

REFLEKSI PADA PERMUKAAN HIPERBOLOIDA

CITRA NAULI AL FARIZ, HARIPAMYU*, ZULAKMAL

*Departemen Matematika dan Sains Data,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : citra-naulialfariz10@gmail.com, haripamyu@sci.unand.ac.id, zulakmal@sci.unand.ac.id*

Diterima Direvisi Dipublikasikan

Abstrak. Refleksi pada permukaan hiperboloida dikaji lebih lanjut mengenai langkah-langkah untuk mendapatkan formula refleksi suatu garis pada permukaan hiperboloida yang telah diteliti oleh Sarkar (1997) and Yanzhong (2010). Dilakukan penggambaran sederhana mengenai sinar datang, sinar pantul, dan bidang pantul untuk menemukan nilai dari titik pemetaan pada bidang insidensi di hiperboloida. Kemudian titik tersebut menjadi fokus dari translasi dan rotasi yang dilakukan untuk menemukan fase dari masing-masing sinar. Pada kasus ini, fase dianggap sama sehingga membentuk karakteristik dari sinar yang dipantulkan pada permukaan hiperboloida. Kajian ini mencakup teori garis singgung, transformasi, hiperbola, hiperboloida, refleksi dalam fisika, hukum fisika, dan sinar paraksial. Hasil formulasi yang diperoleh menunjukkan beberapa karakteristik dari refleksi yang dilakukan pada permukaan hiperboloida, yaitu sudut datang sama dengan sudut pantul, jari-jari sinar insidensi dan jari-jari sinar refleksi tidak berubah setelah direfleksikan, serta jari-jari kelengkungan dari bidang yang tegak lurus dengan arah rambatan dipengaruhi oleh sudut pantul γ dan konstanta hiperboloida.

Abstract. Reflection on a hyperboloid has been conducted to obtain the reflection formula for a line on this surface, building on the work of Sarkar (1997) and Yanzhong (2010). A straightforward approach involves plotting the incident ray, reflected ray, and reflected plane to determine the mapping points on the incident ray within the hyperboloid. These mapping points are then used as the focus for translations and rotations to determine the phase of each ray. Assuming the phases are identical, the characteristics of the reflected light on the hyperboloid surface are then derived. This study encompasses a range of theories, including tangents, transformations, hyperbolas, hyperboloids, reflections in physics, physical laws, and paraxial rays. The obtained formulation results reveal several essential characteristics of reflection on a hyperboloid, including the conservation of the angles of incidence and reflection, the maintenance of incident and reflected radii, and the influence of the angle of reflection γ and hyperboloidal constant on the radius of curvature of the plane perpendicular to the direction of propagation.

Kata Kunci: Hiperbola, Refleksi, Sinar

*penulis korespondensi

1. Pendahuluan

Geometri optik adalah ilmu yang mempelajari cahaya tanpa memperhatikan sifat alami dari cahaya itu sendiri [4]. Salah satu bentuk pengaplikasian ilmu tentang cahaya adalah refleksi atau pencerminan. Refleksi dapat terjadi pada permukaan datar maupun permukaan lengkung seperti permukaan hiperboloida. Refleksi pada permukaan hiperboloida menimbulkan tantangan karena permukaan hiperboloida berbeda dengan permukaan datar. Penelitian terkait refleksi pada permukaan hiperboloida memiliki batasan pada diameter sinar yang digunakan. Apabila diameter sinar tidak lebih kecil daripada jari-jari kelengkungan dari permukaan refleksi, akan terjadi dispersi atau penguraian sinar sehingga sinar yang digunakan tidak menyatu [2]. Penelitian yang dilakukan diperoleh berdasarkan penyesuaian jenis amplitudo gelombang sinar insidensi dan refleksi sepanjang permukaan hiperboloida [6].

