Jurnal Matematika UNAND
Vol. **12** No. **4** Hal. 309 – 317
ISSN : 2303–2910

BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT HIMPUNAN $M_j(C_n, C_s)$ UNTUK *CYCLE*

ABDUL MAJID*, SYAFRIZAL SY, ADMI NAZRA

Departemen Matematika dan Sains Data,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : abdulmajidetos18@gmail.com

Diterima 30 Juni 2022 Direvisi 20 Desember 2022 Dipublikasikan 21 Oktober 2023

Abstrak. Diberikan dua graf G dan H sembarang. Bilangan Ramsey multipartit himpunan (R-M-H) $M_j(G, H)$ dengan bilangan asli $j \geq 2$, adalah bilangan bulat positif terkecil t sedemikian sehingga jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap $K_{t\times j}$ diberi sebarang 2−pewarnaan merah-biru, maka graf $K_{t\times j}$ senantiasa memuat G berwarna merah sebagai subgraf atau H berwarna biru sebagai subgraf. Graf C_n adalah suatu graf *cycle* dengan $n \geq 3$ titik. Pada artikel ini, penulis akan menentukan bilangan R-M-H $M_j(C_n, C_s)$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 3$ ganjil dan $s \geq 3$. Hasil dari penelitian ini adalah ditemukannya bilangan R-M-H $M_j(C_n, C_s)$ untuk *cycle* dengan bilangan asli $j \geq 2$, $n \geq 3$ ganjil dan $s \geq 3$.

Kata Kunci: Bilangan R-M-H; Graf A.Majid; Graf *cycle*; *Matching*

1. Pendahuluan

Pada tahun 2000, Goddard, Michael, dan Ortrud mendefinisikan bilangan Ramsey bipartit [4]. Kemudian, bilangan Ramsey bipartit berkembang menjadi bilangan Ramsey multipartit. Bilangan Ramsey Multipartit diperluas menjadi bilangan Ramsey Multipartit Himpunan (R-M-H) dan bilangan Ramsey Multipartit Ukuran (R-M-U) yang dijelaskan Burger dan Vuuren dalam [2] dan [3] pada tahun 2004. Konsep dari bilangan R-M-H yaitu minimum t dari graf multipartit seimbang lengkap $K_{t\times j}$ yang terdiri dari t himpunan partit dan j banyaknya titik pada setiap himpunan partit.

Beberapa bilangan R-M-H dalam [7], antara lain:

(1) Untuk $3 \leq s \leq 4$, $M_2(P_2, P_s) = 2$.
(2) Untuk $5 \leq s \leq 6$, $M_2(P_2, P_s) = 3$.
(3) Untuk $3 \leq s \leq 6$, $M_2(P_3, P_s) = 3$.
(4) Untuk $3 \leq t \leq 6$, $M_3(P_3, k_{1,t}) = 3$.

Pada artikel ini akan ditentukan bilangan R-M-H yang memuat graf *cycle* ganjil dan graf *cycle* genap. Dengan kata lain, akan ditentukan bilangan R-M-H $M_j(C_n, C_s)$ untuk *cycle*.

*Penulis korespondensi

2. Landasan Teori

Pada [1] didefinisikan bahwa suatu graf G adalah pasangan himpunan terurut $G = (V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah suatu himpunan tak kosong yang elemen-elemennya disebut titik dan $E(G)$ adalah suatu himpunan yang elemen-elemennya disebut sisi. Derajat dari suatu titik $v \in V(G)$ adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v ditulis $d(v)$. Derajat minimum adalah minimum dari banyaknya sisi yang terkait dari setiap titik pada graf G ditulis $\delta(G)$, dan derajat maksimum adalah maksimum dari banyaknya sisi yang terkait dengan setiap titik pada graf G, ditulis $\triangle(G)$. Graf H adalah subgraf dari graf G jika dan hanya jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Subgraf induksi dari G oleh V' adalah $G[V']$ jika untuk setiap $x, y \in V'$ maka berlaku $(x, y) \in E'$ jika dan hanya jika $(x, y) \in E$. Graf $\overline{G}$ dikatakan komplemen dari graf G jika $V(G) = V(\overline{G})$ dan $xy \in E(\overline{G})$ jika dan hanya jika $xy \notin E(G)$.

