

DIMENSI METRIK DARI GRAF PALEM

MELLANY, LYRA YULIANTI*, DES WELYYANTI

*Departemen Matematika dan Sains Data,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
 email : meanyy27@gmail.com, lyra@sci.unand.ac.id, wely@sci.unand.ac.id*

Diterima 6 Maret 2023 Direvisi 30 Juli 2023 Dipublikasikan 21 Oktober 2023

Abstrak. Misalkan terdapat suatu graf terhubung $G = (V, E)$ dan suatu himpunan terurut $W \subseteq V(G)$, dengan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. Misal terdapat suatu titik $v \in V(G)$. Representasi titik v terhadap W , dinotasikan $r(v|W)$, didefinisikan sebagai

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)),$$

dimana $d(v, w_i)$ menyatakan jarak antara titik v dan w_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Jika untuk setiap dua titik u dan v di G diperoleh bahwa $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut sebagai himpunan pembeda (*resolving set*) dari graf G . Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dinamakan himpunan pembeda minimum (*minimum resolving set*), dan kardinalitas dari himpunan pembeda minimum ini disebut dimensi metrik graf G , dinotasikan $\dim(G)$. Pada artikel ini akan ditentukan dimensi metrik graf palem $C_k P_l S_m$, untuk $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

Abstract. Let $G = (V, E)$ be an arbitrary connected graph, and let $W \subseteq V(G)$ be an ordered set, where $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. Consider a vertex $v \in V(G)$. The metric representation of v with respect to W , denoted by $r(v|W)$, is defined as

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)),$$

where $d(v, w_i)$ is the distance between v and w_i , for $1 \leq i \leq k$. If $r(u|W) \neq r(v|W)$ for every two vertices u and v , then W is denoted as the resolving set of G . The resolving set with minimum cardinality is denoted as the minimum resolving set, and its cardinality is called the metric dimension of G , denoted by $\dim(G)$. This article will determine the metric dimension of palm graph $C_k P_l S_m$, for $k \geq 3$, $l \geq 2$ and $m \geq 2$.

Kata Kunci: Dimensi metrik, Himpunan Pembeda, Graf Palem, Representasi

1. Pendahuluan

Dimensi metrik pada suatu graf pertama kali diperkenalkan secara terpisah oleh Slater pada tahun 1975 [1] dan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 [2]. Dalam [3], Chartrand dkk. memberikan definisi dimensi metrik dari suatu graf G sebagai berikut. Misalkan terdapat suatu graf terhubung $G = (V, E)$, dimana terdapat dua titik u dan v yang berbeda. Jarak antara u dan v adalah panjang lintasan terpendek di antara kedua titik tersebut, dinotasikan $d(u, v)$. Misalkan terdapat

*penulis korespondensi

himpunan terurut $W \subseteq V(G)$, dengan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. Misal terdapat titik $v \in V(G)$. Representasi titik v terhadap W dinotasikan dengan $r(v|W)$ dimana $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Jika untuk setiap dua titik u dan v di G diperoleh bahwa $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut sebagai himpunan pembeda (*resolving set*) untuk graf G . Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum yang disebut sebagai himpunan pembeda minimum (*minimum resolving set*). Banyaknya anggota dari himpunan pembeda minimum ini dinamakan dimensi metrik dari graf G , dinotasikan $\dim(G)$. Definisi dan notasi lain dalam artikel ini dikutip dari [4].

Riyando dkk. [5] menunjukkan bahwa dimensi metrik dari graf $K_1 + mK_4$ untuk $m \geq 2$ adalah $3m$. Sementara Putra dkk. [6] menentukan dimensi metrik graf $W_n + C_n$ untuk $n \in \{3, 4\}$. Pada [7], Angraini dkk. menentukan dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf tangga segitiga Tr_n untuk $n = 2$ dan $n = 3$. Selanjutnya, Febrianti dkk. [8] menentukan dimensi metrik dari graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen $Amal\{Tr_n, v\}_2$ untuk $n = 3$ dan $n = 4$. Putri dkk. [9] kemudian menentukan dimensi metrik graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen $Amal(Tr_n, v)_m$ untuk $n = 5$ dan $m = 3$. Pada [10], Aditya dkk. memperoleh dimensi metrik dari subdivisi graf Lobster $R_n(q; r)_m$, untuk $n > 2$, $q \geq 2$ dan $r \geq 2$. Selanjutnya, pada [11] Putri dkk. memperoleh dimensi metrik graf Buckminsterfullerene, salah satu jenis graf 3-reguler. Hasil lainnya adalah dari Yulianti dkk. [12] yang memperoleh dimensi metrik dari graf hasil operasi subdivisi terhadap graf thorn untuk graf lengkap.

