Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **3** Hal. 22 – 27
ISSN : 2303–291X

KONVOLUSI DARI PEUBAH ACAK BINOMIAL NEGATIF

NUR ADE YANI
Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
ade_yani@mail.com

Abstrak. Dalam penelitian ini dikaji konvolusi dari peubah acak binomial negatif dengan menggunakan metode fungsi pembangkit momen. Kajian ini memberikan fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif dari jumlah peubah acak binomial negatif.

Kata Kunci: Distribusi binomial negatif, Deret berpangkat

1. Pendahuluan

Misalkan terdapat distribusi binomial negatif dengan peubah acak Y_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ dan parameter (α_j, p_j). Fungsi kepadatan peluang dari Y_j dapat dirumuskan sebagai berikut,

$$P(Y_j = y) = \frac{\Gamma(\alpha_j + y)}{\Gamma(\alpha_j)y!} p_j^{\alpha_j} (1 - p_j)^y$$

untuk $0 < p_j < 1$ dan $0 < \alpha_j < \infty$.

Misalkan $S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ adalah jumlah dari peubah acak binomial negatif, dengan masing-masing peubah acak Y_j memiliki fungsi distribusi binomial negatif yang kemudian dapat ditentukan nilai harapan, variansi serta fungsi pembangkit momennya. Dalam teori peluang, distribusi dari jumlah peubah acak bebas dinamakan dengan konvolusi. Penggunaan metode konvolusi sering digunakan untuk jumlah dua peubah acak bebas. Untuk menentukan distribusi lebih dari dua peubah acak bebas digunakan proses konvolusi yang tidak mudah untuk ditentukan.

Metode lain yang dapat digunakan untuk menentukan distribusi dari jumlah peubah acak bebas adalah dengan metode fungsi pembangkit momen. Dengan metode fungsi pembangkit momen dapat ditentukan fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif dari jumlah peubah acak bebas binomial negatif.

2. Konvolusi dari Peubah acak Binomial Negatif dengan Parameter yang Berbeda

Misalkan $Y_j \sim BN(\alpha_j, p_j)$ memiliki fungsi kepadatan peluang, maka fungsi pembangkit momen dari Y_j adalah

$$M_{Y_j}(t) = \left(\frac{1 - q_j e^t}{p_j}\right)^{-\alpha_j}. \tag{2.1}$$

Dengan memisalkan $r_j = q_j/p_j$ dan $\widetilde{t} = e^t - 1$, maka fungsi pembangkit momen dari Y_j dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$M_{Y_j}(t) = \left(1 - r_j\widetilde{t}\right)^{-\alpha_j},$$

dan fungsi pembangkit momen S dapat diperoleh

$$M_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - r_j\widetilde{t}\right)^{-\alpha_j}.$$

Selanjutnya akan ditentukan fungsi kepadatan peluang S, yang akan dijelaskan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.1. *Misalkan $Y_j, j = 1, 2, \ldots, n$ adalah peubah acak binomial negatif dengan parameter $(\alpha + k, p_1)$, $S = \sum_{j=1}^{n} Y_j$, $p_1 = max_j(p_j)$, dan $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n$, maka fungsi kepadatan peluang dari S adalah*

$$P(S = s) = R\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{\Gamma(\alpha + s + k)}{\Gamma(\alpha + k)s!} p_1^{\alpha+k} (1 - p_1)^s,$$

untuk $s = 0, 1, 2, \cdots$ dan 0 untuk yang lainnya.

Bukti. Notasikan

$$R = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{q_j p_1}{q_1 p_j}\right)^{-\alpha_j} \tag{2.2}$$

untuk

$$\delta_0 = 1,$$

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} i\xi_i\delta_{k+1-i}, \quad k = 0, 1, \cdots, \tag{2.3}$$

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j (1 - q_1 p_j/q_j p_1)^i}{i}. \tag{2.4}$$

Dengan mengasumsikan $r_1 = min_j(r_{j)}$ dan menotasikan

$$1 - r_j\widetilde{t} = (1 - r_1\widetilde{t})\left(\frac{r_j}{r_1}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{r_1}{r_j}\right)/(1 - r_1\widetilde{t}\right) \tag{2.5}$$

maka diperoleh

$$M_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \left((1 - r_1\widetilde{t}) \left(\frac{r_j}{r_1}\right) \left(1 - \left(1 - \frac{r_1}{r_j}\right) /(1 - r_1\widetilde{t})\right)\right)^{-\alpha_j}. \tag{2.6}$$

Dengan fungsi pembangkit kumulan maka dapat ditulis

$$log M_S(t) = log \left[\left(1 - r_1\widetilde{t}\right)^{-\alpha} R \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (1 - r_1\widetilde{t})^{-k}.$$

selanjutnya dengan memperhatikan kembali $M_S(t)$,

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \left(1 - r_1\widetilde{t}\right)^{-\alpha} R \cdot exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (1 - r_1\widetilde{t})^{-k} \right) \\ &= R \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \left(1 - r_1\widetilde{t}\right)^{-(\alpha+k)}. \end{aligned}$$

