Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **4** Hal. 59 – 66
ISSN : 2303–291X

ANALISIS SISTEM ANTRIAN SATU SERVER (M/M/1)

ERIK PRATAMA, DODI DEVIANTO
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
erikpratama08081990@yahoo.com

Abstrak. Sistem antrian satu server (M/M/1) adalah sistem antrian sederhana dimana label pertama menyatakan dengan pola kedatangan, label kedua menyatakan tingkat pelayanan dan angka 1 menotasikan jumlah server yang ada di dalam sistem antrian. Sistem antrian satu server (M/M/1) mempunyai ciri pola kedatangan berdistribusi Poisson sedangkan waktu antar kedatangannya berdistribusi eksponensial dan pola kepergian berdistribusi Poisson dan tingkat pelayanannya berdistribusi eksponensial. Ukuran keefektifan dari sistem antrian satu server dapat dinilai dari kategori nilai harapan banyaknya *customer* dalam sistem, nilai harapan banyaknya *customer* dalam antrian, nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem dan nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam antrian.

Kata Kunci: Antrian, distribusi Poisson, distribusi eksponensial

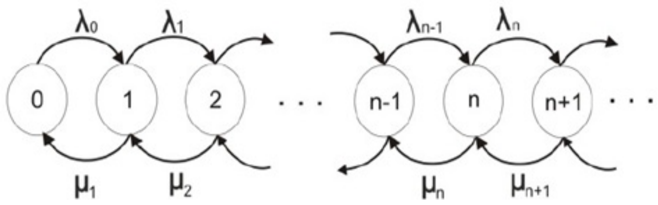
1. Pendahuluan

Proses antrian merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrian jika belum dapat dilayani, dilayani dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut sesudah dilayani. Menurut Sinalungga [5], teori antrian (*queuing theory*) merupakan studi probabilistik kejadian garis tunggu (*waiting lines*), yakni suatu garis tunggu dari *customer* yang memerlukan layanan dari sistem yang ada. Menurut Wospakrik [7], sistem antrian adalah himpunan *customer*, server beserta aturan yang mengatur antara kedatangan customer dan pelayanannya.

Dalam makalah ini akan dibahas mengenai antrian dengan pola satu server dengan distribusi kedatangan dan distribusi kepergian menyebar secara Poisson yang dinotasikan dengan M, serta tingkat pelayanan menyebar secara eksponensial yang dinotasikan dengan M, didefinisikan sebagai antrian model M/M/1. Simbol M pertama merupakan proses kedatangan, simbol M kedua merupakan proses pelayanan dan angka 1 merupakan banyak server yang ada pada sistem antrian tersebut.

2. Asumsi Probabilitas Sistem Antrian M/M/1

Laju kedatangan *customer* pada saat jumlah *customer* dalam antrian berubah dari n menjadi $n+1$ pada waktu tertentu dinotasikan dengan λ_n, sedangkan laju pelayanan *customer* pada saat jumlah *customer* dalam antrian berubah dari n menjadi $n+1$ pada waktu tertentu dinotasikan dengan μ_n sesuai dengan gambar berikut.



Gambar 1. Proses Kedatangan dan Kepergian dalam Suatu Sistem Antrian

Untuk memformulasikan proses tersebut digunakan asumsi yang dirumuskan oleh Wosparkik [5] yang dapat dijelaskan sebagai berikut.

i) Probabilitas sebuah kedatangan terjadi antara t dan $t+\triangle t$, dinyatakan dengan

$$P((X(t+\triangle t)-X(t))=1)=\lambda_n\triangle t+o(\triangle t).$$

ii) Probabilitas tidak ada kedatangan antara t dan $t+\triangle t$, dinyatakan dengan

$$P((X(t+\triangle t)-X(t))=1)=1-\lambda_n\triangle t+o(\triangle t.)$$

iii) Probabilitas sebuah kepergian terjadi antara t dan $t+\triangle t$ dinyatakan dengan

$$P((Y(t+\triangle t)-Y(t))=1)=\mu_n\triangle t+o(\triangle t).$$

iv) Probabilitas tidak ada kepergian antara t dan $t+\triangle t$ dinyatakan dengan

$$P((Y(t+\triangle t)-Y(t))=1)=1-\mu_n\triangle t+o(\triangle t).$$

v) Probabilitas terjadi lebih dari satu kejadian pada selang waktu yang sangat pendek adalah sangat kecil sehingga dapat diabaikan, dapat dinyatakan dengan

$$P((Y(t+\triangle t)-Y(t))>1)=o(\triangle t).$$

vi) Proses kedatangan, kepergian dan pelayanan merupakan kejadian yang saling bebas.