Pada penelitian ini akan ditentukan dimensi metrik graf palem. Graf palem $C_k P_l S_m$ merupakan graf yang dikonstruksi dari gabungan tiga graf, yaitu graf siklus dengan k titik C_k , graf lintasan dengan l titik P_l , dan graf bintang dengan m sisi S_m , dimana $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$; dengan penambahan beberapa sisi di antara ketiga graf tersebut.

2. Landasan Teori

Graf lintasan P_n , $n \geq 2$, adalah graf terhubung yang memuat tepat satu lintasan dengan n titik, dimana terdapat dua titik berderajat satu dan $n - 2$ titik berderajat dua. Graf bintang S_n , $n \geq 2$, adalah graf terhubung dengan $n - 1$ titik berderajat satu dan satu titik berderajat n . Graf lingkaran C_n , $n \geq 3$, adalah graf terhubung dengan n titik dimana setiap titiknya berderajat dua.

Dalam [13] didefinisikan graf palem, dinotasikan $C_k P_l S_m$, yang merupakan graf yang dibangun oleh graf siklus C_k , graf lintasan P_l , dan graf bintang S_m , dengan $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$, dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut. Misalkan terdapat graf siklus C_k , dengan $V(C_k) = \{u_i \mid 1 \leq i \leq k, k \geq 3\}$ dan $E(C_k) = \{u_q u_{q+1} \mid 1 \leq q \leq k-1\} \cup \{u_1 u_k\}$, graf lintasan P_l , dengan $V(P_l) = \{w_t \mid 1 \leq t \leq l, l \geq 2\}$ dan $E(P_l) = \{w_a w_{a+1} \mid 1 \leq a \leq l-1\}$, dan graf bintang S_m , dengan $V(S_m) = \{v_p \mid 1 \leq p \leq m, l \geq 2\}$ dan $E(S_m) = \{v_0 v_b \mid 1 \leq b \leq m\}$. Graf palem $H = C_k P_l S_m$ dikonstruksi dengan cara:

- (1) Menambahkan sisi $e_1 = w_l u_i$, untuk suatu $i, 1 \leq i \leq k$. Tanpa mengurangi perumuman, pilih titik u_1 di graf siklus.

- (2) Menambahkan sisi $e_2 = w_1v_0$ di antara titik awal graf lintasan, namakan w_l , dengan titik pusat graf bintang v_0 .

Dengan penambahan dua sisi tersebut, diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi dari graf palem $C_kP_lS_m$, dengan $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$ sebagai berikut.

$$V(H) = V(C_k) \cup V(P_l) \cup V(S_m),$$

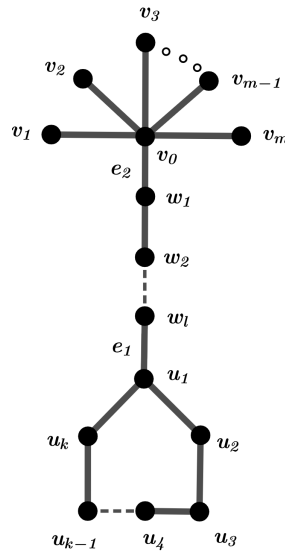
$$= \{u_i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{w_j | 1 \leq j \leq l\} \cup \{v_s | 0 \leq s \leq m\}, \quad (2.1)$$

$$E(H) = E(C_k) \cup E(P_l) \cup E(S_m) \cup \{u_1w_l, w_1v_0\},$$

$$= \{u_tu_{t+1} | 1 \leq t \leq k-1\} \cup \{u_1u_k\} \cup \{w_pw_{p+1} | 1 \leq p \leq l-1\} \cup$$

$$\{v_0v_q | 1 \leq q \leq m\} \cup \{e_1, e_2\}. \quad (2.2)$$

Pada Gambar 1 dapat dilihat graf palem $C_kP_lS_m$ untuk $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$.



