

KESTABILAN LOKAL TITIK EKUILIBRIUM MODEL PENYEBARAN PENYAKIT POLIO

JOKO HARIANTO¹, VENTHY ANGELIKA^{2*}, FEBY SERU¹

¹ Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Cenderawasih

² Prodi Sarjana Kedokteran Fakultas Kedokteran Universitas Cenderawasih email :
joharijpr88@gmail.com, v3n7h1@gmail.com, febyseru.math@gmail.com

Diterima 9 Maret 2023 Direvisi 29 Maret 2023 Dipublikasikan 21 Oktober 2023

Abstrak. Fakta menunjukkan bahwa penyakit polio dapat berbahaya terhadap umat manusia, maka perlu untuk dipelajari dinamika penyebaran penyakit polio. Salah satu cara, yaitu dengan pendekatan matematis berupa model matematika penyebaran penyakit polio. Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini adalah model SEIV. Penelitian ini bertujuan untuk memberikan deskripsi tentang dinamika penyebaran penyakit polio. Hasil penelitian ini diharapkan dapat dijadikan referensi untuk mempelajari dinamika penyebaran penyakit polio pada suatu area. Metode yang digunakan dalam pelaksanaan penelitian ini berupa kajian pustaka. Tahapan pertama dimulai dengan formulasi model. Tahap kedua menganalisis model yang telah dibentuk dan yang terakhir membuat simulasi model. Model SEIV yang dibentuk merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear. Parameter bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) diperoleh dari hasil analisis sistem tersebut. Jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, maka terdapat dengan tunggal titik ekuilibrium bebas penyakit yang stabil asimtotik lokal. Sebaliknya, jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu, maka terdapat dua titik ekuilibrium (non-endemik dan endemik) dengan endemik stabil asimtotik lokal. Simulasi numerik yang dilakukan menggunakan software Maple mendukung hasil analisis tersebut.

Abstract. The fact shows that polio is very dangerous to humanity, it is necessary to study the dynamics of the spread of polio. One way, namely a mathematical approach in the form of a mathematical model for the spread of polio. The mathematical model used in this study is the SEIV model. This study aims to provide a description of the dynamics of the spread of polio. The results of this study are expected to be used as a reference to study the dynamics of the spread of polio in an area. The method used in the implementation of this research is literature study. The first stage starts with the model formulation. The second stage analyzes the model that has been formed and the last one makes a model simulation. The formed SEIV model is a system of nonlinear differential equations. The basic reproduction number parameter is obtained from the results of the system analysis. If the basic reproduction number is less than one, then there exists with a single disease-free equilibrium point which is locally asymptotically stable. Conversely, if the basic reproduction number is more than one, then there are two equilibrium points (non-endemic and endemic) with endemic points which is locally

*penulis korespondensi

asymptotically stable. Numerical simulations performed using Maple software support the results of the analysis.

Kata Kunci: Dinamika Polio, Model Polio, Simulasi Numerik, Titik equilibrium, Bilangan reproduksi dasar

1. Pendahuluan

Masalah kesehatan sangat erat kaitannya dengan penyakit. Keterkaitan inilah yang memotivasi manusia untuk terus mempelajari tentang kesehatan dan juga penyakit. Salah satu tujuan suatu bangsa untuk mencapai kesejahteraan di masa depan, yaitu terciptanya lingkungan hidup yang sehat. Salah satu indikator lingkungan hidup yang sehat melibatkan tingkat pelayanan kesehatan yang bermutu. Masalah pelayanan kesehatan yang bermutu perlu ditangani dengan langkah yang sistematis, efektif dan efisien. Analisis penyebaran suatu penyakit merupakan salah satu langkah dalam menangani masalah pelayanan kesehatan yang bermutu. Penyebaran penyakit yang disebabkan oleh virus atau bakteri menimbulkan gangguan kesehatan bagi manusia dan mempengaruhi perkembangan sosial ekonomi masyarakat. Upaya pencegahan penyebaran penyakit ini dapat berhasil secara optimal ketika beberapa tonggak penelitian tercapai, berbagai alat diagnostik, obat baru dan vaksin dikembangkan.

Polio (*Poliomyelitis*) adalah salah satu jenis penyakit yang dapat melemahkan karena disebabkan oleh virus. Pembawa penyakit ini adalah virus dari genus *Enterovirus* dan famili *Picornavirus*. Radang tenggorokan, sakit perut disertai demam ringan, pusing dan lumpuh akut, biasanya kaki lemas tanpa gangguan pada indera perasa adalah gejala dari penyakit ini. Ada tiga jenis *poliomyelitis* yaitu *poliomyelitis non paralitik*, *poliomyelitis paralitik* tulang belakang, dan *Poliomyelitis bulbar*. Orang yang terkena polio tipe lumpuh tidak sembuh karena vaksinasi hanya dapat diberikan sebelum infeksi. Jenis poliomyelitis ini menyerang sumsum tulang belakang, yang dapat menyebabkan kelumpuhan permanen pada kaki. Namun polio jenis ini tidak mematikan karena tidak menyerang organ vital. Meskipun *Poliomyelitis bulbar* dapat menyebabkan kematian. Program vaksinasi dapat membatasi penyebaran polio. Sampai saat ini, program vaksinasi dianggap sebagai cara yang paling efektif untuk mencegah penyebaran penyakit polio. Oleh karena itu, vaksinasi harus diperhatikan untuk mencegah penyebaran polio.

Permasalahan penyebaran penyakit polio terkait juga dengan berbagai aspek kehidupan. Dalam penyelesaian permasalahan tersebut diperlukan sebuah analisis melalui suatu pendekatan. Salah satu pendekatan yang dapat dilakukan yaitu melalui pendekatan matematis. Pendekatan matematis dipandang sebagai alat bantu untuk menyederhanakan masalah. Masalah-masalah ini harus lebih sistematis, lebih mudah dipahami, lebih mudah dianalisis, dan lebih mudah dipecahkan. Untuk melakukan ini, pertama temukan masalah utama, selanjutnya buat rumus atau model matematika untuk menyelesaikan masalah dengan lebih mudah. Model matematika adalah sekumpulan persamaan matematis yang menggambarkan dan merepresentasikan sistem nyata dengan menggunakan beberapa asumsi permasalahan yang ada. Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat di-