Refleksi dalam bidang matematika sering dipandang pada bidang dua-dimensi dan dapat membentuk sifat geometri lain seperti translasi dan rotasi [9]. Sementara itu, dalam bidang fisika refleksi umumnya berfokus pada permukaan datar dan telah dikaji mengenai hukum-hukum refleksi seperti sinar insidensi, sinar refleksi, dan bidang refleksi [5]. Beberapa penelitian telah dilakukan terkait perhitungan refleksi sinar Gauss pada permukaan hiperboloida seperti pada [6] dan [11], namun penelitian tersebut terbatas pada syarat konstanta dan menghasilkan persamaan dari sinar yang diperoleh. Penelitian ini akan diperluas untuk membahas hiperboloida lebih umum dan mengenai karakteristik dari pencerminan pada permukaan hiperboloida. Penelitian ini akan memperluas pemahaman mengenai refleksi pada permukaan hiperboloida dan memungkinkan aplikasi lebih lanjut dalam teknologi seperti pemrosesan sinyal dan pengembangan sistem optik.

2. Landasan Teori

2.1. Transformasi

Transformasi terdiri atas refleksi, translasi, dan rotasi [10].

Definisi 2.1. [7] Suatu refleksi pada sebuah garis m memetakan sebarang titik P ke suatu titik P' sedemikian sehingga

- (1) jika $P \in m$, maka $P' = P$,
- (2) jika $P \notin m$, maka m tegak lurus dengan garis $\overline{PP'}$.

Definisi 2.2. [7] Suatu translasi pada bidang adalah transformasi T yang memetakan sebarang titik (x, y) menuju titik $(x+a, y+b)$ dengan a dan b merupakan konstanta.

Definisi 2.3. [3] Untuk merotasikan kurva di bidang- xy pada titik pusat $(0, 0)$ dengan arah rotasi sudut θ berlawanan arah jarum jam, lakukan substitusi berikut.

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ y &\rightarrow -x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$$

2.2. Hiperbola

Definisi 2.4. [1] Bentuk umum hiperbola memiliki persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.1)$$

dengan $b^2 = a^2(e^2 - 1)$, $a > 0$, $e > 1$. Hiperbola memiliki titik fokus $(\pm ae, 0)$ dan direktris $x = \pm \frac{a}{e}$. Hiperbola dapat dijelaskan menggunakan persamaan parameter

$$x = a \sec t, y = b \tan t, \quad (2.2)$$

dengan $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

2.3. Hiperboloida Dua Lembar

Bentuk paling sederhana dari persamaan hiperboloida dua lembar yaitu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (2.3)$$

dengan a, b , dan c bilangan riil selain nol[10].

2.4. Refleksi dalam Fisika

Definisi 2.5. [8] Sudut datang merupakan sudut yang dibentuk antara sinar insidensi dengan garis normal.

Definisi 2.6. [8] Sudut pantul adalah sudut yang dibentuk oleh garis normal dengan sinar refleksi.

Definisi 2.7. [8] Sudut datang sama dengan sudut pantul.

2.5. Gelombang

Persamaan gelombang pada medan potensial f dapat ditulis sebagai berikut.

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0 \quad (2.4)$$

dengan $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ adalah arah rambat medium yang konstan. Dengan melakukan pendekatan terhadap solusi persamaan gelombang tersebut, diperoleh persamaan amplitudo gelombang kompleks (U_i) pada medan di ruang tiga dimensi dengan dua gelombang yang dapat ditulis sebagai berikut

$$U_i(x_i, y_i, z_i) = \tilde{u}_i \exp[-j\Phi(x_i, y_i, z_i)], i = 1, 2 \quad (2.5)$$

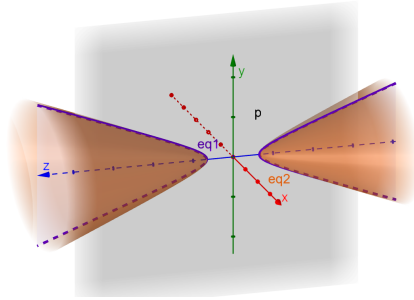
dengan fase Φ_i yang memuat bentuk gelombang insidensi dan refleksi dinyatakan dalam bentuk

$$\Phi_i(x_i, y_i, z_i) = k_i z_i + \frac{k_i}{2} \left(\frac{x_i^2}{q_{S_i}} + \frac{y_i^2}{q_{T_i}} \right) \quad (2.6)$$

dimana k_i arah rambatan gelombang yang konstan, q merupakan parameter gelombang kompleks dengan S_i menunjukkan bidang- xz (*sagittal*) gelombang i dan T_i menunjukkan bidang- yz (*tangential*) gelombang i [6].