Faktorisasi dari graf G adalah himpunan yang beranggotakan subgraf-subgraf tak kosong $G_1, G_2, \cdots, G_n$ sedemikian sehingga $V(G_i) = V(G_j)$ dan $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$ dan $i, j \in 1, 2, \cdots, n$. Faktorisasi dari graf G dinotasikan dengan $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$. Selanjutnya suatu *matching* M pada graf G adalah himpunan sisi dari graf G yang saling lepas sehingga $M \subseteq E(G)$. Kardinalitas M disebut sebagai banyak sisi dari *matching*. Jika setiap titik dari graf G terkait dengan sisi dari M, maka M tersebut disebut *matching* sempurna. Suatu *matching* M dikatakan *matching* maksimal jika tidak dapat diperluas menjadi *matching* yang lebih dari M. Jika M adalah suatu *matching* sempurna, maka M adalah *matching* maksimal, namun sebaliknya tidak berlaku.

Graf *cycle* adalah graf terhubung yang setiap titik berderajat dua dan disebut juga graf terhubung 2-reguler. Graf *cycle* dinotasikan dengan C_n. Panjang dari C_n adalah banyak sisi yang terdapat di C_n yaitu n. Jika terdapat suatu graf G sembarang, maka graf *cycle* maksimal adalah graf C_n dengan n terbesar yang dapat dibentuk di G. Selanjutnya graf multipartit seimbang lengkap adalah graf multipartit lengkap dengan kardinalitas titik di setiap himpunan partit bernilai sama. Graf multipartit seimbang lengkap dengan banyak himpunan partitnya t dan kardinalitas titik pada setiap himpunan partitnya j, dinotasikan $K_{t\times j}$ [5].

Pada tahun 2004 Burger dan Van Vuuren mendefinisikan bilangan Ramsey multipartit himpunan sebagai berikut.

Definisi 2.1. *[2] Misalkan $j, l, n, s,$ dan t merupakan bilangan bulat positif dengan $n, s \geq 2$. Bilangan Ramsey multipartit-himpunan $M_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ merupakan bilangan bulat positif terkecil ζ sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap $K_{\zeta\times j}$ diberi dua pewarnaan merah-biru, maka graf multipartit seimbang lengkap $K_{\zeta\times j}$ akan memuat $K_{n\times l}$ merah atau $K_{s\times t}$ biru sebagai subgraf.*

Misalkan x adalah bilangan real, pasti x berada diantara dua bilangan bulat. Fungsi *floor* dan *ceiling* memetakan bilangan real tersebut terhadap bilangan bulat terdekat. Fungsi *floor* dari x ditulis $\lfloor x \rfloor$, menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Fungsi *ceiling* dari x ditulis $\lceil x \rceil$, menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x. Selanjutnya, Definisi 2.1 akan diperumum untuk graf yang tak harus lengkap, yaitu untuk sebarang graf

G dan H yang dimuat dalam bilangan R-M-H. Berikut definisi bilangan R-M-H dengan 2-pewarnaan.