gunakan untuk meninjau atau menganalisis dinamika penyebaran suatu penyakit. Model matematika memiliki peranan yang cukup penting dalam berbagai bidang ilmu. Model penyebaran penyakit pertama kali dikemukakan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 yang dikenal sebagai model epidemik SIR. Pada model epidemik SIR, populasi dibagi menjadi tiga sub populasi, yaitu S (*Susceptible*), I (*Infected*) dan R (*Recovered*) [1]. Vaksinasi (*Vaccination*) diasumsikan menjadi suatu sub populasi baru dalam model SIR untuk beberapa jenis penyakit [2]. Agarwal *et al.* [2] membahas pemodelan penyebaran polio dengan peran vaksinasi sehingga model yang dibentuk menjadi model SEIV. Model SEIV diselidiki menggunakan teknik penundaan seperti yang dibahas dalam [3] dan [4]. Husain *et al.* [5] menyelidiki dinamika penyakit polio (model SEIV) menggunakan konsep analisis sensitivitas. Raza *et al.* [6] mempelajari analisis pelestarian struktur model epidemi dengan sifat-sifat yang diperlukan. Banyak teknik analisis yang terkait dengan model epidemi diberikan dalam [7] dan [8]. Hasil penelitian terkenal dengan teknik analisis yang berbeda dipelajari di [9] - [17]. Penelitian dalam negeri terkait model penyebaran penyakit polio salah satunya dibahas oleh Umam *et al.* [18]. Model tersebut dimodifikasi berdasarkan [2] dengan tidak meninjau adanya asumsi pemberian vaksinasi pada sub populasi exposed. Selain itu, model yang dibentuk merupakan model untuk jenis polio yang tidak menyebabkan kematian. Dengan kata lain, tidak ada faktor kematian karena penyakit polio [18].

Berdasarkan [2] dan [18], kemudian dilakukan rekonstruksi model dengan melibatkan parameter peluang individu yang telah divaksin menjadi individu yang rentan kembali terhadap penyakit polio. Kejadian seseorang kembali rentan terhadap penyakit polio setelah divaksin dapat terjadi karena pemberian vaksin yang tidak sempurna atau kondisi kesehatan tubuh yang kurang mendukung saat diberikan vaksin. Selain itu, ditinjau pula adanya kematian alami setiap sub populasi dengan laju yang berbeda-beda. Permasalahan tersebut kemudian diformulasikan kedalam bentuk model matematika dan dianalisis kestabilan lokal sistemnya. Selanjutnya, diberikan simulasi dengan parameter-parameter yang diberikan sebagai bentuk pengecekan terhadap hasil analisis yang diperoleh. Hasil analisis dan simulasi yang dilakukan bertujuan untuk mendeskripsikan dinamika penyebaran penyakit polio.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode kajian pustaka, yaitu dengan mempelajari beberapa referensi yang memuat materi yang berkaitan dengan masalah yang dibahas. Tahapan-tahapan dalam penelitian ini meliputi penentuan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis dan pemecahan masalah dan penarikan kesimpulan. Dalam pembahasan masalah, secara garis besar dilakukan tiga langkah meliputi: pembentukan model, analisis eksistensi dan kestabilan lokal titik ekuilibrium model, serta simulasi model. Simulasi digunakan untuk mendukung hasil analisis yang diperoleh.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. *Formulasi Model*

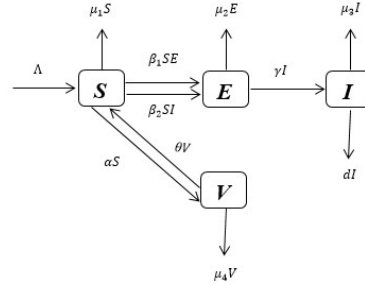
Pada model epidemi penyakit polio berbasis *SEIV* (*Susceptible-Exposed- Infected- Vaccinated*), populasi dalam suatu lingkungan dibagi menjadi empat sub populasi, yaitu sub populasi *Susceptible*, sub populasi *Exposed*, sub populasi *Infected* dan sub populasi *Vaccinated*. Jumlah individu dalam suatu populasi bergantung pada waktu. Oleh karena itu, Jumlah individu dalam populasi merupakan suatu fungsi terhadap waktu. Waktu dinyatakan sebagai variabel t . $S(t)$ menyatakan jumlah individu yang rentan terhadap penyakit polio pada saat t , $E(t)$ menyatakan jumlah individu yang laten dari penyakit polio pada saat t , $I(t)$ menyatakan jumlah individu yang terinfeksi penyakit polio, dan $V(t)$ menyatakan jumlah individu yang telah divaksin pada saat t .

Untuk memodelkan epidemi penyakit polio berbasis *SEIV* secara deterministik, dibutuhkan pemahaman mengenai asumsi dan hubungan antar variabel terkait permasalahan yang dibahas. Asumsi-asumsi yang dilibatkan dalam model tersebut antara lain; individu dalam populasi bertambah karena terjadi kelahiran dan migrasi, populasi tidak konstan, setiap sub populasi mengalami kematian alami yang lajunya berbeda-beda, penyakit polio yang diderita seseorang dapat menyebabkan kematian, kesembuhan seseorang terhadap penyakit polio bersifat permanen, vaksin hanya diberikan kepada seseorang yang rentan terhadap penyakit polio, kekebalan terhadap penyakit diperoleh seiring dengan berjalannya waktu sehingga mengakibatkan kesembuhan permanen, tidak semua orang yang divaksin mendapatkan kekebalan terhadap penyakit polio secara sempurna, kekebalan yang diperoleh tergantung pada kondisi tubuh masing-masing individu. Seseorang yang telah divaksin masih berpeluang terinfeksi jika belum mendapat kekebalan yang sempurna dan masih terkontaminasi dengan orang-orang yang terinfeksi penyakit polio. Kontaminasi antara orang yang terinfeksi dengan orang yang rentan ataupun laten mengakibatkan adanya transmisi penyakit. Kelahiran di setiap sub populasi masuk pada sub populasi rentan.

Parameter-parameter bernilai positif yang digunakan dalam model tersebut antara lain; Λ menyatakan jumlah individu yang masuk pada sub populasi S karena kelahiran dan migrasi per satuan waktu, d menyatakan laju kematian karena penyakit polio pada sub populasi I , μ_1 menyatakan laju kematian alami pada sub populasi S , μ_2 menyatakan laju kematian alami pada sub populasi E , μ_3 menyatakan laju kematian alami pada sub populasi I , μ_4 menyatakan laju kematian alami pada sub populasi V , β_1 menyatakan laju transmisi (laju kontak) yang terjadi dari seorang yang laten terhadap orang yang rentan, β_2 menyatakan laju transmisi (laju kontak) yang terjadi dari seorang yang terinfeksi terhadap orang yang rentan, γ menyatakan laju individu dari kondisi laten menjadi terinfeksi penyakit, α menyatakan laju pemberian vaksin pada individu yang rentan terhadap penyakit, θ menyatakan laju individu yang telah divaksin menjadi individu yang rentan terhadap penyakit.

