Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **4** Hal. 67 – 72
ISSN : 2303–291X

GRAF RAMSEY $(K_{1,2}, C_4)$-MINIMAL DENGAN DIAMETER 2

DEBBY YOLA CRISTY
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
lathifah.sulastri@yahoo.com

Abstrak. Diberikan graf F, G, dan H. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F mengakibatkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H. Graf F disebut sebagai graf Ramsey (G, H)-minimal jika $F \rightarrow (G, H)$ dan $F^* \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang subgraf sejati $F^* \subset F$. Dalam makalah ini dikaji kembali tentang pembuktian beberapa graf dengan diameter 2 yang termasuk ke dalam $\mathcal{R}(K_{1,2}, C_4)$.

Kata Kunci: Graf Ramsey minimal, graf lintasan $K_{1,2}$, graf siklus C_4

1. Pendahuluan

Suatu graf $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong titik (*vertices*) dan $E(G)$ adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan titik-titik di G. Misalkan terdapat titik u dan v dimana $u, v \in V(G)$. Jarak antara dua titik u dan v pada graf adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v dan dinotasikan dengan $d(u, v)$.

Suatu graf G dikatakan graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v. Jika tidak demikian, maka G dikatakan graf tidak terhubung (*disconnected graph*). Jarak (*distance*) dari u ke v, dinotasikan oleh $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek pada graf tersebut. Sedangkan *diameter* dari suatu graf terhubung G adalah maksimum jarak (*distance*) antara dua titik di G, dan dinotasikan dengan $diam(G)$. Jika G adalah graf tak terhubung maka didefinisikan $diam(G) := \infty$.

2. Bilangan Ramsey Graf

Berikut adalah definisi dari bilangan Ramsey klasik dan bilangan Ramsey graf.

Definisi 2.1. *Misalkan $a, b \geq 2$ adalah bilangan asli.* Bilangan Ramsey Klasik *$R(a, b)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga jika sisi-sisi graf lengkap K_n diwarnai dengan warna merah dan biru, maka senantiasa terdapat subgraf K_a merah atau K_b biru.*

Definisi 2.2. *Diberikan dua graf G dan H.* Bilangan Ramsey Graf $R(G, H)$ *adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga jika sisi-sisi graf F dengan n titik di-*

warnai dengan warna merah dan biru, maka senantiasa terdapat subgraf G merah atau H biru.

Untuk menunjukkan bahwa bilangan Ramsey $R(G, H) = n$, dapat dilakukan dalam dua tahap sebagai berikut.

(1) Menunjukkan bahwa $R(G, H) \leq n$, dengan cara menunjukkan bahwa sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf K_n memuat graf G merah atau graf H biru.
(2) Menunjukkan bahwa $R(G, H) \geq n$, dengan cara menunjukkan bahwa terdapat pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf K_{n-1} sehingga K_{n-1} tidak memuat graf G merah dan juga tidak memuat graf H biru.

3. Graf Ramsey (G, H)-Minimal

Graf Ramsey (G, H)-minimal didefinisikan sebagai berikut.

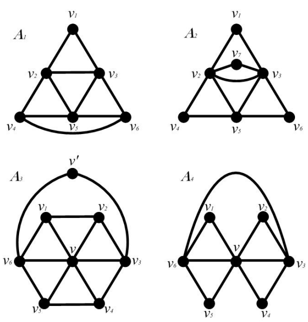
Definisi 3.1. *Diberikan graf G dan H. Graf F dikatakan sebagai graf Ramsey (G, H)-minimal jika,*

1. $F \rightarrow (G, H)$,
2. $F^* \nrightarrow (G, H)$ *untuk* $F^* := F - e \subset F$.

Kelas $\mathcal{R}(G, H)$ didefinisikan sebagai kelas yang memuat semua graf F dengan kondisi pada Definisi 3.1 di atas.

4. Pembahasan

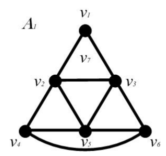
Dalam Gambar 1 berikut diberikan beberapa graf dengan diameter 2 yang menjadi anggota $\mathcal{R}(K_{1,2}, C_4)$, seperti yang telah diperoleh dalam [2].



Gambar 1. Graf $\mathcal{R}(K_{1,2}, C_4)$ dengan diameter 2.

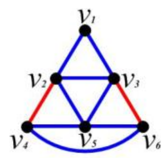
Pada makalah ini akan dibuktikan kembali bahwa semua graf dengan diameter 2 dalam Gambar 1 merupakan anggota $\mathcal{R}(K_{1,2}, C_4)$, seperti yang tercantum dalam Teorema 4.1 – Teorema 4.4 berikut.