3. Pembahasan

Misalkan terdapat suatu hiperboloida dua lembar dengan persamaan (2.3). Dengan menggunakan penampang melintang bidang- yz , jejak pada bidang- yz di hiperboloida dua lembar membentuk kurva hiperbola.



Gambar 1. Hiperboloida dengan penampang melintang bidang- yz

Gambar 1 menunjukkan hiperboloida dua lembar dalam ruang tiga dimensi dengan penampang melintang bidang- yz yang disebut bidang p . Kurva dari jejak bidang p membentuk hiperbola dengan titik pusat di $(0, 0)$ dengan persamaan yang terbentuk yaitu

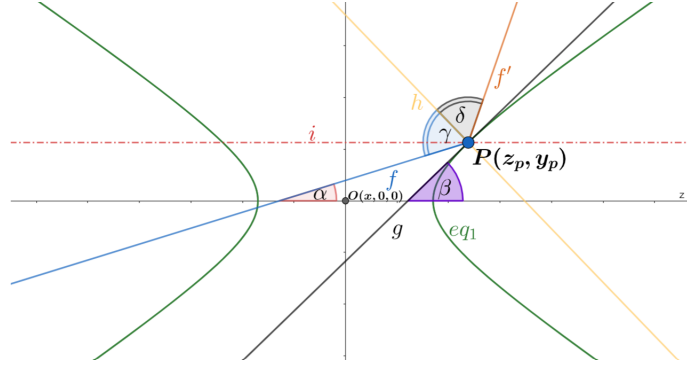
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (3.1)$$

Misalkan hiperboloida adalah permukaan cermin. Suatu sinar insidensi melewati sumbu- z dan menuju permukaan hiperboloida pada titik $P(z_p, y_p)$. Sinar refleksi yang terbentuk dipantulkan kembali dari titik $P(z_p, y_p)$ dan menjauhi permukaan hiperboloida. Agar sinar insidensi tidak bias saat dipantulkan, diasumsikan bahwa jari-jari sinar lebih kecil dibandingkan jari-jari kelengkungan pada titik $P(z_p, y_p)$. Dalam analisis sifat yang dimiliki oleh sinar insidensi dan sinar refleksi, keduanya dianggap berada pada bidang insidensi. Sudut α adalah sudut yang dibentuk oleh garis f terhadap sumbu utama, sedangkan sudut β adalah sudut antara garis g dengan sumbu- z . Sementara itu, sudut datang disimbolkan dengan γ dan sudut pantul disimbolkan dengan δ . Gambar 2 menunjukkan garis $eq1$ sebagai kurva hiperbola, garis f sebagai sinar insidensi yang menuju hiperbola, garis f' sebagai sinar insidensi yang dipantulkan, garis i sebagai garis sejajar dengan sumbu- z , garis g sebagai garis singgung kurva pada titik $P(z_p, y_p)$, dan garis h sebagai garis normalnya.

Persamaan (3.1) dapat dibentuk menjadi persamaan parametrik dengan $y = b \tan t, z = c \sec t$ untuk $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ sehingga persamaan (3.1) di titik $P(z_p, y_p)$ memenuhi persamaan berikut

$$\frac{y_p^2}{b^2} - \frac{z_p^2}{c^2} = -1 \quad (3.2)$$

dengan parameter $y_p = b \tan t_1, z_p = c \sec t_1$ untuk suatu $t_1 \in t$.