Berdasarkan Gambar 1, kemungkinan-kemungkinan kejadian saling bebas yang dapat terjadi jika terdapat n $(n>0)$ *customer* pada waktu $t+\triangle t$ adalah sebagai berikut.

Tabel 1. Kemungkinan Kejadian Terdapat n Costumer dalam Sistem pada saat $t+\triangle t$

Kasus	Jml costumer waktu (t)	Jml kedatangan waktu $\triangle t$	Jml kepergian waktu $\triangle t$	Jml costumer waktu $t+\triangle t$
1	n	0	0	n
2	$n+1$	0	1	n
3	$n-1$	1	0	n
4	n	1	1	n

Menurut asumsi (vi), kedatangan dan kepergian merupakan kejadian-kejadian yang saling bebas, sehingga peluang dari masing-masing kejadian pada Tabel 1 adalah sebagai berikut.

(1) Probabilitas kasus 1 = $P_n(t) - P_n(t) - \mu_n\triangle(t) + P_n(t)\lambda_n\triangle t$.
(2) Probabilitas kasus 2 = $P_{n+1}(t)\mu_{n+1}(t)\triangle t$.
(3) Probabilitas kasus 3 = $P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}(t)\triangle t$.
(4) Probabilitas kasus 4 = $o(t)$.

Karena kasus-kasus tersebut saling lepas, maka probabilitas terdapat n *customer* dalam sistem ($n \geq 1$) pada saat $t + \triangle t$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$P_n(t+\triangle t) = P_n(t) - P_n(t) - \mu_n\triangle(t) - \lambda_n\triangle t + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\triangle t + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\triangle t + o(t). \tag{2.1}$$

Sehingga persamaan (2.1) menjadi

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}, n \geq 1. \tag{2.2}$$

Probabilitas terdapat n *customer* dalam sistem *(n=0)* pada saat $t + \triangle t$ dapat dinyatakan dengan

$$P_0(t + \triangle t) = P_0(t) - P_0(t)\lambda_0\triangle t + P_1(t)\mu_1\triangle t + o(t), n = 0. \tag{2.3}$$

Sehingga persamaan (2.3) menjadi

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\mu_1 + P_0(t)\lambda_0, n = 0. \tag{2.4}$$

Persamaan (2.2) dan persamaan (2.4) disebut persamaan Kolmogorov.

3. Distribusi Kedatangan dan Distribusi Kepergian

3.1. *Distribusi Kedatangan*

Kedatangan yang dimaksud adalah kedatangan murni, yaitu kedatangan tanpa diser-tai kepergian, maka laju kepergian $\mu_n = 0$, $\forall_n \geq 0$, dan peluang terdapat n, $n \geq 0$ kedatangan pada waktu t dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $\mu_n = 0$, $\lambda_n = \lambda$ ke persamaan Kolgomorov, sehingga didapatkan

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), n \geq 1 \tag{3.1}$$

dan

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \lambda P_0(t), n = 0. \tag{3.2}$$

Dari persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh hasil sebagai berikut.
Untuk $n = 0$ akan diperoleh

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{3.3}$$

Untuk $n = 1$ akan diperoleh

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}. \tag{3.4}$$

Untuk $n = 2$ akan diperoleh

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}. \tag{3.5}$$

Maka secara umum solusi dari persamaan (3.3) – (3.5) adalah

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \tag{3.6}$$

Dari persamaan (3.6) dapat disimpulkan bahwa pola kedatangan berdistribusi secara Poisson.

Teorema 3.1. [*1*] *Jika kedatangan customer berdistribusi Poisson maka waktu antar kedatangan customer berdistribusi eksponensial.*

Bukti. Asumsikan $T_n,\ n > 0$ adalah waktu antara $n-1$ kedatangan sampai n kedatangan. Barisan $T_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$ merupakan barisan waktu antar kedatangan yang saling lepas dan saling bebas. Ambil T_1 yang merupakan waktu antara tidak ada *customer* dalam sistem dan ketika ada kedatangan pertama. Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi eksponensial.