Dengan menjabarkan kembali fungsi pembangkit momen S, diperoleh

$$M_s(t) = \sum_{s=0}^{\infty} e^{ts} R \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \binom{\alpha + k + s - 1}{s} p_1^{(\alpha+k)} (1 - p_1)^s.$$

Maka sesuai dengan definisi fungsi pembangkit momen, persamaan (3.10) memuat fungsi kepadatan peluang dari S yang dapat ditulis sebagai

$$P(S = s) = R \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{\Gamma(\alpha + k + s)}{\Gamma(\alpha + k)s!} p_1^{(\alpha+k)} (1 - p_1)^s. \tag{2.7}$$

□

Selanjutnya akan ditentukan fungsi distribusi kumulatif dari S yang akan ditentukan dari fungsi kepadatan peluang yang diperoleh pada bahagian sebelumnya. Sehingga untuk menentukannya diberikan dalam suatu akibat dari Teorema 2.1.

Akibat 2.2. *Misalkan $Y_j, j = 1, 2, \cdots, n$ adalah peubah acak binomial negatif dengan parameter $(\alpha + k, p_1)$, $S = \sum_{j=1}^{n} Y_j$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$,$p_1 = max_j(p_j)$ dan $R = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{q_j p_1}{q_1 p_j}\right)^{-\alpha_j}$, maka fungsi distribusi kumulatif dari S adalah*

$$F_S(s) = R \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \sum_{\tilde{s}=0}^{s} \frac{\Gamma(\alpha + \tilde{s} + k)}{\Gamma(\alpha + k)\tilde{s}!} p_1^{\alpha+k} (1 - p_1)^{\tilde{s}}$$

untuk $\tilde{s} = 0, 1, 2, \cdots$.

Bukti. Jika $F_S(s)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi S apabila deret yang dibentuk konvergen seragam, selanjutnya akan dibuktikan deret tersebut konvergen seragam dengan menggunakan teorema M-Weierstrass. Perhatikan kembali fungsi distribusi kumulatif peubah acak S

$$F_S(s) = R \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \sum_{\tilde{s}=0}^{s} \frac{\Gamma(\alpha + \tilde{s} + k)}{\Gamma(\alpha + k)\tilde{s}!} p_1^{\alpha+k} (1 - p_1)^{\tilde{s}}. \tag{2.8}$$

Notasikan $(1 - q_1 p_j / q_j p_1) > 0$ untuk $j = 2, 3, \cdots, n$ dan untuk $i = 1, 2, \cdots, \eta = max_{2 \leq j \leq n}(1 - q_1 p_j / q_j p_1)$, dan dari persamaan (2.4)

$$|\xi_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j (1 - q_1 p_j / q_j p_1)^i}{i} \right|$$

$$|\xi_i| \leq \alpha \frac{\eta^i}{i!}.$$

$$\begin{aligned} |\delta_{k+1}| &= \left| \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} i \xi_i \delta_{k+1-i} \right| \\ &\leq \frac{\alpha}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \eta^i \left| \delta_{k+1-i} \right|. \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan induksi akan terlihat

$$\begin{aligned} |\delta_{k+1}| &\leq \frac{\alpha}{k+1} \left(\eta^1 |\delta_k| + \eta^2 |\delta_{k-1}| + \cdots + \eta^{k+1} |\delta_0| \right) \\ &\leq \frac{\eta^{k+1} \alpha_{(k+1)}}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

Sehingga

$$pr_s \leq \frac{\Gamma(\tilde{s} + \alpha) R p_1^{\alpha} (1 - p_1)^{\tilde{s}}}{\Gamma(\alpha) \tilde{s}! (1 - \eta)^{\tilde{s} + \alpha}},$$

ini berarti bahwa deret dari fungsi distribusi kumulatif memenuhi kekonvergenan seragam. □

Dari Akibat 2.2 dapat disimpulkan bahwa

$$\sum_{k=0}^{\infty} R\delta_k = 1,$$

dengan kata lain $R\delta_k$ adalah suatu fungsi kepadatan peluang dari suatu peubah acak, sehingga S merupakan peubah acak dari distribusi tertentu melalui proses pencampuran peubah-peubah acak, yang dapat dijelaskan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.3. *Peubah acak S adalah peubah acak dari distribusi negatif binomial campuran dengan parameter $(\alpha + K)$, K adalah peubah acak dengan fungsi kepadatan peluang*

$$P(K = k) = R\delta_k, \quad k = 0, 1, \cdots$$

dimana

$$R = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{q_j p_1}{q_1 p_j} \right)^{-\alpha_j}, \tag{2.9}$$

dan

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} i\xi_i\delta_{k+1-i}, \quad k = 0, 1, \cdots \text{ untuk } \delta_0 = 1. \tag{2.10}$$