Gambar 1. Graf Palem $C_kP_lS_m$ untuk $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

3. Pembahasan

Pada teorema berikut diberikan dimensi metrik dari graf palem $H = C_kP_lS_m$ untuk $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

Teorema 3.1. *Jika $H = C_kP_lS_m$ adalah graf palem dengan $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$, maka $\dim(H) = m$.*

Bukti. Diberikan graf palem $H = C_kP_lS_m$ dengan $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$, seperti pada Gambar 1, dengan himpunan titik dan himpunan sisi seperti pada persamaan (2.1) dan (2.2).

Berikut disajikan karakteristik graf palem H berdasarkan jarak dari suatu titik ke titik lainnya pada graf H tersebut.

- (1) Perhatikan bahwa graf H memuat titik berderajat satu v_i , dengan $1 \leq i \leq m$. Setiap daun pada graf H akan memiliki jarak yang sama ke suatu titik $a \in V(H) - \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Titik v_0 memiliki jarak satu ke titik-titik yang merupakan daun, dengan demikian jarak titik lainnya $\geq m - 1$.
- (2) Selanjutnya, akan dihitung jarak dari titik $u_i \in V(H)$ untuk $1 \leq i \leq k$ ke sebarang titik $a \in V(H) - V(C_k)$, yang akan dibagi menjadi beberapa kasus sebagai berikut.
 - (a) Untuk C_k , k ganjil, diperoleh bahwa titik u_2 dan u_k berjarak sama ke titik a , titik u_3 dan u_{k-1} berjarak sama ke titik a , dan seterusnya hingga titik $u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}$ dan $u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2}$ berjarak sama ke titik a .
 - (b) Untuk C_k , k genap, diperoleh bahwa titik u_2 dan u_k berjarak sama ke titik a , titik u_3 dan u_{k-1} berjarak sama ke titik a , dan seterusnya hingga titik $u_{\frac{k}{2}}$ dan $u_{\frac{k}{2}+2}$ berjarak sama ke titik a .

Misalkan $\dim(H) = b$. Definisikan suatu himpunan pembeda W dengan $|W| = b$. Berdasarkan poin (1), diperoleh bahwa $|W| = b \geq m - 1$. Selanjutnya berdasarkan poin (2), terdapat satu titik $u_i \in V(H)$ di W , dengan $2 \leq i \leq k$. Jika k ganjil, pilih sebarang titik $u_i \in V(H)$ dimana $2 \leq i \leq k$. Jika k genap, pilih titik $u_i \in V(H)$ dimana $2 \leq i \leq k$ dan $i \neq \frac{k}{2} + 1$. Dari kedua karakteristik diperoleh bahwa $|W| \geq (m - 1) + 1 = m$. Ini berarti bahwa nilai $b \geq m$. Dengan demikian $\dim(H) \geq m$.

Selanjutnya, misalkan $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, u_k\}$. Akan ditunjukkan bahwa semua titik mempunyai representasi yang berbeda terhadap W . Representasi titik $v \in V(H)$ terhadap $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, u_k\}$ dinotasikan $r(v|W)$, adalah:

$$r(v|W) = (d(v, v_1), d(v, v_2), \dots, d(v, v_{m-1}), d(v, u_k)).$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap titik-titik pada H memiliki representasi yang berbeda ke himpunan W . Perhatikan ketiga kasus berikut.

- (1) Untuk titik-titik $v_i \in V(H)$ dimana $0 \leq i \leq m$, $m \geq 2$, representasi titik v_i adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r(v_0|W) &= (\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{m-1}, l+2), \quad r(v_1|W) = (0, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m-2}, l+3), \\ r(v_2|W) &= (2, 0, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-3}, l+3), \quad r(v_3|W) = (2, 2, 0, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-4}, l+3), \\ r(v_4|W) &= (2, 2, 2, 0, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-5}, l+3), \quad \dots \\ r(v_{m-1}|W) &= (\underbrace{2, 2, 2, \dots, 2}_{m-2}, 0, l+3), \quad r(v_m|W) = (\underbrace{2, 2, 2, \dots, 2}_{m-1}, l+3). \end{aligned}$$

Karena $d(v_i, v_i) = 0$ dan $d(v_j, v_i) \neq 0$, untuk $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq m - 1$, maka representasi v_i dan v_j berbeda.