Teorema 4.1. *Misalkan terdapat graf A_1 seperti pada Gambar 2, maka $A_1 \in \mathcal{R}(K_{1,2}, C_4)$.*



Gambar 2. Graf A_1.

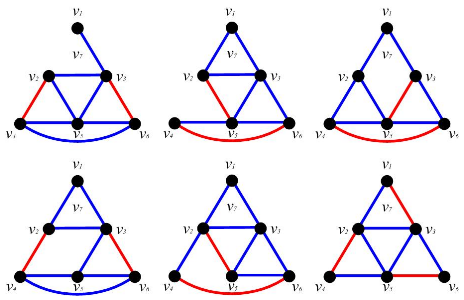
Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $A_1 \to (K_{1,2}, C_4)$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi A_1. Misalkan tidak terdapat $K_{1,2}$ merah dalam pewarnaan tersebut. Dapat dilihat bahwa sisi-sisi v_2v_3, v_2v_5, v_3v_5, v_4v_5, atau v_5v_6 adalah diagonal dari suatu C_4. Akibatnya, jika salah satu dari kelima sisi tersebut berwarna merah, maka akan diperoleh C_4 biru $v_1v_2v_5v_3$, $v_2v_3v_5v_4$, $v_2v_3v_6v_5$, $v_2v_4v_6v_5$, atau $v_3v_5v_4v_6$. Selanjutnya jika salah satu dari sisi-sisi v_2v_4 dan v_3v_6 berwarna biru, maka akan diperoleh C_4 biru $v_2v_3v_5v_4$ dan $v_2v_3v_5v_6$. Pada akhirnya tidak dapat dihindari C_4 biru $v_1v_2v_5v_3$. Sehingga diperoleh $A_1 \to (K_{1,2}, C_4)$, seperti terlihat pada Gambar 3 berikut.



Gambar 3. Hasil pewarnaan Graf A_1.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A_1^* := A_1 - e \nrightarrow (K_{1,2}, C_4)$ untuk sebarang sisi e yang ada di A_1. Misalkan e adalah sisi v_1v_2. Warnai sisi v_2v_4 dan v_3v_6 dengan merah dan sisi-sisi lainnya dengan biru. Maka pewarnaan ini tidak memuat $K_{1,2}$ merah maupun C_4 biru. Sisi v_1v_2 bersifat simetris dengan sisi v_1v_3 sehingga jika $e = v_1v_3$ maka pewarnaannya sama dengan pewarnaan pada $e = v_1v_2$. Jika e adalah v_2v_3, maka sisi v_3v_5 dan v_4v_6 diwarnai merah dan sisi-sisi lainnya dengan biru. Selanjutnya jika e adalah v_2v_4 maka sisi v_2v_5 dan v_4v_6 diwarnai merah, sedangkan sisi-sisi lainnya diwarnai biru. Sisi v_3v_6 bersifat simetris dengan sisi v_2v_4 sehingga jika $e = v_3v_6$ maka pewarnaannya juga simetris dengan pewarnaan pada $e = v_2v_4$. Jika e adalah sisi v_2v_5, maka sisi v_2v_4 dan v_3v_6 diwarnai merah dan sisi-sisi lainnya dengan biru. Sisi v_2v_5 bersifat simetris dengan sisi v_3v_5 sehingga jika $e = v_3v_5$ maka pewarnaannya sama dengan pewarnaan pada $e = v_2v_5$. Selanjutnya jika e adalah v_4v_5, maka sisi v_2v_5 dan v_4v_6 diwarnai merah dan sisi-sisi lainnya dengan biru. Sisi v_4v_5 bersifat simetris dengan sisi v_5v_6 sehingga jika $e = v_5v_6$ maka pewarnaannya juga simetris dengan pewarnaan pada $e = v_4v_5$. Terakhir, jika e adalah v_4v_6, maka sisi-sisi v_1v_3, v_2v_4 dan v_5v_6 diwarnai merah dan sisi-sisi lainnya dengan biru. Akibatnya tidak terdapat $K_{1,2}$ merah ataupun C_4 biru dalam pewarnaan tersebut.

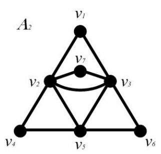
Pada Gambar 4 diperlihatkan hasil pewarnaan graf $A_1 - e$. Dengan demikian diperoleh $A_1^* \nrightarrow (K_{1,2}, C_4)$. Dapat disimpulkan bahwa $A_1 \in (K_{1,2}, C_4)$.