Definisi 2.2. [6] *Diberikan dua graf G dan H, dan bilangan asli $j \geq 2$. Bilangan Ramsey multipartit $M_j(G, H)$ adalah bilangan bulat positif terkecil t sedemikian sehingga jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap $K_{t\times j}$ diberi sebarang 2-pewarnaan merah-biru, maka graf $K_{t\times j}$ akan memuat graf G berwarna merah atau graf H berwarna biru, sebaliknya.*

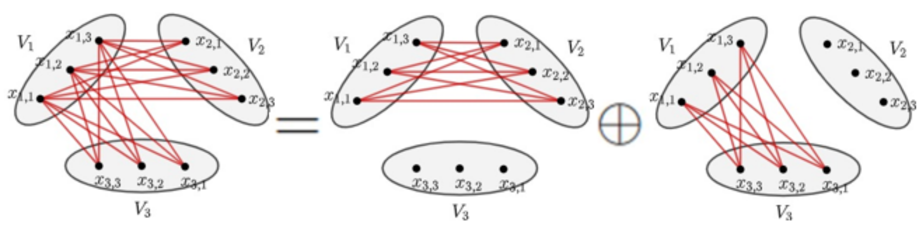
Teorema 2.3. [1] *Suatu graf G dikatakan graf bipartit jika dan hanya jika graf G tersebut tidak memuat cycle ganjil.*

3. Bilangan R-M-H $M_j(C_n, C_s)$ Untuk Graf *Cycle*

Pada bagian ini akan didefinisikan suatu graf yang membantu dalam menentukan bilangan R-M-H $M_j(C_n, C_s)$ untuk *cycle*. Perhatikan Definisi 3.1 berikut.

Definisi 3.1. *Misalkan G adalah sebarang graf multipartit seimbang lengkap $K_{(t\times j)}$. Misalkan $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_t$ dengan $V_1, V_2, \cdots, V_t$ adalah himpunan partit dari graf G. Jika graf $M \subseteq G$ dengan $M = M_1[A_1] \cup \overline{A_1} \oplus M_2[A_2] \cup \overline{A_2} \oplus \cdots \oplus M_{t-1}[A_{t-1}] \cup \overline{A_{t-1}}$ untuk $A_i = V_1 \cup V_{i+1}; i = 1, 2, \cdots, , t-1$ maka graf M disebut graf Multipartit sempurna bintang $M_{t\times j}$.*

Berikut disajikan ilustrasi untuk graf Multipartit sempurna bintang $M_{(3\times 3)}$ dengan $M = M_1[A_1] \cup \overline{A_1} \oplus M_2[A_2] \cup \overline{A_2}$ untuk $A_i = V_1 \cup V_{i+1}; i = 1, 2$. Perhatikan Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1. Faktorisasi graf Multipartit sempurna bintang $M_{(3\times 3)}$

Berdasarkan Definisi 3.1, graf Multipartit sempurna bintang memuat beberapa graf bipartit lengkap. Oleh karena itu, graf Multipartit sempurna bintang tidak memuat *cycle* ganjil. Hal ini disebabkan karena pada Teorema 2.3, graf bipartit tidak memuat *cycle* ganjil. Selanjutnya, perhatikan beberapa teorema dalam menentukan bilangan R-M-H $M_j(C_n, C_s)$ untuk *cycle*.

Teorema 3.2. $M_j(C_n, C_s) = 3$ *untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan s genap dengan $s \leq 2j$.*

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan $M_j(C_n, C_s) \geq 3$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan s genap dengan $s \leq 2j$. Misalkan graf $F = K_{(3-1)\times j}$. Beri 2−pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf F. Berdasarkan Teorema 2.3, F tidak memuat *cycle* ganjil karena F graf bipartit. Oleh karena itu, diperoleh $M_j(C_n, C_s) > 2$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $s \geq 3$. Akibatnya, $M_j(C_n, C_s) \geq 3$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan s genap dengan $s \leq 2j$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $M_j(C_n, C_s) \leq 3$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan s genap dengan $s \leq 2j$. Misalkan diberi $2-$pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $G = K_{3\times j}$ sedemikian sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Akan ditunjukkan bahwa G_2 memuat C_s biru untuk s genap dengan $s \leq 2j$. Agar G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Perhatikan dua kasus berikut ini.