Secara skematik proses transmisi epidemi penyakit polio berbasis *SEIV* dalam suatu populasi dapat disajikan pada diagram pada Gambar 1.

Model matematika dari diagram skematik pada Gambar 1 dapat diformulasikan



Gambar 1: Diagram skematik penyebaran penyakit polio dengan vaksinasi

dalam sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda + \theta V - \alpha S - \beta_1 SE - \beta_2 SI - \mu_1 S \\
 \frac{dE}{dt} &= \alpha \beta_1 SE + \beta_2 SI - \gamma E - \mu_2 E \\
 \frac{dI}{dt} &= \gamma E - \mu_3 I - dI \\
 \frac{dV}{dt} &= \alpha S - \theta V - \mu_4 V
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan $S, V, I, R \geq 0$, untuk setiap $t \geq 0$ dan $N = S + V + I + R$. Model tersebut merupakan modifikasi dari model SEIV dalam [2].

3.2. Penentuan Titik Ekuilibrium dan Basic Reproduction Number

Titik ekuilibrium Sistem (3.1) diartikan sebagai penyelesaian Sistem (3.1) yang tidak berubah terhadap waktu t . Titik ekuilibrium terkadang disebut juga sebagai solusi konstan. Titik ekuilibrium umumnya dapat ditentukan secara analitik dengan dua syarat sub populasi I , yaitu saat $I = 0$ dan $I > 0$. Adanya dua syarat tersebut sehingga diperoleh dua titik ekuilibrium. Dua titik ekuilibrium tersebut sering disebut titik ekuilibrium non endemik dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium non endemik merupakan representasi dari suatu keadaan tanpa adanya seseorang yang terinfeksi dalam lingkungan berwabah. Sedangkan titik ekuilibrium endemik merupakan representasi suatu keadaan beberapa orang dalam lingkungan masih terinfeksi penyakit. Hal ini berarti bahwa penyakit masih akan menyebar karena masih ada sejumlah orang yang terinfeksi ($I > 0$) untuk $t \rightarrow \infty$ pada suatu lingkungan berwabah.

Titik ekuilibrium diperoleh dengan membuat laju perubahan masing-masing sub populasi konstan terhadap waktu (t) yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dV}{dt} = 0,$$

sehingga titik ekuilibrium Sistem (3.1) ditentukan melalui penyelesaian dari sistem

berikut:

$$\Lambda + \theta V - \alpha S - \beta_1 SE - \beta_2 SI - \mu_1 S = 0, \quad (3.2)$$

$$\alpha\beta_1 SE + \beta_2 SI - \gamma E - \mu_2 E = 0, \quad (3.3)$$

$$\gamma E - \mu_3 I - dI = 0, \quad (3.4)$$

$$\alpha S - \theta V - \mu_4 V = 0. \quad (3.5)$$

Berdasarkan Persamaan (3.4), diperoleh:

$$\gamma E - (\mu_3 + d)I = 0. \quad (3.6)$$

Sehingga didapat dua syarat, yaitu:

a. Syarat $I = 0$.

Syarat ini disebut syarat perlu agar diperoleh titik ekuilibrium non endemik, akibatnya dari Persamaan (3.4) didapat:

$$\gamma E - (\mu_3 + d)I = 0 \Leftrightarrow E = \frac{(\mu_3 + d)}{\gamma} I \Leftrightarrow E = 0.$$

Kemudian $E = 0$ dan $I = 0$ disubstitusikan ke Persamaan (3.2) dan (3.5) maka diperoleh sistem persamaan linear berikut :

$$(\mu_1 + \alpha)S - \theta V = \Lambda,$$

$$\alpha S - (\mu_4 + \theta)V = 0,$$

dengan metode eliminasi dan substitusi, diperoleh solusi persamaan linear di atas, yaitu:

$$S = \frac{\Lambda(\mu_4 + \theta)}{(\mu_1 + \alpha)(\mu_4 + \theta) - \theta\alpha} \quad \text{dan} \quad V = \frac{\Lambda\alpha}{(\mu_1 + \alpha)(\mu_4 + \theta) - \theta\alpha}.$$

Jadi, titik ekuilibrium non endemik adalah:

$$\hat{\mathbf{E}}(S_0, E_0, I_0, V_0) = \left(\frac{\Lambda(\mu_4 + \theta)}{(\mu_1 + \alpha)(\mu_4 + \theta) - \theta\alpha}, 0, 0, \frac{\Lambda\alpha}{(\mu_1 + \alpha)(\mu_4 + \theta) - \theta\alpha} \right).$$

b. Syarat $I > 0$.

Syarat ini disebut syarat perlu agar diperoleh titik ekuilibrium endemik. Berdasarkan persamaan (3.4) diperoleh:

$$E^* = kI^*,$$

dengan $k = \frac{(\mu_3 + d)}{\gamma} > 0$.

Kemudian $E^* = kI^*$ disubstitusikan ke Persamaan (3.3) diperoleh

$$\beta_1 S k I^* + \beta_2 S I^* - (\gamma + \mu_2) k I^* = 0 \Leftrightarrow I^* (\beta_1 S k + \beta_2 S - (\gamma + \mu_2) k) = 0.$$

Karena $I^* > 0$, maka haruslah $\beta_1 S k + \beta_2 S - (\gamma + \mu_2) k = 0$, sehingga diperoleh

$$(\beta_1 k + \beta_2) S - (\gamma + \mu_2) k = 0 \Leftrightarrow S^* = \frac{(\gamma + \mu_2) k}{\beta_1 k + \beta_2} > 0.$$

Kemudian dari Persamaan (3.5) diperoleh

$$V^* = \frac{\alpha S^*}{(\mu_4 + \theta)} = \frac{\alpha(\gamma + \mu_2)k}{(\mu_4 + \theta)(\beta_1 k + \beta_2)} > 0.$$

Berdasarkan Persamaan (3.2), dengan substitusi S^* , V^* dan $E^* = kI^*$ diperoleh

$$\begin{aligned} \Lambda + \theta V^* - \alpha S^* - \beta_1 S^* K I^* - \beta_2 S^* I^* - \mu_1 S^* &= 0, \\ \Leftrightarrow (\beta_1 S^* K - \beta_2 S^*) I^* &= \Lambda - (\mu_1 + \alpha) S^* + \theta V^*, \\ \Leftrightarrow I^* &= \frac{\Lambda - (\mu_1 + \alpha) S^* + \theta V^*}{\beta_1 S^* K - \beta_2 S^*}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Jelas bahwa $\beta_1 S^* K - \beta_2 S^* > 0$. Diperhatikan Persamaan (3.7) bahwa I^* akan bernilai positif bergantung pada nilai pembilangnya.