Gambar 4. Hasil pewarnaan Graf $A_1 - e$.

□

Teorema 4.2. *Misalkan terdapat graf* A_2 *seperti pada Gambar 5, maka* $A_2 \in \mathcal{R}(K_{1,2}, C_4)$.

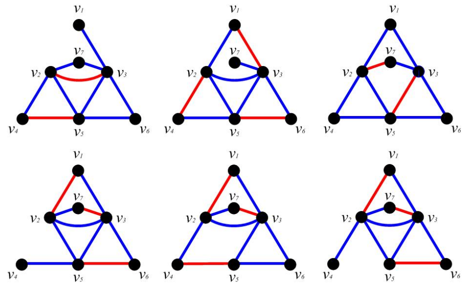


Gambar 5. Graf A_2.

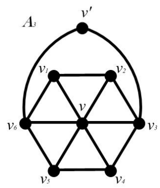
Bukti. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi A_2 sedemikian sehingga tidak terdapat $K_{1,2}$ merah dalam pewarnaan tersebut. Sisi-sisi v_2v_3, v_3v_5, dan v_2v_5 adalah diagonal dari suatu C_4. Akibatnya, jika salah satu dari ketiga sisi tersebut berwarna merah, maka akan diperoleh C_4 biru $v_1v_2v_5v_3$, $v_7v_2v_5v_3$, $v_3v_6v_5v_2$, atau $v_3v_5v_4v_2$. Selanjutnya jika paling sedikit satu dari sisi-sisi v_2v_4 dan v_3v_6 berwarna merah, maka akan diperoleh C_4 biru $v_1v_3v_7v_2$, $v_7v_3v_5v_2$, dan $v_1v_3v_5v_2$. Jika kedua sisi v_2v_4 dan v_3v_6 tersebut berwarna biru, maka tidak dapat dihindari C_4 biru $v_2v_3v_6v_5$ atau $v_2v_3v_5v_4$. Maka diperoleh $A_2 \rightarrow (K_{1,2}, C_4)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A_2^* := A_2 - e \nrightarrow (K_{1,2}, C_4)$ untuk sebarang sisi e yang ada di A_2. Pada Gambar 6 diberikan hasil pewarnaan dari graf $A_2 - e$. Dengan demikian diperoleh $A_2^* \nrightarrow (K_{1,2}, C_4)$. Sehingga $A_2 \in (K_{1,2}, C_4)$. □

Teorema 4.3. *Misalkan terdapat graf* A_3 *seperti pada Gambar 7, maka* $A_3 \in \mathcal{R}(K_{1,2}, C_4)$.

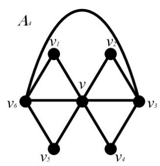


Gambar 6. Hasil pewarnaan Graf $A_2 - e$.



Gambar 7. Graf A_3.

Teorema 4.4. *Misalkan terdapat graf A_4 seperti pada Gambar 8, maka $A_4 \in \mathcal{R}(K_{1,2}, C_4)$.*



Gambar 8. Graf A_4.

Teorema 4.3 dan Teorema 4.4 dibuktikan dengan cara serupa dengan pembuktian Teorema 4.1 dan Teorema 4.2.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Zulakmal, M.Si, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Budi Rudianto, M.Si, dan Bapak Yudiantri Asdi, M.Sc yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Baskoro, E. T, Yulianti, l., Assiyatun, H., 2008, Ramsey $(K_{1,2}, C_4)$-Minimal Graphs. *Journal of Combin. Mathematics and Combin. Computing* **65** : 79 − 90

[2] Baskoro, E. T, Vetrik, T., Yulianti, L., 2008, A Note on Ramsey $(K_{1,2}, C_4)$-Minimal Graphs of Diameter 2. *Proceeding of The International Conference 70 years of Faculty of Civil Engineerings. Slovak University of Technology.* pp. 1 – 4

[3] Bondy, J. A dan Murty, U. S. R., 1976, **Graph Theory with Applications**, London : The Macmillan Press Ltd

[4] Surahmat, 2003, *Bilangan Ramsey untuk Graf Roda*, ITB Bandung, *Disertasi-S3*, tidak diterbitkan

[5] Vetrik, T, Yulianti, L., Baskoro, E. T., 2010, On Ramsey $(K_{1,2}, C_4)$-Minimal Graphs, *Discussiones Mathematics Graph Theory* **30** : 637 – 649