Gambar 2. sinar insidensi, sinar refleksi, garis singgung, dan garis normal pada hiperbola

Kemiringan garis singgung di titik $P(z_p, y_p)$ pada hiperbola dihitung dengan menggunakan $\frac{y'(t)}{z'(t)} = \frac{y'_p(t_1)}{z'_p(t_1)}$ sehingga kemiringan garis singgung kurva di titik $P(z_p, y_p)$ adalah

$$\frac{y'_p(t_1)}{z'_p(t_1)} = \frac{b^2 z_p}{c^2 y_p}. \quad (3.3)$$

Besar sudut β juga dapat dihitung dengan menggunakan sudut α sehingga menghasilkan persamaan berikut.

$$\beta = \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \quad (3.4)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.3), maka tangen sudut β pada titik P berdasarkan persamaan (3.3) dan persamaan (3.4) dapat dihitung sebagai berikut.

$$\tan \beta = \tan\left[\alpha + \frac{\pi}{2} - \gamma\right] = \frac{b^2 z_p}{c^2 y_p} \quad (3.5)$$

Nilai β berada pada selang $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sehingga $\iff 0 < \gamma - \alpha < \pi$
Dari persamaan (3.5) diperoleh

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{b^2}{c^2} z_p \frac{1}{\tan[\alpha + (\frac{\pi}{2} - \gamma)]} \\ &= \frac{b^2}{c^2} z_p \tan(\gamma - \alpha) \end{aligned}$$

dan

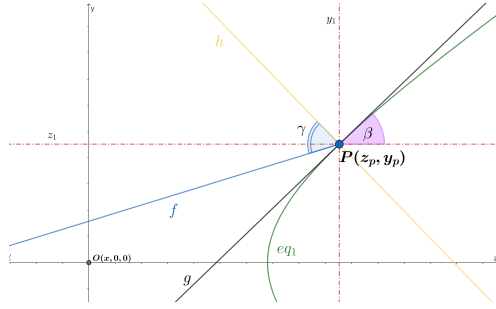
$$\begin{aligned} z_p^2 &= c^2 + c^2 \frac{y_p^2}{b^2} \\ \iff z_p^2 &= c^2 + \frac{b^2}{c^2} z_p^2 \tan^2(\gamma - \alpha) \\ \iff z_p^2 [1 - \frac{b^2}{c^2} \tan^2(\gamma - \alpha)] &= c^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z_p = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2} \tan^2(\gamma - \alpha)}} \approx \frac{c}{1} = c$$

Substitusikan z_p dan gunakan pendekatan paraksial yang membuat $\alpha \approx 0$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{b^2}{c^2} z_p \tan(\gamma - \alpha) \\ &= \frac{b^2}{c^2} c \tan(\gamma - \alpha) \\ &\approx K_y \tan(\gamma) \end{aligned}$$

dengan konstanta $K_y = \frac{b^2}{c}$.



Gambar 3. Translasi sistem koordinat

Selanjutnya, dilakukan translasi dari sistem koordinat (x, y, z) menjadi sistem koordinat (x_1, y_1, z_1) gelombang insidensi seperti pada Gambar 3.

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 + y_p = y_1 + K_y \tan(\gamma) \\ z &= z_1 + z_p = z_1 + c \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sistem persamaan dari permukaan hiperboloida dengan sistem koordinat (x_1, y_1, z_1) pada sistem persamaan (3.6) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(y_1 + K_y \tan(\gamma))^2}{b^2} - \frac{(z_1 + c)^2}{c^2} = -1 \quad (3.7)$$

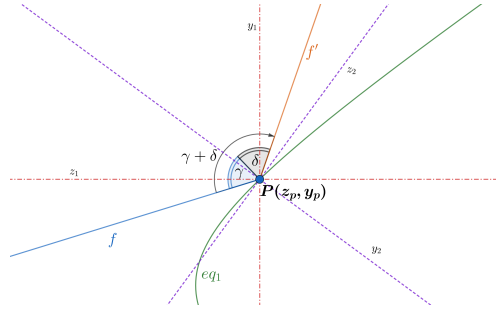
Kemudian berdasarkan persamaan (3.7) akan dicari solusi untuk z_1 dengan keakuratan perhitungan hingga orde pertama pada $\tan \gamma$ dan orde kedua pada variabel transversal x_1, y_1 .