Jika $\Lambda - (\mu_1 + \alpha) S^* + \theta V^* > 0$ maka $I^* > 0$. Adanya kondisi bersyarat tersebut kemudian didefinisikan suatu parameter yang disebut sebagai *Basic Reproduction Number* (R_0). Syarat $\Lambda - (\mu_1 + \alpha) S^* + \theta V^* > 0$ dapat diuraikan dalam bentuk berikut :

$$\begin{aligned} \Lambda - (\mu_1 + \alpha) S^* + \theta V^* > 0 &\Leftrightarrow \Lambda - [(\mu_1 + \alpha) S^* - \theta V^*] > 0, \\ &\Leftrightarrow \Lambda > (\mu_1 + \alpha) S^* - \theta V^*, \\ &\Leftrightarrow \frac{\Lambda}{(\mu_1 + \alpha) S^* - \theta V^*} > 1. \end{aligned}$$

Didefinisikan

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\Lambda}{(\mu_1 + \alpha) S^* - \theta V^*} = \frac{\Lambda(\mu_4 + \theta)(\beta_1 k + \beta_2)}{(\mu_4 + \theta)(\mu_1 + \alpha)(\gamma + \mu_2)k + \theta(\gamma + \mu_2)\alpha k}, \\ &= \frac{\Lambda(\mu_4 + \theta)\beta_1}{[(\mu_4 + \theta)(\mu_1 + \alpha) - \theta\alpha](\gamma + \mu_2)} + \frac{\Lambda(\mu_4 + \theta)\beta_2}{[(\mu_4 + \theta)(\mu_1 + \alpha) - \theta\alpha](\gamma + \mu_2)}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, eksistensi titik ekuilibrium endemik bergantung pada nilai R_0 . Jika $R_0 > 1$, maka terdapat dengan tunggal titik ekuilibrium endemik Sistem (3.1), yaitu $\bar{\mathbf{E}}(S^*, E^*, I^*, V^*)$ dengan:

$$S^* = \frac{(\gamma + \mu_2)k}{\beta_1 k + \beta_2}, V^* = \frac{\alpha(\gamma + \mu_2)k}{(\mu_4 + \theta)(\beta_1 k + \beta_2)}, I^* = \frac{\Lambda - (\mu_1 + \alpha)S^* + \theta V^*}{\beta_1 k S^* + \beta_2 S^*}, E^* = kI^*$$

dan $k = \frac{(\mu_3 + d)}{\gamma}$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa jika $R_0 \leq 1$, maka terdapat dengan tunggal titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $\hat{\mathbf{E}}$. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka terdapat dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium non endemik $\hat{\mathbf{E}}$ dan endemik $\bar{\mathbf{E}}$.

3.3. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium

Dinamika epidemi model ini sulit dianalisis melalui solusi analitiknya karena model ini melibatkan sistem persamaan diferensial nonlinear. Oleh karena itu, hal yang bisa dilakukan untuk mengkaji dinamika epidemi model ini yaitu dengan mengkaji kestabilan solusi konstan atau titik ekuilibrium model tersebut. Analisis kestabilan

titik ekuilibrium dilakukan dengan pendekatan linearisasi di sekitar titik ekuilibriumnya. Kestabilan lokal titik ekuilibrium umumnya diselidiki di sekitar titik ekuilibrium non endemik dan di sekitar titik ekuilibrium endemik. Persamaan (3.2), (3.3), (3.4) dan (3.5) merupakan persamaan nonlinear, sehingga dengan menggunakan linearisasi dapat diperoleh sistem persamaan diferensial linear. Sistem persamaan diferensial linear tersebut akan memiliki sifat yang serupa dengan sistem aslinya di sekitar titik ekuilibrium jika titik ekuilibriumnya adalah titik ekuilibrium hiperbolik [8]. Analisis kestabilan lokal titik ekuilibrium Sistem (3.1) dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian dari Sistem (3.1). Matriks Jacobian tersebut dievaluasi di titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Kestabilan lokal titik ekuilibrium Sistem (3.1) dapat ditentukan dengan meninjau tanda negatif dari bagian real nilai eigen matriks Jacobian [7]. Hasil analisis kestabilan lokal titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik Sistem (3.1) diringkas dalam teorema berikut.

Teorema 3.1. *Didefinisikan R_0 sebagai berikut:*

$$R_0 = \frac{\Lambda(\mu_4 + \theta)\beta_1}{[(\mu_4 + \theta)(\mu_1 + \alpha) - \theta\alpha](\gamma + \mu_2)} + \frac{\Lambda(\mu_4 + \theta)\beta_2}{[(\mu_4 + \theta)(\mu_1 + \alpha) - \theta\alpha](\gamma + \mu_2)}$$

- (i) $\hat{E}$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium $\hat{E}$ tidak stabil.
- (ii) $\bar{E}$ stabil asimtotik lokal, jika $R_0 > 1$ dan $a_1a_2 - a_3 > 0$, dengan:

$$\begin{aligned} a_1 &= p + y + w > 0, \\ a_2 &= (y + w)p + yw + qr - \alpha\theta = wp + yw + qr + yp - \alpha\theta > 0, \\ a_3 &= yqr + ywp - \alpha\theta w = yqr + (yp - \alpha\theta)w > 0, \\ p &= \mu_1 + \alpha + \beta_1E^* + \beta_2I^* > 0, \\ q &= \beta_1S^* > 0, \\ r &= \beta_1E^* + \beta_2I^* > 0, \\ w &= (\gamma + \mu_2) - \beta_1S^* > 0, \\ y &= \mu_4 + \theta > 0. \end{aligned}$$

Bukti.