Ambil $t < T_1$, maka kedatangan pada waktu t adalah nol, yang artinya $P(T_1 > t) = P_0(t)$. Berdasarkan persamaan (3.3), maka fungsi distribusi kumulatif T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$$F(t) = P(T_1 < t) = 1 - e^{-\lambda t}. \tag{3.7}$$

Persamaan $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ merupakan distribusi kumulatif dari distribusi eksponensial yang secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{jika } t > 0, \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu antar kedatangan pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian di atas juga berlaku untuk $T_n, n > 0$. Jadi terbukti bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial. □

3.2. *Distribusi Kepergian*

Kepergian yang dimaksud adalah kepergian murni, yaitu kepergian tanpa disertai kedatangan, maka laju kepergian $\mu_n = \mu$, $\forall_n \geq 0$, dan peluang terdapat $n (n \geq 0)$ kepergian pada waktu t dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $\mu_n = \mu$, $\lambda_n = 0$ ke persamaan Kolgomorov sehingga didapatkan

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), n \geq 1, \tag{3.8}$$

dan

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\mu, n = 0. \tag{3.9}$$

Dari persamaan (3.8) dan (3.9) diperoleh hasil sebagai berikut.
Untuk $n = N$ akan diperoleh

$$P_N(t) = e^{-\mu t}. \tag{3.10}$$

Untuk $n = N - 1$ akan diperoleh

$$P_{N-1}(t) = \mu t e^{-\mu t}. \tag{3.11}$$

Untuk $n = N - 2$ akan diperoleh

$$P_{N-2}(t) = \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t}. \tag{3.12}$$

Maka secara umum solusi dari persamaan (3.10) – (3.12) adalah

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}. \tag{3.13}$$

Dari persamaan (3.13) dapat disimpulkan bahwa pola kepergian berdistribusi secara Poisson.

Teorema 3.2. [*6*] *Jika kedatangan customer berdistribusi Poisson maka waktu pelayanan customer berdistribusi eksponensial.*

Bukti. Asumsikan $T_n,\ n > 1$ adalah waktu pelayanan pada *customer* ke n. Barisan $T_n(n) = 1, 2, 3, \cdots$ merupakan barisan waktu pelayanan yang saling lepas dan saling bebas. Ambil $t < T_1$ maka jumlah kepergian pada waktu t adalah 0. Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi eksponensial. Maka $P(T_1 > t) = P_N(t)$.

Berdasarkan persamaan (3.10) maka fungsi distribusi kumulatif T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$$F(t) = P(T_1 < t) = 1 - e^{-\mu t}. \tag{3.14}$$

Persamaan $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$ merupakan distribusi kumulatif dari distribusi eksponensial yang secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & \text{jika } t > 0 \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \tag{3.15}$$

Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu pelayanan pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian di atas juga berlaku untuk $T_n, n > 0$. Jadi terbukti bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial. □

4. Sistem Antrian *Steady State*

Kondisi *Steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem antrian telah mencapai kondisi *steady state* maka peluang terdapat n *customer* dalam sistem pada waktu t tidak bergantung kepada waktu. Kondisi *steady state* terjadi ketika $\frac{dP_0(t)}{dt} = 0$ maka persamaan Kolgomorov menjadi

$$P_1(t)\mu_1 - P_0(t)\lambda_0 = 0, n = 0, \tag{4.1}$$

dan

$$-(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} = 0, n \geq 1. \tag{4.2}$$

Proses dalam sistem ini adalah proses kedatangan dan kepergian dengan $\mu_n = \mu$, $\lambda_n = \mu$. Dengan mensubstitusikan $\mu_n = \mu$, $\lambda_n = \mu$ ke persamaan (4.1) dan (4.2) maka akan menghasilkan

$$\mu P_1(t) - \lambda P_0(t) = 0, n = 0 \tag{4.3}$$

dan

$$-(\lambda + \mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) = 0, n \geq 1 \tag{4.4}$$

Dari persamaan (4.3) dan (4.4) akan diperoleh probabilitas terdapatnya n *customer* dalam keadaan *steady state* sebagai berikut

$$P_n = P_0 \prod \frac{\lambda}{\mu} = P_0(\frac{\lambda}{\mu})^n. \tag{4.5}$$

Dengan memisalkan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ maka akan diperoleh persamaan

$$P_n = P_0(\frac{\lambda}{\mu})^n = P_0(\rho)^n.$$

Sehingga diperoleh solusi *steady state* berikut

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n, |\rho| < 1. \tag{4.6}$$

5. Ukuran Keefektifan Model Antrian (M/M/1)

Ukuran Keefektifan Model Antrian (M/M/1) dapat ditentukan melalui unsur-unsur berikut

(1) **Nilai Harapan Banyak *Customer* dalam Sistem**
Nilai harapan banyak *customer* dalam sistem L_s merupakan jumlah dari perkalian keseluruhan *customer* dalam sistem dengan peluang terdapat n customer, dinyatakan sebagai berikut [2].

$$L_s = \frac{\rho}{1 - \rho}. \tag{5.1}$$

(2) **Nilai Harapan Banyak *Customer* dalam Antrian**
Nilai harapan banyak *customer* dalam sistem antrian L_q merupakan jumlah dari perkalian *customer* dalam antrian dengan peluang terdapat n *customer* dinyatakan sebagai berikut [3].