Kasus 1. G_1 adalah graf Multipartit sempurna bintang $M_{3\times j}$.
Graf Multipartit sempurna bintang tidak memuat *cycle* ganjil sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Berdasarkan Teorema 2.3, G_2 tidak memuat *cycle* ganjil karena G_2 graf bipartit. Kemudian G_2 memiliki titik sebanyak $2j$. Oleh karena itu, G_2 memuat *cycle* genap dengan C_{2j} adalah *cycle* maksimalnya. Akibatnya, $M_j(C_n, C_s) \leq 3$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan s genap dengan $s \leq 2j$.

Kasus 2. G_1 adalah *matching*.
Matching G_1 pada graf G adalah himpunan sisi dari graf G yang saling lepas sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Selanjutnya G memiliki titik sebanyak $3j$. Berdasarkan banyak titik di G_1, *matching* G_1 dibagi menjadi dua jenis:

(a) Jika banyak titik di G_1 genap maka G_1 *matching* sempurna. Oleh karena itu, setiap titik di G_1 memiliki derajat 1 sehingga setiap titik di G_2 memiliki derajat $2j-1$. Hal ini disebabkan setiap titik di G memiliki derajat $2j$. Akibatnya, G_2 memuat *cycle* dengan C_{3j} adalah *cycle* maksimalnya.
(b) Jika banyak titik di G_1 ganjil maka G_1 *matching* maksimal. Oleh karena itu, $\triangle(G_1) = 1$ sehingga $\delta(G_2) = 2j - 1$. Hal ini disebabkan setiap titik di G memiliki derajat $2j$. Akibatnya, G_2 memuat *cycle* dengan C_{3j} adalah *cycle* maksimalnya.

Dari (a) dan (b) diperoleh bahwa G_2 memuat *cycle* dengan C_{3j} adalah *cycle* maksimalnya.

Dari **Kasus 1** dan **Kasus 2** diperoleh bahwa G_2 memuat *cycle* C_s untuk $s \leq 3j$. Oleh karena itu, G_2 memuat *cycle* genap dengan $s \leq 2j$. Akibatnya, $M_j(C_n, C_s) \leq 3$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan s genap dengan $s \leq 2j$.

Berdasarkan hal di atas, diperoleh bahwa $M_j(C_n, C_s) \geq 3$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan s genap dengan $s \leq 2j$ serta $M_j(C_n, C_s) \leq 3$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan s genap dengan $s \leq 2j$. Oleh karena itu, $M_j(C_n, C_s) = 3$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan s genap dengan $s \leq 2j$. □

Teorema 3.3. *$M_j(C_n, C_s) = 4$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan ((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)).*

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan $M_j(C_n, C_s) \geq 4$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan

((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)). Misalkan graf $F = K(4-1) \times j$. Beri 2-pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf F sebagai berikut: warna merah untuk semua sisi F_1 dengan F_1 graf Majid $M_{3\times j}$ dan warna biru pada semua sisi F_2 dengan $F_2 = \bar{F_1}$. Berdasarkan Definisi 3.1, F_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Kemudian berdasarkan Teorema 2.3, F_2 tidak memuat *cycle* ganjil biru dengan C_{2j} sebagai *cycle* maksimalnya. Selanjutnya F_2 tidak memuat C_s dengan $s > 2j$ karena C_{2j} adalah *cycle* maksimal F_2. Akibatnya, $M_j(C_n, C_s) \geq 4$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan ((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)).

Selanjutnya akan ditunjukkan $M_j(C_n, C_s) \leq 4$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan ((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)). Misalkan diberi $2-$pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $G = K_{4\times j}$ sedemikian sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Akan ditunjukkan bahwa G_2 memuat C_s biru untuk ((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)). Agar G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil, perhatikan dua kasus berikut ini:

Kasus 1. G_1 adalah graf A.Majid $M_{4\times j}$.
Graf A.Majid tidak memuat *cycle* ganjil sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Kemudian G_2 memiliki titik sebanyak $3j$ dan setiap titik di G_2 memiliki derajat $2j$. Oleh karena itu, G_2 memuat C_{3j} sebagai *cycle* maksimalnya. Berdasarkan definisi bilangan R-M-H yang merupakan bilangan positif terkecil sehingga $M_j(C_n, C_s) \leq 4$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan ((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)).