- (2) Untuk titik-titik $w_i \in V(H)$, $1 \leq i \leq l$, $l \geq 2$, diperoleh representasi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r(w_1|W) &= (\underbrace{2, 2, 2, \dots, 2}_{m-1}, l+1), \quad r(w_2|W) = (\underbrace{3, 3, 3, \dots, 3}_{m-1}, l), \\ r(w_3|W) &= (\underbrace{4, 4, 4, \dots, 4}_{m-1}, l-1), \quad \dots \\ r(w_{l-1}|W) &= (\underbrace{l, l, l, \dots, l}_{m-1}, 3), \quad r(w_l|W) = (\underbrace{l+1, l+1, l+1, \dots, l+1}_{m-1}, 2). \end{aligned}$$

Karena $d(w_i, v_i) \neq d(w_j, v_i)$, untuk $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq l$, maka representasi w_i dan w_j berbeda.

- (3) Untuk titik-titik $u_i \in V(H)$, $1 \leq i \leq k$, $k \geq 3$.

- (a) Untuk nilai k ganjil.

$$\begin{aligned} r(u_1|W) &= (\underbrace{l+2, l+2, l+2, \dots, l+2}_{m-1}, 1), \\ r(u_2|W) &= (\underbrace{l+3, l+3, l+3, \dots, l+3}_{m-1}, 2), \\ r(u_3|W) &= (\underbrace{l+4, l+4, l+4, \dots, l+4}_{m-1}, 3), \\ &\vdots \\ r(u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}|W) &= (\underbrace{l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, \dots, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}_{m-1}, \\ &\quad \lfloor \frac{k}{2} \rfloor), \\ r(u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}|W) &= (\underbrace{l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, \dots, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2}_{m-1}, \\ &\quad \lfloor \frac{k}{2} \rfloor), \\ r(u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2}|W) &= (\underbrace{l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, \dots, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2}_{m-1}, \\ &\quad \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1), \\ r(u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 3}|W) &= (\underbrace{l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, \dots, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}_{m-1}, \\ &\quad \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2), \\ &\vdots \\ r(u_{k-1}|W) &= (\underbrace{l+4, l+4, l+4, \dots, l+4}_{m-1}, 1), \\ r(u_k|W) &= (\underbrace{l+3, l+3, l+3, \dots, l+3}_{m-1}, 0). \end{aligned}$$

(b) Untuk nilai k genap.

$$\begin{aligned}
r(u_1|W) &= (\underbrace{l+2, l+2, l+2, \dots, l+2}_{m-1}, 1), \\
r(u_2|W) &= (\underbrace{l+3, l+3, l+3, \dots, l+3}_{m-1}, 2), \\
r(u_3|W) &= (\underbrace{l+4, l+4, l+4, \dots, l+4}_{m-1}, 3), \\
&\vdots \\
r(u_{\frac{k}{2}-1}|W) &= (\underbrace{l+\frac{k}{2}, l+\frac{k}{2}, l+\frac{k}{2}, \dots, l+\frac{k}{2}}_{m-1}, \frac{k}{2}-1), \\
r(u_{\frac{k}{2}}|W) &= (\underbrace{l+\frac{k}{2}+1, l+\frac{k}{2}+1, l+\frac{k}{2}+1, \dots, l+\frac{k}{2}+1}_{m-1}, \frac{k}{2}), \\
r(u_{\frac{k}{2}+1}|W) &= (\underbrace{l+\frac{k}{2}+2, l+\frac{k}{2}+2, l+\frac{k}{2}+2, \dots, l+\frac{k}{2}+2}_{m-1}, \frac{k}{2}-1), \\
r(u_{\frac{k}{2}+2}|W) &= (\underbrace{l+\frac{k}{2}+1, l+\frac{k}{2}+1, l+\frac{k}{2}+1, \dots, l+\frac{k}{2}+1}_{m-1}, \frac{k}{2}-2), \\
&\vdots \\
r(u_{k-1}|W) &= (\underbrace{l+4, l+4, l+4, \dots, l+4}_{m-1}, 1), \\
r(u_k|W) &= (\underbrace{l+3, l+3, l+3, \dots, l+3}_{m-1}, 0).
\end{aligned}$$

Karena $d(u_i, v_i) \neq d(u_j, v_i)$, untuk $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq k$, maka representasi u_i dan u_j berbeda.