- (i) Misalkan

$$\begin{aligned} dS/dt &= f_1 = \Lambda + \theta V - \alpha S - \beta_1SE - \beta_2SI - \mu_1S, \\ dE/dt &= f_2 = \beta_1SE + \beta_2SI - \gamma E - \mu_2E, \\ dI/dt &= f_3 = \gamma E - \mu_3I - dI, \\ dV/dt &= f_4 = \alpha S - \theta V - \mu_4V, \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial S} &= (\mu_1 + \beta_1 E + \beta_2 + \alpha), & \frac{\partial f_1}{\partial E} &= -\beta_1 S, & \frac{\partial f_1}{\partial I} &= \beta_2 S, & \frac{\partial f_1}{\partial V} &= \theta, \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} &= \beta_1 E + \beta_2 I, & \frac{\partial f_2}{\partial E} &= \beta_1 S - (\gamma + \mu_2), & \frac{\partial f_2}{\partial I} &= \beta_2 S, & \frac{\partial f_2}{\partial V} &= 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} &= 0, & \frac{\partial f_3}{\partial E} &= \gamma, & \frac{\partial f_3}{\partial I} &= -(\mu_3 + d), & \frac{\partial f_3}{\partial V} &= 0, \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} &= \alpha, & \frac{\partial f_4}{\partial E} &= 0, & \frac{\partial f_4}{\partial I} &= 0, & \frac{\partial f_4}{\partial V} &= -(\mu_4 + \theta).\end{aligned}$$

Sehingga matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{E}}(S_0, E_0, I_0, V_0)$ adalah:

$$J(f(\hat{\mathbf{E}})) = \begin{bmatrix} -(\mu_1 + \alpha) & -\beta_1 S_0 & -\beta_2 S_0 & \theta \\ 0 & \beta_1 S_0 - (\gamma + \mu_2) & \beta_2 S_0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu_2 + d) & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -(\mu_4 + \theta) \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor kolom pertama maka persamaan karakteristik dari $\det(\lambda I - J(f(\hat{\mathbf{E}}))) = 0$ adalah

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & [\lambda + (\mu_1 + \alpha)][\lambda + (\mu_4 + \theta)][\lambda + (\mu_2 + \gamma) - \beta_1 S_0][\lambda + (\mu_3 + d) - \beta_2 \gamma S_0] \\ & + \alpha \theta [\lambda + (\mu_2 + \gamma) - \beta_1 S_0][\gamma + (\mu_3 + d)] - \beta_2 \gamma S_0 = 0, \\ \Leftrightarrow & [\lambda(\mu_1 + \alpha)][\lambda + (\mu_4 + \theta)] + \alpha \theta [\lambda + (\mu_2 + \gamma) - \beta_1 S_0][\lambda + (\mu_3 + d)] - \beta_2 \gamma S_0 = 0, \\ \Leftrightarrow & (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \lambda)(\lambda^2 + b_1 \lambda + b_2) = 0,\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}a_1 &= \mu_1 + \alpha + \mu_4 + \theta > 0, \\ a_2 &= (\mu_1 + \alpha)(\mu_4 + \theta) + \alpha \theta > 0, \\ b_1 &= \mu_2 + \gamma + \mu_3 + d - \beta_1 S_0, \\ b_2 &= [(\mu_2 + \gamma) - \beta_1 S_0][\mu_3 + d] - \beta_2 \gamma S_0.\end{aligned}$$

Karena $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$, sehingga berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz [5] dijamin bahwa λ_1 dan λ_2 bernilai negatif. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}b_1 &= \mu_2 + \gamma + \mu_3 + d - \beta_1 S_0 = \mu_3 + d + (\mu_2 + \gamma)(1 - R_1), \\ b_2 &= [(\mu_2 + \gamma) - \beta_1 S_0][\mu_3 + d] - \beta_2 \gamma S_0 = (\mu_2 + \gamma)(\mu_3 + d)(1 - R_0),\end{aligned}$$

dengan

$$R_1 = \frac{\Lambda(\mu_4 + \theta)\beta_1}{[(\mu_4 + \theta)(\mu_1 + \alpha) - \theta\alpha](\gamma + \mu_2)}.$$

Jelas bahwa $R_1 < 1$, karena $R_0 < 1$ sehingga $b_1 > 0$. Selanjutnya, $b_2 > 0$ karena $R_0 < 1$. Dengan demikian, berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz dijamin bahwa λ_3 dan λ_4 bernilai negatif. Jadi, disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{E}}$ stabil asimtotik lokal karena semua nilai eigen dari matriks $J(f(\hat{\mathbf{E}}))$ bernilai negatif. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$ maka $b_1 < 0$ dan $b_2 < 0$ yang berakibat λ_3 atau λ_4 bernilai positif sehingga dapat disimpulkan

bahwa titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{E}}$ tidak stabil karena tidak semua nilai eigen dari matriks $J(f(\hat{\mathbf{E}}))$ bernilai negatif.

- (ii) Jelas bahwa titik ekuilibrium endemik $\bar{\mathbf{E}}$ ada saat $R_0 < 1$. Perubahan jumlah individu di subpopulasi I dalam model tidak mempengaruhi perubahan jumlah individu di subpopulasi yang lain. Oleh karena itu, untuk mempermudah analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik hanya akan melibatkan tiga subpopulasi yang saling mempengaruhi, yaitu S, E dan V . Matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{E}}(S^*, E^*, V^*)$ adalah sebagai berikut:

$$J(f(\hat{\mathbf{E}})) = \begin{bmatrix} -(\mu_1 + \alpha + \beta_1^* + \beta_2 I^*) - \beta_1 S^* & \theta \\ \beta_1 E^* & \beta_2 I^* - \beta_1 S^* - (\gamma - \mu_2) \\ \alpha & 0 & -(\mu_4 + \theta) \end{bmatrix}$$