$$\begin{aligned} &\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(y_1 + K_y \tan(\gamma))^2}{b^2} - \frac{(z_1 + c)^2}{c^2} = -1 \\ \Leftrightarrow &\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{2y_1 K_y \tan(\gamma)}{b^2} + \frac{K_y^2 \tan^2(\gamma)}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} - \frac{2z_1 c}{c^2} - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{2y_1 \tan(\gamma)}{c} = \frac{2z_1}{c} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x_1^2}{2K_x} + \frac{y_1^2}{2K_y} + y_1 \tan(\gamma) = z_1 \end{aligned}$$

Kemudian dicari fase dari gelombang insidensi ($i = 1$) dengan mensubstitusikan persamaan z_1 ke dalam persamaan (2.6).

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, y_1, z_1) &= k_1 z_1 + \frac{k_1}{2} \left(\frac{x_1^2}{q_{S_1}} + \frac{y_1^2}{q_{T_1}} \right) \\ \Leftrightarrow \quad \phi_1(x_1, y_1) &= k_1 \left(y_1 \tan(\gamma) + \frac{x_1^2}{2K_x} + \frac{y_1^2}{2K_y} \right) + \frac{k_1}{2} \left(\frac{x_1^2}{q_{S_1}} + \frac{y_1^2}{q_{T_1}} \right) \\ &= k_1 y_1 \tan(\gamma) + \frac{k_1 x_1^2}{2} \left(\frac{1}{K_x} + \frac{1}{q_{S_1}} \right) + \frac{k_1 y_1^2}{2} \left(\frac{1}{K_y} + \frac{1}{q_{S_1}} \right) \end{aligned}$$



Gambar 4. Transformasi garis f menjadi garis f'

Selanjutnya akan ditentukan sistem koordinat (x_2, y_2, z_2) gelombang refleksi dengan merotasi sistem koordinat (x_1, y_1, z_1) gelombang insidensi seperti yang terlihat pada Gambar 4.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ y_2 &= -y_1 \cos(\gamma + \delta) - z_1 \sin(\gamma + \delta) \\ z_2 &= y_1 \sin(\gamma + \delta) - z_1 \cos(\gamma + \delta) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dengan menggunakan z_1 , persamaan (3.8) dan (2.6), diperoleh fase kompleks 2 sebagai berikut.

$$\Phi_2(x_2, y_2, z_2) = k_2 z_2 + \frac{k_2}{2} \left(\frac{x_2^2}{q_{S_2}} + \frac{y_2^2}{q_{T_2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= k_2 y_1 \sin(\gamma + \delta) - k_2 z_1 \cos(\gamma + \delta) + \frac{k_2}{2} \frac{x_1^2}{q_{S_2}} + \\
&\quad \frac{k_2}{2} \frac{y_1^2 \cos^2(\gamma + \delta) + z_1^2 \sin^2(\gamma + \delta)}{q_{T_2}} + \\
&\quad \frac{k_2}{2} \frac{2y_1 z_1 \cos(\gamma + \delta) \sin(\gamma + \delta)}{q_{T_2}} \\
\Longleftrightarrow \quad \phi_2(x_1, y_1) &= k_2 y_1 \frac{\sin \delta}{\cos \gamma} + \frac{k_2 x_1^2}{2} \left[\frac{1}{q_{S_2}} - \frac{\cos(\gamma + \delta)}{K_x} \right] + \\
&\quad \frac{k_2 y_1^2}{2} \left[\frac{1}{q_{T_2}} - \frac{\cos(\gamma + \delta)}{K_y} \right]
\end{aligned}$$

Karena fase lintang dari gelombang insidensi dan refleksi berada tepat pada permukaan hiperboloida, diperoleh persamaan

$$\phi_1(x_1, y_1) = \phi_2(x_2, y_2) \quad (3.9)$$

yang kemudian akan didapatkan hubungan yang penting antara parameter q_i .