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \tag{5.2}$$

(3) **Nilai Harapan Waktu Tunggu *Customer* dalam Sistem**
Berdasarkan persamaan *Little Law* [4], apabila W_s merupakan waktu tunggu *customer* dalam sistem, maka hubungan antara W_s dan L_s dapat ditulis

$$L_s = \lambda W_s,$$

dengan mensubstitusikan persamaan (5.1) maka diperoleh

$$W_s = \frac{1}{(1 - \rho)\mu}. \tag{5.3}$$

(4) **Nilai Harapan Waktu Tunggu *Customer* dalam Antrian.**
Berdasarkan persamaan *Little Law* [4], apabila W_q merupakan waktu tunggu *customer* dalam antrian, maka hubungan antara W_q dan L_q dapat ditulis

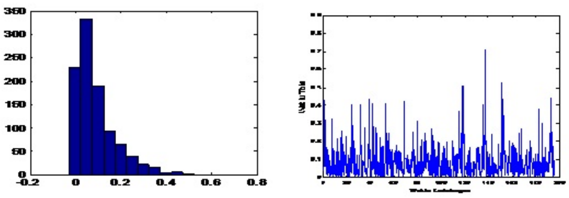
$$L_q = \lambda W_q.$$

dengan mensubstitusikan persamaan (5.2) maka diperoleh

$$W_q = \frac{\rho}{(1-\rho)\mu}. \tag{5.4}$$

6. Simulasi Sederhana

Hasil simulasi dengan menggunakan program Matlab dengan memisalkan $\lambda = 5$ dan $\mu = 15$ akan diperoleh histogram waktu tunggu yang menyebar secara eksponensial sesuai bentuk grafik dari distribusi eksponensial dan waktu total dalam antrian terlihat lebih besar dari nilai harapan waktu menunggu yaitu perbandingan waktu kedatangan dan waktu total dapat terlihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Histogram waktu tunggu dan Grafik perbandingan waktu kedatangan dan waktu total

Ukuran keefektifannya sebagai berikut secara berurutan:

(1) Nilai harapan banyak *Customer* dalam sistem = 0.49.
(2) Nilai harapan banyak *Customer* dalam antrian = 0.16.
(3) Nilai harapan waktu tunggu *Customer* dalam sistem = 0.10.
(4) Nilai harapan waktu tunggu *Customer* dalam antrian = 0.03.

7. Kesimpulan

Sistem antrian satu server (M/M/1) mempunyai ciri pola kedatangan berdistribusi Poisson sedangkan waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial dan pola kepergian pada sistem antrian satu server berdistribusi Poisson sedangkan tingkat pelayanannya berdistribusi eksponensial.

Jika laju kedatangan λ dan laju pelayanan μ , maka ukuran keefektifan dari sistem antrian dengan satu server diperoleh dengan penelusuran berikut, yaitu dengan memisalkan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

(1) Nilai Harapan Banyak *Customer* dalam Sistem : $L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$.
(2) Nilai Harapan Banyak *Customer* dalam Antrian : $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$.

(3) Nilai Harapan Waktu Tunggu *Customer* dalam Sistem : $W_s = \frac{1}{(1-\rho)\mu}$.
(4) Nilai Harapan Waktu Tunggu *Customer* dalam Antrian : $W_q = \frac{\rho}{(1-\rho)\mu}$.

8. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Dr. Maiyastri, Ibu Dr. Lyra Yulianti, dan Ibu Arrival Rince Putri, MT, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bronson, R. 1966. **Teori dan Soal-Soal Operation Research**. (Terjemahan Hans Wospakrik). Jakarta, Erlangga
[2] Ecker, J, dan Kupferschimd, M. 1988. **Introduction to Operation Research**. New York, John Wiley dan Sons
[3] Hillier, F.S, dan Lieberman, G. J. (2005). **Introduction to Operation Research**. New York, McGraw-Hill
[4] Little, J. D. C dan Graves, S. C. 2008. Little's Law. *Building Intuition*, International Series in Operations Research dan Management Science
[5] Sinalungga, S. 2008. **Pengantar Teknik Industri**. Yogyakarta, Graha Ilmu
[6] Taha, H. 1997. **Riset Operasi**. (Terjemahan Daniel Wirajaya). Jakarta, Bina Rupa Aksara
[7] Wospakrik, H. 1996. **Teori dan Soal-Soal Operation Research**. Bandung, Erlangga