Berikut ini akan ditentukan nilai eigen dari matriks $J(f(E_0))$ adalah

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - J(f(\hat{\mathbf{E}}))) &= 0 \Leftrightarrow \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -p & -q & \theta \\ r & -w & 0 \\ \alpha & 0 & -y \end{bmatrix} \right) = 0, \\ &\Leftrightarrow \det \left(\lambda \begin{bmatrix} \lambda + p & q & -\theta \\ -r & \lambda + w & 0 \\ -\alpha & 0 & \lambda + y \end{bmatrix} \right) = 0, \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} p &= \mu_1 + \alpha + \beta_1^* + \beta_2 I^* > 0, \\ q &= \beta_1 S^* > 0, \\ r &= \beta_1 E^* + \beta_2 I^* > 0, \\ w &= (\gamma + \mu_2) - \beta_1 S^*, \\ y &= \mu_4 + \theta > 0. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristiknya diperoleh dengan menggunakan ekspansi ko-faktor kolom ke tiga:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -\alpha\theta(\lambda + w) + (\lambda + y)[(\lambda + w)(\lambda + p) + qr] = 0, \\ &\Leftrightarrow (\lambda + y)(\lambda + w)(\lambda + p) + (\lambda + y)qr - \alpha\theta(\lambda + w) = 0, \\ &\Leftrightarrow \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= p + y + w > 0, \\ a_2 &= (y + w)p + yw + qr - \alpha\theta = wp + yw + qr + yp - \alpha\theta > 0, \\ a_3 &= yqr + ywp - \alpha\theta w = yqr + (\gamma p - \alpha\theta)w > 0. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\gamma p = (\mu_4 + \theta)(\mu_1 + \alpha + \beta_1 E^* + \beta_2 I^*)$, yang artinya bahwa γp memuat $\alpha\theta$ sehingga jelas bahwa $\gamma p - \alpha\theta > 0$ akibatnya $a_2 > 0$. Selanjutnya, dari Persamaan (3.3) diperoleh:

$$\beta_1 S^* E^* + \beta_2 S^* I^* - \gamma E^* - \mu_2 E^* = 0 \Leftrightarrow (\mu_2 + \gamma) - \beta S^* = \frac{\beta_2 S^* I^*}{E^*} > 0.$$

Dengan demikian $w = (\mu_2 + \gamma) - \beta_1 S^* > 0$, sehingga jelas bahwa $a_3 > 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, semua akar persamaan karakteristik tersebut dijamin bernilai negatif jika syarat $a_1 a_2 - a_3 > 0$ dipenuhi. Jadi, titik ekuilibrium endemik $\bar{E}$ stabil asimtotik lokal jika syarat $a_1 a_2 - a_3 > 0$ dipenuhi. $\square$

Interpretasi dari hasil analisis yang diperoleh sebagai berikut.

- (a) Jika proporsi awal sub populasi rentan, sub populasi divaksin dan terinfeksi dekat dengan $\hat{E}$ dan $R_0 < 1$, maka penyakit polio tidak akan menyebar bahkan jumlah orang yang terinfeksi akan turun menuju nol (menghilang) untuk $t \rightarrow \infty$. Hal ini merupakan makna dari istilah stabil asimtotik lokal di sekitar titik ekuilibrium $\hat{E}(S_0, V_0, I_0)$ dengan syarat $R_0 < 1$.
- (b) Jika proporsi awal sub populasi rentan, sub populasi divaksin dan terinfeksi berada pada persekitaran nilai $\bar{E}(S^*, V^*, I^*)$ dan $R_0 > 1$, maka penyakit polio akan terus ada dalam populasi lingkungan berwabah. Jumlah sub populasi rentan, sub populasi divaksin dan terinfeksi akan cenderung menuju ke nilai $\bar{E}(S^*, V^*, I^*)$ untuk $t \rightarrow \infty$. Hal ini merupakan makna dari istilah stabil asimtotik lokal di sekitar titik ekuilibrium $\bar{E}(S^*, V^*, I^*)$ dengan syarat $R_0 > 1$.

3.4. Simulasi Numerik

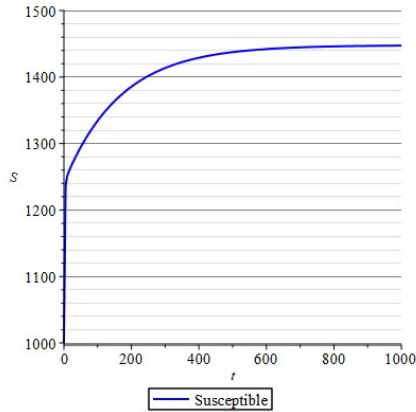
Simulasi numerik yang dilakukan menggunakan software Maple. Semua nilai parameter yang digunakan merupakan asumsi sebagai pendekatan secara numerik. Kestabilan titik ekuilibrium ditinjau dari dua kondisi parameter R_0 , yaitu pada saat $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Simulasi numerik yang diberikan berikut ini dimulai dari kondisi $R_0 < 1$ kemudian $R_0 > 1$.

Proporsi awal masing-masing sub populasi, yaitu $S(0) = 1000, E(0) = 500, I(0) = 100$ dan $V(0) = 700$. Hasil analisis eksistensi titik ekuilibrium secara analitik diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $\hat{E}(1447.77, 0, 0, 165460)$ dan $R_0 = 0,089 < 1$. Dari hasil simulasi numerik diperoleh grafik yang menunjukkan hubungan jumlah sub populasi manusia rentan, *exposed* dan *infected* terhadap variabel waktu sebagai berikut.

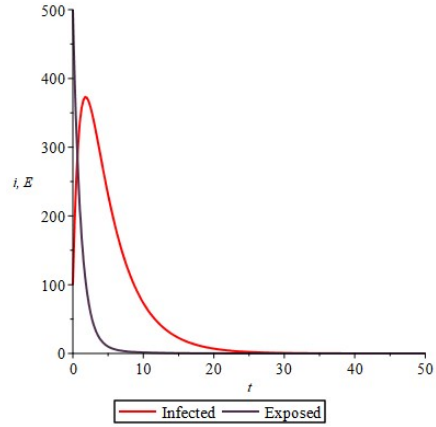
Pada Gambar 2 dapat dilihat bahwa dalam waktu 800 hari, jumlah individu rentan nilainya akan menuju 1447 dan dalam waktu yang tak terhingga nilainya selalu dekat dengan 1447.

Pada Gambar 3 dapat dilihat bahwa dalam waktu 30 hari, jumlah sub populasi *infected* dan *exposed* akan menuju 0 dan dalam waktu yang tak terhingga nilainya selalu dekat dengan 0. Hal ini berarti bahwa penyakit akan musnah selamanya dan jumlah individu yang terinfeksi mendekati 0 seiring dengan berjalannya waktu. Berikut ini adalah grafik yang menunjukkan hubungan jumlah sub populasi vaksinasi terhadap variabel waktu.