Dilakukan penyamaan koefisien y_1 , x_1^2 , dan y_1^2 dengan menggunakan persamaan $\phi_1(x_1, y_1)$, $\phi_2(x_1, y_1)$, dan (3.9) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

a. Pada koefisien y_1

$$\begin{aligned}
&k_1 \tan \gamma = k_2 \frac{\sin \delta}{\cos \gamma} \\
\Longleftrightarrow \quad &\sin \gamma = \sin \delta \\
\Longleftrightarrow \quad &\gamma = \delta
\end{aligned}$$

b. Pada koefisien x_1^2

$$\begin{aligned}
&\frac{k_1}{2} \left(\frac{1}{K_x} + \frac{1}{q_{S_1}} \right) = \frac{k_2}{2} \left[\frac{1}{q_{S_2}} - \frac{\cos(\gamma + \delta)}{K_x} \right] \\
\Longleftrightarrow \quad &\frac{1}{q_{S_2}} = \frac{1}{q_{S_1}} + \frac{\cos(\gamma + \delta) + 1}{K_x} \\
\Longleftrightarrow \quad &\frac{1}{q_{S_2}} = \frac{1}{q_{S_1}} + \frac{2 \cos^2 \gamma}{K_x}
\end{aligned}$$

c. Pada koefisien y_1^2

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad &\frac{k_1}{2} \left(\frac{1}{K_y} + \frac{1}{q_{S_1}} \right) = \frac{k_2}{2} \left[\frac{1}{q_{T_2}} - \frac{\cos(\gamma + \delta)}{K_y} \right] \\
\Longleftrightarrow \quad &\frac{1}{q_{T_2}} = \frac{1}{q_{T_1}} + \frac{\cos(\gamma + \delta) + 1}{K_y} \\
\Longleftrightarrow \quad &\frac{1}{q_{T_2}} = \frac{1}{q_{T_1}} + \frac{2 \cos^2 \gamma}{K_y}
\end{aligned}$$

Kemudian diterapkan relasi $\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - j \left(\frac{\lambda}{\pi w^2} \right)$ pada persamaan koefisien x_1^2 dan y_1^2 sehingga persamaan tersebut dapat ditulis berdasarkan bidang- xz (bidang *sagittal*) dan bidang- yz (bidang *tangential*) sebagai berikut.

a. Bidang *sagittal*

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{S_2}} &= \frac{1}{q_{S_1}} + \frac{2 \cos^2 \gamma}{K_x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{R_{S_2}} - j \left(\frac{\lambda}{\pi w_{S_2}^2} \right) &= \frac{1}{R_{S_1}} - j \left(\frac{\lambda}{\pi w_{S_1}^2} \right) + \frac{2 \cos^2 \gamma}{K_x} \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{S_2}} &= \frac{1}{R_{S_1}} + \frac{2 \cos^2 \gamma}{K_x} \\ - \left(\frac{\lambda}{\pi w_{S_2}^2} \right) &= - \left(\frac{\lambda}{\pi w_{S_1}^2} \right) \Leftrightarrow w_{S_2} = w_{S_1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

b. Bidang *tangential*

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{T_2}} &= \frac{1}{q_{T_1}} + \frac{2 \cos^2 \gamma}{K_y} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{R_{T_2}} - j \left(\frac{\lambda}{\pi w_{T_2}^2} \right) &= \frac{1}{R_{T_1}} - j \left(\frac{\lambda}{\pi w_{T_1}^2} \right) + \frac{2 \cos^2 \gamma}{K_y} \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{T_2}} &= \frac{1}{R_{T_1}} + \frac{2 \cos^2 \gamma}{K_y} \\ - \left(\frac{\lambda}{\pi w_{T_2}^2} \right) &= - \left(\frac{\lambda}{\pi w_{T_1}^2} \right) \Leftrightarrow w_{T_2} = w_{T_1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Berdasarkan analisis yang telah dijelaskan di atas, diperoleh sistem persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \gamma &= \delta \\ \frac{1}{R_{S_2}} &= \frac{1}{R_{S_1}} + \frac{2 \cos^2 \gamma}{K_x} \\ w_{S_2} &= w_{S_1} \\ \frac{1}{R_{T_2}} &= \frac{1}{R_{T_1}} + \frac{2 \cos^2 \gamma}{K_y} \\ w_{T_2} &= w_{T_1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

dengan sudut insidensi γ , sudut refleksi δ , parameter R sebagai jari-jari kelengkungan dari bidang yang tegak lurus dengan arah rambatan, parameter w sebagai jari-jari gelombang, konstanta K pada variabel x dan y , indeks S menunjukkan bidang *sagittal* dari sinar insidensi (1) dan sinar refleksi (2), dan indeks T menunjukkan bidang *tangential* dari sinar insidensi (1) dan sinar refleksi (2).