Dari penyajian representasi di atas, dapat dilihat bahwa setiap titik pada H memiliki representasi yang berbeda terhadap $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, u_k\}$, dimana $|W| = m$, maka diperoleh bahwa $\dim(H) \leq m$. Dari uraian di atas, terbukti bahwa asumsi $\dim(H) = b = m$ adalah benar. Disimpulkan untuk graf palem $H = C_k P_l S_m$ untuk $k \geq 3$, $l, m \geq 2$, maka $\dim(H) = m$. $\square$

4. Kesimpulan

Pada artikel ini telah diperoleh bahwa dimensi metrik dari graf palem $H = C_k P_l S_m$ untuk $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah $\dim(H) = m$.

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada bapak Narwen, bapak Ahmad Iqbal Baqi dan ibu Nova Noliza Bakar yang telah memberikan kritik dan saran guna menjadikan penulisan ini lebih baik.

Daftar Pustaka

- [1] Slater, P., 1975, Leaves of trees, *Congr. Numer.* Vol. **14**: 549 – 559
- [2] Harary, F., Melter, 1976, On the metric dimension of a graph, *Ars Combin.* Vol. **2**: 191 – 195
- [3] Chartrand, G., L., Eroh, M. A. Johnson, Oellermann, 2000, Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics* Vol. **105**: 99 – 113
- [4] Chartrand, G., Lesniak, L., Zhang, P., 2016, *Graph and Digraphs*, Crc Press Taylor and Francis Group, New York.
- [5] Riyando, R., Narwen, Efendi, 2018, Dimensi Metrik pada Graf Kincir Pola $K_1 + mK_4$, *Jurnal Matematika UNAND*. **7**(4): 149-153
- [6] Putra, R.N.S., Yulianti, L., Sy, S., 2018, Dimensi Metrik dari Graf $W_n + C_n$ untuk $n \in \{3, 4\}$, *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. **7**(2): 165 – 169
- [7] Angraini, F., Welyyanti, D., Syafruddin, 2018, Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Graf Tangga Segitiga T_{rn} untuk $n = 2, 3$, *Jurnal Matematika UNAND* Vol. **7**(2): 42 – 52
- [8] Febrianti, F., Yulianti, L., Narwen, 2019, Dimensi Metrik pada Graf Amalgamasi Tangga Segitiga Diperumum Homogen, *Jurnal Matematika UNAND* Vol. **8**(1): 84 – 90
- [9] Putri, A.P., Yulianti, L., Rudianto, B., 2019, Dimensi Metrik dari Graf Amal $(Tr_n, v)_m$ untuk $n = 5$ dan $m = 3$, *Jurnal Matematika UNAND* Vol. **8**(1): 1 – 8
- [10] Aditya, R., Narwen., Welyyanti, D. 2019. *Dimensi Metrik pada Graf $Rn(q, r)_m$* , *Jurnal Matematika UNAND* Vol. **7**(1): 260 – 267
- [11] Putri, A.H., Yulianti, L., Welyyanti, D., 2019, Dimensi Metrik dari graf Buckminsterfullerene, *Jurnal Matematika UNAND* Vol. **8**(4): 93 - 102
- [12] Yulianti, L., Narwen, Hariyani, S., 2019, A note on the metric dimension of subdivided thorn graphs, *Indonesian Journal of Combinatorics* Vol. **3**(1): 34 - 40
- [13] Mujib, A., 2019, Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga $(C_m S_n)$ dan graf palem $(C_k P_l S_m)$, *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika* Vol. **4**(1): 13 – 22