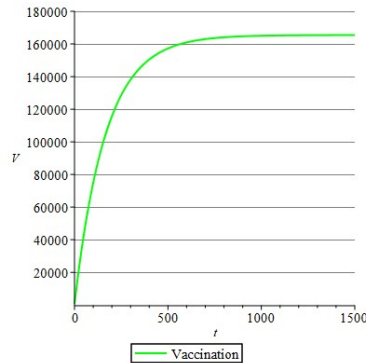
Pada Gambar 4 dapat dilihat bahwa dalam waktu 1500 hari, jumlah individu yang divaksin nilainya akan menuju 165.460 dan dalam waktu yang tak terhingga nilainya selalu dekat dengan 165.460. Hasil analisis eksistensi titik ekuilib-



Gambar 2: Jumlah sub populasi rentan (S) terhadap waktu (t)



Gambar 3: Jumlah sub populasi *infected* (I) dan *Exposed* (E) terhadap waktu (t)



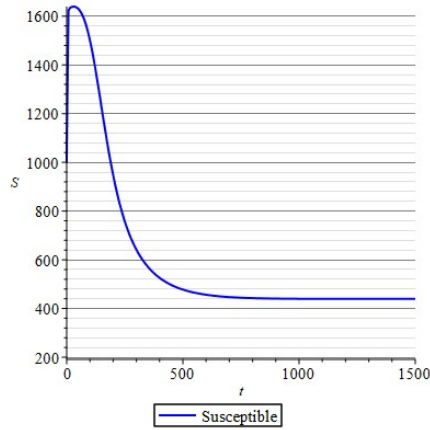
Gambar 4: Jumlah sub populasi vaksinasi (V) terhadap waktu (t)

rium Sistem (3.1) secara analitik diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit, yaitu $\hat{\mathbf{E}}(1447.77, 0, 0, 165460)$.

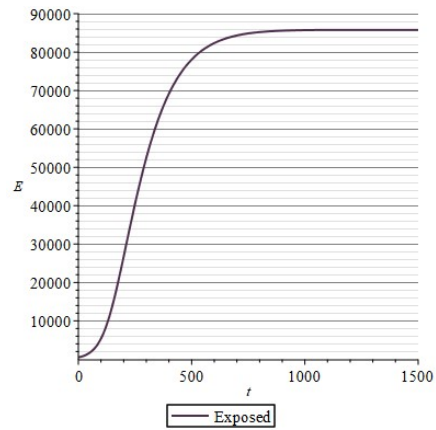
Gambar 2 sampai Gambar 4 menunjukkan bahwa jumlah individu pada setiap sub populasi akan menuju dan mendekati ke nilai $\hat{\mathbf{E}}$. Hal ini berarti jumlah individu setiap sub populasi saat $R_0 < 1$ untuk $t \rightarrow \infty$ akan menuju ke titik ekuilibrium bebas penyakit. Oleh karena itu, titik ekuilibrium bebas penyakit dikatakan stabil asimtotik lokal.

Berikut ini diberikan simulasi numerik kestabilan lokal titik ekuilibrium Sistem (1) untuk kondisi $R_0 > 1$. Proporsi awal masing-masing sub populasi, yaitu $S(0) = 1000$, $E(0) = 500$, $I(0) = 100$ dan $V(0) = 700$. Hasil analisis eksistensi titik ekuilibrium secara analitik diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $\bar{\mathbf{E}}(439.33, 85762.09, 4163.20, 37657.41)$ dan $R_0 = 4,38 > 1$. Dari hasil simulasi numerik diperoleh grafik yang menunjukkan hubungan jumlah sub populasi manusia

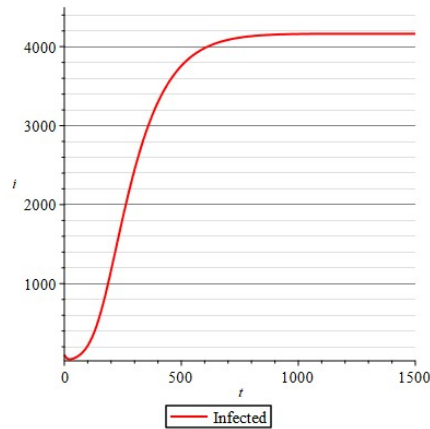
rentan, *exposed*, *infected* dan vaksinasi terhadap variabel waktu sebagai berikut.



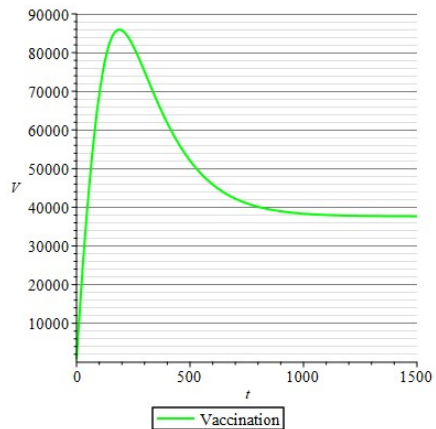
Gambar 5: Jumlah sub populasi rentan (S) terhadap waktu (t)



Gambar 6: Jumlah sub populasi *Exposed* (E) terhadap waktu (t)



Gambar 7: Jumlah sub populasi *Infected* (I) terhadap waktu (t)



Gambar 8: Jumlah sub populasi *Vaksinasi* (V) terhadap waktu (t)

Pada Gambar 7 dapat dilihat bahwa dalam waktu 1500 hari, jumlah individu yang terinfeksi nilainya menuju 4163 dan dalam waktu tak terhingga akan selalu dekat dengan 4163. Hal ini berarti bahwa penyakit akan tetap ada selamanya dan jumlah individu yang terinfeksi mendekati 4163. Kejadian ini terjadi pada saat $R_0 = 4,38 > 1$. Jika diperhatikan Gambar 5 sampai Gambar 8, jumlah individu setiap sub populasi untuk $t \rightarrow \infty$ menuju ke suatu nilai tertentu, yaitu $S \rightarrow 439$, $E \rightarrow 85762$, $I \rightarrow 4163$ dan $V \rightarrow 37657$. Nilai-nilai tersebut merupakan titik ekuilibrium endemik Sistem (3.1), yaitu $\bar{E}(439.33, 85762.09, 4163.20, 37657.41)$. Hal ini berarti bahwa saat $R_0 > 1$ untuk $t \rightarrow \infty$, jumlah individu setiap sub populasi akan menuju ke titik ekuilibrium endemik. Oleh karena itu, titik ekuilibrium endemik dikatakan

stabil asimtotik lokal.

4. Kesimpulan

Hasil analisis dari model ini menunjukkan bahwa terdapat dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium non endemik dan endemik. Berdasarkan hasil analisis eksistensi titik ekuilibrium endemik, didefinisikan parameter *basic reproduction number*, yaitu

$$R_0 = \frac{\Lambda(\mu_4 + \theta)\beta_1}{[(\mu_4 + \theta)(\mu_1 + \alpha) - \theta\alpha](\gamma + \mu_2)} + \frac{\Lambda(\mu_4 + \theta)\beta_2\gamma}{[(\mu_4 + \theta)(\mu_1 + \alpha) - \theta\alpha](\gamma + \mu_2)}$$

Selanjutnya, parameter R_0 merupakan syarat perlu eksistensi dua titik ekuilibrium tersebut sekaligus sebagai syarat perlu penentuan kestabilan lokalnya.