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil di atas, didapatkan beberapa karakteristik dari refleksi pada permukaan hiperboloida sebagai berikut.

- (1) Sudut datang dan sudut pantul sama besar. Refleksi pada permukaan hiperboloida memiliki kesamaan dengan refleksi pada cermin datar, karena keduanya mengikuti hukum refleksi yang sama. Hukum refleksi menyatakan bahwa sudut datang sama dengan sudut pantul, yang berarti gelombang yang datang pada sudut tertentu akan dipantulkan pada sudut yang sama ketika memantul pada permukaan hiperboloida atau cermin datar.
- (2) Jari-jari sinar insidensi dan jari-jari sinar refleksi tidak berubah setelah direfleksikan. Dengan menggunakan asumsi bahwa sinar insidensi lebih kecil daripada jari-jari kelengkungan hiperboloida, setelah suatu sinar direfleksikan pada permukaan hiperboloida, jari-jari sinar insidensi dan jari-jari sinar refleksi akan tetap sama. Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa permukaan hiperboloida tidak mengubah besar jari-jari sinar setelah dipantulkan.
- (3) Jari-jari kelengkungan dari bidang yang tegak lurus dengan arah rambatan pada bidang *sagittal* dan pada bidang *tangential* dipengaruhi oleh sudut pantul γ dan konstanta hiperboloida pada masing-masing bidang.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terimakasih banyak kepada Bapak Efendi, Ibu Des Welyyanti, dan Bapak Admi Nazra yang telah membantu memberikan saran kritikan dan masukan kepada penulis sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Brannan, D. A., Esplen M. F., Gray J. J., 2012, *Geometry, Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge
- [2] Bueche, F. J., 1989, *Theory and Problem of COLLEGE PHYSICS, 8th edition*, McGraw Hill, New York
- [3] Corral, M., 2020, *Elementary Calculus*, GNU Free Documentation License
- [4] Ewart, P., 2007, *Optics*, University of Oxford, Inggris
- [5] Freeman, M.H., Hull C.C., Charman W.N., 2003, *Optics*, Edisi ke-11, Butterworth-Heinemann, London
- [6] Gangopadhyay S., Sarkar S., 1997, ABCD Matrix for Reflection and Refraction of Gaussian Light Beams at Surfaces of Hyperboloid of Revolution and Efficiency Computation for Laser Diode to Single-Mode Fiber Coupling by Way of a Hyperbolic Lens on The Fiber Tip. *Applied Optic*, Vol. 36 (**33**) : 8582-8586.
- [7] Jurgensen, R. C., Brown R. G., Jurgensen J. W., 2000, *Geometry*, Houghton Mifflin Company, Boston
- [8] Murtono, 2015, Analisis Representasi Gambar dalam Menyelesaikan Permasalahan Pemantulan dan Pembiasan bagi Mahasiswa Program Studi Pendidikan Fisika, *Jurnal Inovasi dan Pembelajaran Fisika*, Vol. 3(**1**):47-51
- [9] Ryan, Patrick J. 1986. *Euclidean and Non – Euclidean Geometry: An Analytic Approach*. Cambridge University Press, USA.

- [10] Varberg, D. E., E. J. Purcell, dan Rigdon S. E., 2007, *Kalkulus*, Edisi ke-2 Jilid 2, Penerbit Erlangga, Jakarta
- [11] Yu, Y.Z., Dou, W.B., 2010, Reflection and Refraction of Gaussian Beams on The Interface of an Elliptical Hyperboloid, *Proceedings of the 9th International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory*, 777-779.