlah iterasi yang dihasilkan.

Dalam simulasi pembangkitan pola simetri ini, ditetapkan $A = [-10, 10]^2$ dengan tingkat resolusi gambar pada bidang A dalam arah x ($nx = 1500$) dan arah y ($ny = 1500$), $\epsilon = 0.1$, $K = 50$ dan *colourmap* tipe jet pada Matlab. Pemilihan nilai K dan ϵ ini mengikuti referensi [2]. Selanjutnya dilakukan empat kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ untuk memperoleh pola-pola $p2$ yang berbeda, yaitu:

- (1) Nilai $s = 0.3$, $u = 0.1$, $B_{11} = 1$, $C_{22} = 1$, $B_{mn} = C_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1, 2$ dan $n \neq 1, 2$, $\hat{B}_{11} = 1$, $\hat{C}_{22} = 1$, $\hat{B}_{mn} = \hat{C}_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1, 2$ dan $n \neq 1, 2$. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -0.6(\cos x \sin y + \sin 2x \cos 2y) \\ g(x, y) &= -0.2(\cos x \sin y + \sin 2x \cos 2y) \end{aligned} \quad (3.25)$$

- (2) Nilai $s = 0.3$, $u = 0.2$, $B_{11} = 1$, $C_{21} = 1$, $B_{mn} = C_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1, 2$ dan $n \neq 1$, $\hat{B}_{11} = 1$, $\hat{C}_{21} = 1$, $\hat{B}_{mn} = \hat{C}_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1, 2$ dan $n \neq 1$. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -0.6(\cos x \sin y + \sin 2x \cos y) \\ g(x, y) &= -0.2(\cos x \sin y + \sin 2x \cos y) \end{aligned} \quad (3.26)$$

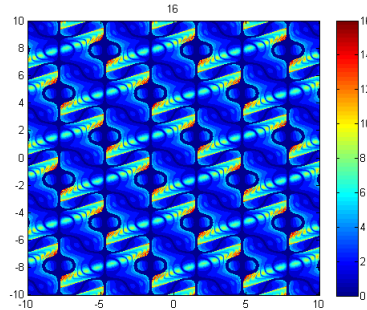
- (3) Nilai $s = -0.3$, $u = 0.2$, $B_{22} = 1$, $C_{11} = 1$, $B_{mn} = C_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1, 2$ dan $n \neq 1, 2$, $\hat{B}_{22} = 1$, $\hat{C}_{11} = 1$, $\hat{B}_{mn} = \hat{C}_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1, 2$ dan $n \neq 1, 2$. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0.6(\cos 2x \sin 2y + \sin x \cos y) \\ g(x, y) &= -0.4(\cos 2x \sin 2y + \sin x \cos y) \end{aligned} \quad (3.27)$$

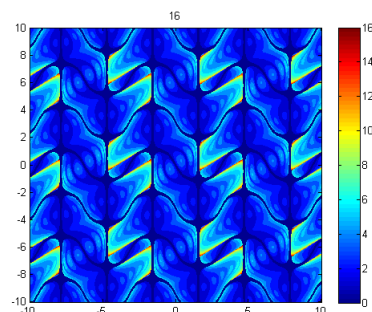
- (4) Nilai $s = -0.1$, $u = 0.3$, $B_{12} = 1$, $C_{13} = 1$, $B_{mn} = C_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1$ dan $n \neq 2, 3$, $\hat{B}_{12} = 1$, $\hat{C}_{13} = 1$, $\hat{B}_{mn} = \hat{C}_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1$ dan $n \neq 2, 3$. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0.2(\cos x \sin 2y + \sin x \cos 3y) \\ g(x, y) &= -0.6(\cos x \sin 2y + \sin x \cos 3y) \end{aligned} \quad (3.28)$$

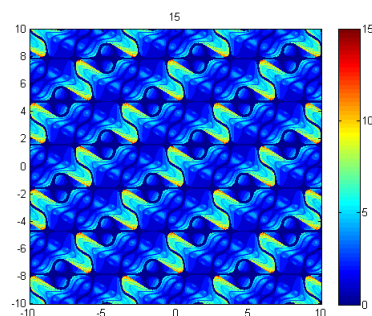
Hasil pembangkitan pola simetri $p2$ pada Matlab berdasarkan empat kombinasi tersebut ditunjukkan masing-masing pada Gambar 3, 4, 5 dan 6. Perhatikan bahwa pola yang dihasilkan memenuhi sifat-sifat pola simetri $p2$. Berbagai kombinasi lain untuk nilai-nilai parameter tentu saja akan menghasilkan pola-pola yang lebih variatif.