Pada saat bilangan reproduksi dasar kurang dari atau sama dengan satu ($R_0 \leq 1$), hanya terdapat satu (tunggal) titik ekuilibrium bebas penyakit, yaitu $\hat{\mathbf{E}}$. Sebaliknya, pada saat bilangan reproduksi dasar lebih dari satu ($R_0 > 1$), terdapat dua titik ekuilibrium yaitu, $\hat{\mathbf{E}}$ dan titik ekuilibrium endemik, yaitu $\bar{\mathbf{E}}$. Hasil analisis kestabilan lokal menunjukkan bahwa saat bilangan reproduksi dasar kurang dari satu ($R_0 < 1$), titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{E}}$ stabil asimtotik lokal. Hal ini berarti bahwa jika syarat $R_0 < 1$ dipenuhi, maka penyakit tidak akan menyebar untuk waktu yang tak terbatas. Sebaliknya, pada saat bilangan reproduksi dasar lebih dari satu ($R_0 > 1$) titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{E}}$ stabil asimtotik lokal. Hal ini berarti bahwa jika $R_0 > 1$, maka penyakit menyebar (mewabah) dan akan tetap ada dalam populasi di lingkungan berwabah untuk waktu yang tak terbatas. Jumlah masing-masing sub populasi untuk kasus mewabah tersebut adalah sebesar S^* , E^* , I^* , dan V^* . Simulasi numerik yang digambarkan mendukung hasil analisis tersebut.

Daftar Pustaka

- [1] Kermack, W.O., McKendrick, A.G., 1991, Contributions to the mathematical theory of epidemics-I, *Bull. Math. Biol.* Vol. **53** Issues 1 – 2: 33 – 55
- [2] Agarwal, M., Bhadauria, A.S., 2011, Modeling Spread of Polio with the Role of Vaccination, *Applications and Applied Math.* Vol. **6**(2): 552 – 571
- [3] Naveed, M., Baleanu, D., Raza, A., Rafiq, M., Soori, A.H., 2022, Treatment of polio delayed epidemic model via computer simulations, *Comput. Mater. Contin.*, Vol. **70**(2): 3415 – 3431
- [4] Naveed, M., Baleanu, D., Rafiq, M., Raza, A., Soori, A.H., Ahmed, N., 2020, Dynamical behavior and sensitivity analysis of a delayed coronavirus epidemic model, *Comput. Mater. Contin.*, Vol. **65**(1): 225 – 241
- [5] Hussain, T., Ozair, M., Faizan, M., Jameel, S., Nisar, K.S., 2021, Optimal control approach based on sensitivity analysis to retrench the pine wilt disease, *Eur. Phys. J. Plus*, Vol. **136**: 741
- [6] Raza, A., Rafiq, M., Ahmed, N., Khan, I., Nisar, K.S., Iqbal, Z., 2020, A structure preserving numerical method for solution of stochastic epidemic model of smoking dynamics, *Comput. Mater. Contin.*, Vol. **65**(1): 263 – 278
- [7] Kumar, P., Erturk, V.S., Abboubakar, H., Nisar, K.S., 2021, Prediction studies of the epidemic peak of coronavirus disease in Brazil via new generalised Caputo type fractional derivatives, *Alexandria Eng. J.*, Vol. **60**(3): 3189 – 3204

- [8] Ul Abadin Zafar, Z., Rezazadeh, H., Inc, M., Nisar, K.S., Sulaiman, T.A., Yusuf, A., 2021, Fractional order heroin epidemic dynamics, *Alexandria Eng. J.*, Vol. **60**(6): 5157 – 5165
- [9] Arif, M. S., Raza, A., Abodayeh, K., Rafiq, M., Bibi, M., Nazeer, A., 2020, A numerical efficient technique for the solution of susceptible infected recovered epidemic model, *Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol. **124**(2): 477 – 491
- [10] Raza, A., Arif, M.S., Rafiq, M., Bibi, M., Naveed, M., Iqbal, M.U., Butt, Z., Naseem, H.A., Abbasi, J.N, Numerical treatment for stochastic computer virus model, *Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol. **120**(2): 445 – 465
- [11] Shatanawi, W., Raza, A., Arif, M.S., Rafiq, M., Bibi, M., Mohsin, M., 2021, Essential features preserving dynamics of stochastic dengue model, *Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol. **126**(1): 201 – 215
- [12] Biala, T.A., Khaliq, A.Q.M., 2021, A fractional-order compartmental model for the spread of the COVID-19 pandemic, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Vol. **98**: 105764
- [13] Furati, K.M., Sarumi, I. O., Khaliq, A.Q.M., 2021, Fractional model for the spread of COVID-19 subject to government intervention and public perception, *Appl. Math. Model.*, Vol. **95**: 89 – 105
- [14] Mahdy, A.M.S., Sweilam, N.H., Higazy, M., 2020, Approximate solution for solving nonlinear fractional order smoking model, *Alexandria Eng. J.*, Vol. **59**(2): 739 – 752
- [15] Mahdy, A.M.S., Lotfy, K., Hassan, W., El-Bary, A.A., 2021, Analytical solution of magneto-photothermal theory during variable thermal conductivity of a semiconductor material due to pulse heat flux and volumetric heat source, *Waves in Random and Complex Media*, Vol. **31**, (6): 2040 – 2057
- [16] Amer, Y.A., Mahdy, A.M.S., Namoos, H.A.R., 2018, Reduced differential transform method for solving fractional-order biological systems, *J. Eng. Appl. Sci.*, Vol. **13**(20): 8489 – 8493
- [17] Liu, X., Rahman, M. U., Arfan, M., Tchier, F., Ahmad, S., Inc, M., Akinyemi, L., 2022, Fractional Mathematical Modeling to the Spread of Polio with the Role of Vaccination Under Non-Singular Kernel, *Fractals* Vol. **30**(5): 2240144
- [18] Umam, Y.C., Kharis, M., Supriyono, 2016, Model Epidemi SEIV Penyebaran Penyakit Polio pada Populasi Tak-Konstan, *Unnes J. Math.*, Vol. **5**(2): 100 – 107