Kasus 2. G_1 adalah *matching*.
Matching G_1 pada graf G adalah himpunan sisi dari graf G yang saling lepas sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Banyak titik di G_1 adalah $4j$. Oleh karena itu, banyak titik di G_1 genap sehingga G_1 *matching* sempurna. Jadi, setiap titik di G_1 memiliki derajat 1. Akibatnya, setiap titik di G_2 memiliki derajat $3j - 1$, karena setiap titik di G memiliki derajat $3j$. Oleh karena itu, G_2 memuat C_{4j} sebagai *cycle* maksimalnya.

Dari **Kasus 1** dan **Kasus 2** diperoleh bahwa G_2 memuat *cycle* C_s untuk $s \leq 4j$. Oleh karena itu, G_2 memuat C_s untuk ((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)). Akibatnya, $M_j(C_n, C_s) \leq 4$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan ((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)).

Berdasarkan hal di atas, diperoleh bahwa $M_j(C_n, C_s) \geq 4$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan ((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)) serta $M_j(C_n, C_s) \leq 4$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan ((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)). Oleh karena itu, $M_j(C_n, C_s) = 4$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan ((s ganjil dengan $s < 2j$) atau ($2j < s \leq 3j$)). □

Teorema 3.4. *$M_j(C_n, C_s) = \lceil \frac{s}{j} \rceil + 1$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $s > 3j$.*

Bukti. Perhatikan hal-hal berikut ini:

(1) Misalkan $M_j(C_n, C_s) = 5$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $3j < s \leq 4j$.

Pertama-tama akan ditunjukkan $M_j(C_n, C_s) \geq 5$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $3j < s \leq 4j$. Misalkan graf $F = K(5-1) \times j$. Beri $2-$pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf F sebagai berikut: warna merah untuk semua sisi F_1 dengan F_1 graf Majid $M_{4\times j}$ dan warna biru pada semua sisi F_2 dengan $F_2 = \bar{F}_1$. Berdasarkan Definisi 3.1, F_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Kemudian F_2 memiliki titik sebanyak $4j$ dan setiap titik memiliki derajat $3j$. Oleh karena itu, F_2 memuat C_{3j} sebagai *cycle* maksimalnya. Selanjutnya F_2 tidak mungkin memuat C_s untuk $s > 3j$ karena C_{3j} adalah *cycle* maksimal F_2. Oleh karena itu, $M_j(C_n, C_s) \geq 5$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $s > 3j$. Akibatnya, $M_j(C_n, C_s) \geq 5$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $3j < s \leq 4j$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $M_j(C_n, C_s) \leq 5$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $3j < s \leq 4j$. Misalkan diberi $2-$pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $G = K_{5\times j}$ sedemikian sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Akan ditunjukkan bahwa G_2 memuat C_s biru untuk $3j < s \leq 4j$. Agar G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Perhatikan dua kasus berikut ini:

Kasus 1. G_1 adalah graf A. Majid $M_{5\times j}$.
Perhatikan bahwa graf A. Majid tidak memuat *cycle* ganjil sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Kemudian G_2 memiliki titik sebanyak $4j$ dan setiap titik di G_2 memiliki derajat $3j$. Oleh karena itu, G_2 memuat C_{4j} sebagai *cycle* maksimalnya. Berdasarkan definisi bilangan R-M-H yang merupakan bilangan positif terkecil sehingga $M_j(C_n, C_s) \leq 5$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $3j < s \leq 4j$.