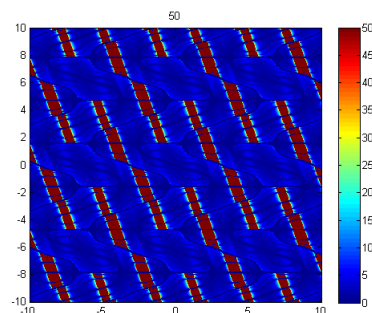
Gambar 3. Pola simetri $p2$ yang bersesuaian dengan persamaan (3.25)



Gambar 4. Pola simetri $p2$ yang bersesuaian dengan persamaan (3.26)



Gambar 5. Pola simetri $p2$ yang bersesuaian dengan persamaan (3.27)



Gambar 6. Pola simetri $p2$ yang bersesuaian dengan persamaan (3.26)

4. Kesimpulan

Dalam makalah ini telah dibahas pembangkitan pola simetri $p2$ dari simulasi sistem dinamik. Syarat dan pemilihan fungsi dinamik didasarkan pada sifat-sifat yang berlaku yaitu simetri rotasi 180° dan simetri translasi di sepanjang sumbu- x dan sumbu- y dengan periode tertentu. Pembangkitan pola simetri $p2$ dilakukan menggunakan aplikasi Matlab dengan *colourmap* tipe *jet*. Dari simulasi terhadap beberapa kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi dinamik, diperoleh pola-pola simetri $p2$ yang lebih variatif.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Riri Lestari, Ibu Haripamyu, dan Bapak Admi Nazra yang telah memberikan masukan dan saran terhadap penyempurnaan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Cania, K.F. 2020. Pembangkitan Pola Simetri Rotasi 90° dari Simulasi Sistem Dinamik. *Jurnal Matematika Universitas Andalas*. **10**(1): 20 – 28
- [2] Chung, K.W. dan H.S.Y. Chan. 1993. *Symmetrical Patterns from Dynamics*. *Computer Graphics Forum*. **12**(1): 33 – 40
- [3] Chung, K.W. dan H.S.Y. Chan. 1995. *Spherical Symmetries from Dynamics*. *Computer Math. Applic.* **29**(7): 67 – 81
- [4] Durbin, J.R. 2009. *Modern Algebra: An Introduction Sixth Edition*. John Wiley and Sons, Austin
- [5] Gdawiec, K. 2017. Procedural Generation of Aesthetic Patterns from Dynamics and Iteration Processes. *International Journal of Application Mathematics and Computer*. **27**(4): 827 – 837
- [6] Hirsch, M.W., S. Stephen dan L.D. Robert. 2004. *Differential Equation, Dynamical System, and An Introduction to Chaos*. An Imprint of Elsevier, Boston
- [7] Lu, J., Z. Ye, dan Y. Zou. 2010. Colorful Patterns with Discrete Planar Symmetries from Dynamical Systems, Fractals. *Computer Graphics Forum*. **18**(1): 35 – 43
- [8] Maulidya, T.I dan R.V. Sihombing. 2018. Pola Kristalografi Bidang Ragam Batik Yogyakarta. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, Purworejo
- [9] Ouyang, P. 2015. Colorful Archimedean Tilings from Dynamical Systems. *Beautiful Math*. **5**(15): 90 – 94
- [10] Putri, R.M. 2020. Pembangkitan Pola Simetri Refleksi dan Rotasi 60° dari Simulasi Sistem Dinamik. *Skripsi S-1, tidak diterbitkan*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas, Padang
- [11] Schattschneider, D. 1978. The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation. *American Mathematical Monthly*. **85**(6): 430 – 450
- [12] Viera, W.O. 2020. Pembangkitan Pola Simetri $p2mm$ dari Simulasi Sistem Dinamik. *Skripsi S-1, tidak diterbitkan*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas, Padang