3. Konvolusi dari Peubah Acak Binomial Negatif dengan Parameter yang Sama

Selanjutnya akan dikaji konvolusi dari peubah acak negatif binomial dengan parameter yang sama, dalam hal ini nilai parameter (α, p) dari setiap kejadian sama. Fungsi pembangkit momen dari peubah acak $Y_j \sim BN(\alpha, p)$ adalah

$$M_{Y_j}(t) = \left(\frac{1-qe^t}{p}\right)^{-\alpha}.$$

Teorema 3.1. *Misalkan Y_j adalah peubah acak binomial negatif dengan parameter (Λ, p), $S = \sum_{j=1}^{n} Y_j$, $\Lambda = n\alpha$ maka fungsi kepadatan peluang dari S adalah*

$$P(S = s) = \frac{\Gamma(s+\Lambda)}{\Gamma(\Lambda)s!}(1-p)^s p^{\Lambda},$$

untuk $s = 0, 1, 2, \cdots$ dan 0 untuk yang lainnya.

Bukti. Misalkan $r = q/p, \tilde{t} = e^t - 1$ dan $\Lambda = n\alpha$, maka fungsi pembangkit momen dari Y_j dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\begin{aligned} M_{Y_j}(t) &= \left(\frac{1-qe^t}{p}\right)^{-\alpha} \\ &= \left(1 - r\tilde{t}\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Untuk menentukan fungsi pembangkit momen S digunakan teorema dari fungsi pembangkit momen dari jumlah peubah acak bebas, sehingga fungsi pembangkit momen S dapat ditulis

$$M_S(t) = (1 - r\tilde{t})^{-\Lambda}$$

Selanjutnya akan ditentukan fungsi kepadatan peluang dari S dengan parameter yang sama.

$$\begin{aligned} M_S(t) &= (1 - r\tilde{t})^{-\Lambda} \\ &= p^{\Lambda}(1-qe^t)^{-\Lambda}. \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema Binomial, persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} M_S(t) &= p^{\Lambda}(1-qe^t)^{-\Lambda} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} e^{ts}\frac{(s+\Lambda-1)!}{(\Lambda-1)!s!}(1-P)^s p^{\Lambda}. \end{aligned}$$

Sehingga fungsi pembangkit momen S memuat fungsi kepadatan peluang dari S.$\square$

4. Kesimpulan

Misalkan $Y_j, j = 1, 2, \cdots$ adalah peubah acak yang berdistribusi negatif binomial $Y_j \sim BN(\alpha_j, p_j)$, maka fungsi kepadatan peluang Y_j adalah

$$P(Y_j = y) = \frac{\Gamma(\alpha_j + y)}{\Gamma(\alpha_j)y!} p_j^{\alpha_j}(1 - p_j)^y.$$

Jika $S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ adalah jumlah dari peubah acak bebas berdistribusi negatif binomial atau disebut juga dengan konvolusi, maka

$$M_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - r_j \widetilde{t}\right)^{-\alpha_j},$$

dengan fungsi kepadatan peluang

$$P(S = s) = R \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{\Gamma(\alpha + s + k)}{\Gamma(\alpha + k)s!} p_1^{\alpha+k} (1 - p_1)^s.$$

Dan dari fungsi distribusi yang diperoleh maka distribusi dari $S \sim BN(\alpha + K, p_1)$ adalah jumlah dari peubah acak bebas ninomial negatif dengan jumlah parameter $\alpha + K$ dengan K peubah acak bebas, fungsi kepadatan peluangnya adalah

$$P(K = k) = R\delta_k, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

Apabila peubah acak binomial negatif dikonvolusikan dimana parameter setiap peubah acak sama yaitu (α, p) maka fungsi kepadatan peluang adalah

$$P(S = s) = \frac{\Gamma(s + \Lambda)}{\Gamma(\Lambda)s!}(1 - p)^s p^{\Lambda}.$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Dr.Maiyastri, Bapak Dr.Muhafzan, Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan dan Ibu Ferra Yanuar yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bain, L.J. dan M. Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics Second Edition*. Duxbury Press, California.

[2] Barnet, S dan R, G, Cameron. 1985. *Introduction to Mathematical Control Theory Second Edition*. Clarendon Preess. Oxford.

[3] Brown,J.W. dan Churchill, R.V. 1996.*Complex Variables and Applications*.Ed. Ke- 6, Mc. Grawhill, Singapore.

[4] Furman, E. 2006. *On the convolution of the negative binomial random variables.* Statistic and probability letters, Elsevier Academic Press, California.

[5] Gnedenko, B. V. dan A. N. Kolmogorov. 1968. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables.* 2^{nd} ed, Addison-Wesley, London.

[6] Rosen, H. K. 2003. *Discrete Mathematics and its Applications.* 5^{th} ed. McGraw-Hill, New York.