Kasus 2. G_1 adalah *matching.*
Perhatikan bahwa *matching* G_1 pada graf G adalah himpunan sisi dari graf G yang saling lepas sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Kemudian G_2 memiliki titik sebanyak $5j$. Berdasarkan banyak titik di G_1, *matching* G_1 dibagi menjadi dua jenis:

(a) Jika banyak titik di G_1 genap maka G_1 *matching* sempurna. Oleh karena itu, setiap titik di G_1 memiliki derajat 1 sehingga setiap titik di G_2 memiliki derajat $4j - 1$. Hal ini disebabkan setiap titik di G memiliki derajat $2j$. Akibatnya, G_2 memuat *cycle* dengan C_{5j} adalah *cycle* maksimalnya.
(b) Jika banyak titik di G_1 ganjil maka G_1 *matching* maksimal. Oleh karena itu, $\triangle(G_1) = 1$ sehingga $\delta(G_2) = 4j - 1$. Hal ini disebabkan setiap titik di G memiliki derajat $2j$. Akibatnya, G_2 memuat *cycle* dengan C_{5j} adalah *cycle* maksimalnya.

Dari (a) dan (b) diperoleh bahwa G_2 memuat *cycle* dengan C_{5j} adalah *cycle* maksimalnya.

Dari **Kasus 1** dan **Kasus 2** diperoleh bahwa G_2 memuat *cycle* C_s untuk $s \leq 5j$. Oleh karena itu, G_2 memuat C_s untuk $3j < s \leq 4j$. Akibatnya, $M_j(C_n, C_s) \leq 5$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $3j < s \leq 4j$.

Berdasarkan hal di atas, diperoleh bahwa $M_j(C_n, C_s) \geq 5$ untuk $j \geq 2$,

n ganjil, dan $3j < s \leq 4j$ serta $M_j(C_n, C_s) \leq 5$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $3j < s \leq 4j$. Oleh karena itu, $M_j(C_n, C_s) = 5$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $3j < s \leq 4j$.

(2) Misalkan $M_j(C_n, C_s) = 6$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $4j < s \leq 5j$.

Pertama-tama akan ditunjukkan $M_j(C_n, C_s) \geq 6$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $4j < s \leq 5j$. Misalkan graf $F = K(6-1) \times j$. Beri 2−pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf F sebagai berikut: warna merah untuk semua sisi F_1 dengan F_1 graf Majid $M_{5\times j}$ dan warna biru pada semua sisi F_2 dengan $F_2 = \bar{F}_1$. Berdasarkan Definisi 3.1, F_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Kemudian F_2 memiliki titik sebanyak $4j$ dan setiap titik di F_2 memiliki derajat $3j$. Oleh karena itu, F_2 memuat C_{4j} sebagai *cycle* maksimalnya. Selanjutnya F_2 tidak mungkin memuat C_s untuk $s > 4j$. Oleh karena itu, $M_j(C_n, C_s) \geq 6$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $s > 4j$. Akibatnya, $M_j(C_n, C_s) \geq 6$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $4j < s \leq 5j$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $M_j(C_n, C_s) \leq 6$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $4j < s \leq 5j$. Misalkan diberi 2−pewarnaan merah biru pada semua sisi graf $G = K_{6\times j}$ sedemikian sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Akan ditunjukkan bahwa G_2 memuat C_s biru untuk $4j < s \leq 5j$. Agar G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Perhatikan dua kasus berikut ini:

Kasus 1. G_1 adalah graf A.Majid $M_{6\times j}$.
Perhatikan bahwa graf A.Majid tidak memuat *cycle* ganjil sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Kemudian G_2 memiliki titik sebanyak $5j$ dan setiap titik di G_2 memiliki derajat $4j$. Oleh karena itu, G_2 memuat C_{5j} sebagai *cycle* maksimalnya. Berdasarkan definisi bilangan R-M-H yang merupakan bilangan positif terkecil sehingga $M_j(C_n, C_s) \leq 6$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $4j < s \leq 5j$.

Kasus 2. G_1 adalah *matching.*
Perhatikan bahwa *matching* G_1 pada graf G adalah himpunan sisi dari graf G yang saling lepas sehingga G_1 tidak memuat C_n merah untuk n ganjil. Banyak titik di G_1 sebanyak $6j$. Oleh karena itu, banyak titik di G_1 adalah genap sehingga G_1 *matching* sempurna. Jadi, setiap titik di G_1 memiliki derajat 1. Akibatnya, setiap titik di G_2 memiliki derajat $5j - 1$, karena setiap titik di G memiliki derajat $5j$. Oleh karena itu, G_2 memuat C_{6j} sebagai *cycle* maksimalnya.

Dari **Kasus 1** dan **Kasus 2** diperoleh bahwa G_2 memuat C_s untuk $s \leq 5j$. Oleh karena itu, G_2 memuat C_s untuk $4j < s \leq 5j$. Akibatnya, $M_j(C_n, C_s) \leq 6$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $4j < s \leq 5j$.

Berdasarkan hal di atas, diperoleh bahwa $M_j(C_n, C_s) \geq 6$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $4j < s \leq 5j$ serta $M_j(C_n, C_s) \leq 6$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $4j < s \leq 5j$. Oleh karena itu, $M_j(C_n, C_s) = 6$ untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $4j < s \leq 5j$.

(3) Selanjutnya hal yang sama dilakukan untuk $j \geq 2$, n ganjil, dan $s > 5j$.

Berdasarkan hal-hal di atas, terdapat pola $M_j(C_n, C_s)$ untuk $j \geq 2$, n ganjil dan $s > 3j$ sebagai berikut.

(1) $M_j(C_n, C_s) = 5$ untuk $3j < s \leq 4j$.
(2) $M_j(C_n, C_s) = 6$ untuk $4j < s \leq 5j$.
(3) Menggunakan induksi matematika diperoleh $M_j(C_n, C_s) = y$ untuk $(y - 2)j < s \leq (y-1)j$ dengan $y \geq 7$.

   (a) Untuk $y = 7$, diperoleh bahwa $M_j(C_n, C_s) = 7$ untuk $(7-2)j < s \leq (7-1)j$. Dengan demikian, $M_j(C_n, C_s) = 7$ untuk $5j < s \leq 6j$ adalah benar.
   (b) Selanjutnya, misalkan bahwa untuk suatu nilai y, $y = k$ berlaku bahwa $M_j(C_n, C_s) = k$ untuk $(k-2)j < s \leq (k-1)j$ dengan $k \geq 7$.
   (c) Akan dibuktikan bahwa untuk $y = k+1$, berlaku bahwa $M_j(C_n, C_s) = k+1$ untuk $((k+1)-2)j < s \leq ((k+1)-1)j$ dengan $k \geq 7$. Dengan kata lain, akan dibuktikan bahwa untuk $y = k+1$ maka $M_j(C_n, C_s) = k+1$ untuk $(k-1)j < s \leq kj$ dengan $k \geq 7$.
   Perhatikan bahwa untuk $k \geq 7$, berlaku:

$$
\begin{aligned}
& M_j(C_n, C_s) = k \text{ untuk } (k-2)j < s \leq (k-1)j, \\
\Leftrightarrow\ & M_j(C_n, C_s) = k + (1-1) \text{ untuk } (k + (1-1) - 2)j < s \leq (k + (1-1) - 1)j, \\
\Leftrightarrow\ & M_j(C_n, C_s) = k + 1 - 1 \text{ untuk } (k + 1 - 1 - 2)j < s \leq (k + 1 - 1 - 1)j, \\
\Leftrightarrow\ & M_j(C_n, C_s) = (k+1) - 1 \text{ untuk } ((k+1) - 1 - 2)j < s \leq ((k+1) - 1 - 1)j, \\
\Leftrightarrow\ & M_j(C_n, C_s) = (k+1) - 1 \text{ untuk } ((k+1) - 3)j < s \leq ((k+1) - 2)j, \\
\Leftrightarrow\ & M_j(C_n, C_s) = ((k+1) - 1) + 1 \\
& \quad \text{untuk } (((k+1) - 3) + 1)j < s \leq (((k+1) - 2) + 1)j, \\
\Leftrightarrow\ & M_j(C_n, C_s) = (k+1) + (-1+1) \\
& \quad \text{untuk } ((k+1) + (-3+1))j < s \leq ((k+1) + (-2+1))j, \\
\Leftrightarrow\ & M_j(C_n, C_s) = (k+1) + 0 \text{ untuk } ((k+1) + (-2))j < s \leq ((k+1) + (-1))j, \\
\Leftrightarrow\ & M_j(C_n, C_s) = k + 1 \text{ untuk } (k + (1-2))j < s \leq (k(+1-1))j, \\
\Leftrightarrow\ & M_j(C_n, C_s) = k + 1 \text{ untuk } (k-1)j < s \leq (k+0)j, \\
\Leftrightarrow\ & M_j(C_n, C_s) = k + 1 \text{ untuk } (k-1)j < s \leq kj.
\end{aligned}
$$

   Jadi terbukti bahwa untuk $y = k+1$ berlaku bahwa $M_j(C_n, C_s) = k+1$ untuk $(k-1)j < s \leq kj$ dengan $k \geq 7$.

Dengan demikian, $M_j(C_n, C_s) = y$ untuk $(y-2)j < s \leq (y-1)j$ benar dengan $y \geq 7$.

Akibatnya, diperoleh $M_j(C_n, C_s) = \lceil \frac{s}{j} \rceil + 1$ untuk $j \geq 2$, n ganjil dan $s > 3j$. □

4. Kesimpulan

Pada penelitian ini, telah ditentukan bilangan R-M-H $M_j(C_n, C_s)$ untuk pasangan dua graf *cycle*, dengan $j \geq 2$, n ganjil, dan $s \geq 3$, yaitu:

$$M_j(C_n, C_s) = \begin{cases} 3 & ; s \text{ genap dengan } s \leq 2j, \\ 4 & ; (s \text{ ganjil dengan } s < 2j) \text{ atau } (2j < s \leq 3j), \\ \lceil \frac{s}{j} \rceil + 1 & ; s > 3j. \end{cases}.$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Des Welyyanti, Bapak Muhafzan, dan Ibu Haripamyu yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J. A. dan U.S.R. Murty, 2008, *Graph Theory*, Graduated Text in Mathematics, New York

[2] Burger, A. P dan J. H. van Vuuren, 2004, Ramsey Numbers In Complete Balance Multipartite Graphs Part I: Set Numbers. *Discrete Math* **283**: 37 – 43

[3] Burger, A. P dan J. H. van Vuuren. 2004. Ramsey Numbers In Complete Balance Multipartite Graphs Part II: Size Numbers. *Discrete Math* **283**: 45 – 49

[4] Goddard, W, A. H. Michael, dan R. O, Ortrud, 2000, Bipartite Ramsey Numbers and Zarankiewiez Numbers, *Discrete Mathematics* **219**: 85 – 95

[5] Kalbeisch J. G., 1966, *Chromatic Graphs and Ramsey's Theorem*, Ph. D Thesis, University of Waterloo, Kanada.

[6] Lubis A. A., 2021, Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan untuk Kombinasi Graf Lintasan dengan Graf Roda $M_4(P_3, W_n)$ dengan $n \leq 3$. *Skripsi*, tidak diterbitkan, Jurusan Matematika Universitas Andalas, Padang

[7] Zain, A.S., Narwen, N., Effendi E., Sy, S., 2021, The Set Multipartit Ramsey Number, *Jurnal Matematika Integratif* Vol **17**(1): 1 – 4