

SIMULASI PERMASALAHAN BENDA JATUH DALAM KALKULUS KUANTUM

KISTOSIL FAHIM*, DZAKY MUHAMMAD, MAHMUD YUNUS, I GUSTI NGURAH RAI
USADHA, SUNARSINI, SADJIDON

*Departmen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh
Nopember, Kampus ITS Sukolilo-Surabaya 60111, Indonesia
email : kfahim@matematika.its.ac.id, ddzky.mhmmmd@gmail.com,
{yunusm, usadha, sunarsini, djidon}@matematika.its.ac.id*

Diterima 22 Juli 2023 Direvisi 11 September 2023 Dipublikasikan 31 Januari 2024

Abstrak. Kalkulus yang konvensional menggunakan konsep limit dan menjadikannya sebagai hal yang fundamental. Berbeda dengan kalkulus kuantum, kalkulus- q menyanggah konsep identik dengan apa yang ada pada kalkulus biasa, namun tanpa menggunakan limit. Sebagai gantinya kalkulus- q mendefinisikan ulang apa yang ada pada kalkulus biasa dengan penggunaan bilangan q sedemikian sehingga jika $q \rightarrow 1$, maka akan menyerupai dengan versi yang terdapat pada kalkulus biasa. Pada paper ini kalkulus- q akan diterapkan pada model fisika benda jatuh yang bermulakan mengganti suku-suku versi klasik pada model sehingga diperoleh persamaan diferensial- q , dilanjut menemukan penyelesaian secara analitik hingga mendapatkan persamaan kecepatan dan jarak vertikal berparameterkan q . Terakhir dilakukan simulasi dengan tujuan untuk membandingkan perilaku dari penyelesaian persamaan versi- q terhadap versi klasiknya. Penyelesaian persamaan yang didapatkan memuat suku eksponensial- q . Oleh karena itu, pendekatan dilakukan secara numerik yang mana menggunakan deret Taylor- q dari eksponensial- q dengan suku-suku berhingga. Dengan ini terdapat dua parameter, yaitu suku jumlahan deret Taylor n dan parameter q yang nilainya akan diubah secara bergantian dan diamati. Hasil yang didapatkan menyatakan bahwa semakin besar nilai n dan semakin dekat nilai q dengan satu, maka grafik yang diperoleh akan mendekati versi klasiknya.

Abstract. Conventional calculus employs the concept of limits and regards it as fundamental. Quantum calculus, which is known as q -calculus, presents concepts identical to those in regular calculus but without employing limits. Instead, q -calculus redefines what exists in regular calculus using the q number so that if $q \rightarrow 1$, it closely resembles the version found in traditional calculus. In this paper, q -calculus will applied to the physics model of falling objects, initially replacing the classical terms in the model to derive q -differential equations. This approach is then extended to find analytical solutions, obtaining equations for velocity and vertical displacement parameterized by q . Finally, simulations are conducted with the aim of comparing the behavior of the q -version equation solutions with their classical counterparts. The solutions obtained involve q -exponential terms. Consequently, a numerical approach is adopted, utilizing q -Taylor series expansions of the q -exponential with finite terms. It introduces two parameters: the number of terms in the Taylor series, denoted as n , and the q -parameter,

*penulis korespondensi

which is systematically varied and observed. The results obtained indicate that as the value of n increases and as the value of q approaches one, the resulting graph approaches the behavior of its classical version.

Kata Kunci: Exact solution, Falling body problem, q -Calculus, q -Differential equation, q -Series, Simulation

1. Pendahuluan

Kalkulus merupakan sebuah cabang dari ilmu matematika yang mempelajari tentang perubahan. Limit merupakan hal yang fundamental di dalam kalkulus, dan merupakan sebuah pendekatan dari nilai suatu fungsi jika variabel bebas yang dimuatnya menuju ke satu nilai tertentu. Melalui limit, muncul konsep-konsep lain yang menjadi inti utama dalam kalkulus, yaitu turunan dan integral. Kalkulus telah dikenal memiliki banyak penerapan dalam dunia nyata, salah satunya adalah untuk memodelkan kejadian nyata ke dalam bentuk persamaan matematika dan dari persamaan yang dihasilkan dapat diamati perilaku sebagaimana bentuk representasi dari kejadian yang aslinya.

Seperti yang telah dikenal peranan limit dalam kalkulus adalah hal yang fundamental. Akan tetapi, adapun cabang ilmu yang serupa dengan kalkulus namun tidak menggunakan konsep limit sebagai dasarnya, cabang ilmu tersebut dikenal sebagai kalkulus kuantum atau q -calculus. Sedikit sejarah mengenai kalkulus kuantum, pada abad ke-18 Euler mendapatkan rumusan dasar dalam kalkulus kuantum. Kemudian Jackson telah mengenalkan gagasan dari q -derivative dan q -integral [1]. Saat ini, banyak hasil menarik dalam bidang penelitian kalkulus kuantum diperkenalkan oleh beberapa penulis dalam literatur [2,3,4,5,6,7].

Pada kesempatan ini, kalkulus kuantum akan diterapkan untuk mendapatkan solusi numerik dari benda jatuh bebas dimana nantinya persamaan differensial klasik ditransformasikan ke dalam bentuk analog kuantumnya dan dari apa yang telah diperoleh akan dicari solusinya serta simulasi untuk mengetahui perilaku dari hasil yang telah didapatkan. Masalah ini juga telah diselidiki oleh beberapa penulis [8,9,10,11,12] menggunakan berbagai definisi dalam kalkulus pecahan.

2. Landasan Teori

Kalkulus kuantum merupakan perluasan dari kalkulus yang dikenal sebelumnya. Kalkulus- q mendefinisikan ulang apa yang terdapat pada kalkulus klasik, namun tanpa menggunakan konsep limit. Sebagai gantinya digunakan bilangan q yang apabila nilainya semakin mendekati satu, maka objek-objek matematika yang bersangkutan akan serupa dengan objek matematika yang ada pada versi klasiknya [13]. Berikut adalah beberapa definisi serta akibat yang muncul untuk dijadikan acuan dalam proses penurunan persamaan.

Pada Definisi 2.1 diberikan definisi q -diferensial dan q -derivative.

Definisi 2.1. [14] Untuk sebarang fungsi $f(t)$, q -diferensial dari $f(t)$ adalah:

$$d_q f(t) = f(t) - f(qt). \quad (2.1)$$

Lebih lanjut, q -derivative dari $f(t)$ didefinisikan sebagai:

$$D_q f(t) = \frac{d_q f(t)}{d_q t} = \frac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t}, \quad t \neq 0 \text{ dan } q \neq 1, \quad (2.2)$$

sedemikian sehingga:

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(t) = f'(t), \quad (2.3)$$

apabila f terdiferensial pada t , dan ketika $t = 0$ yang kita punya adalah:

$$D_q f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} D_q f(t). \quad (2.4)$$

Berikut diberikan salah satu fungsi yang sering diperlukan untuk diketahui tu-runannya.

Akibat 2.2. Berdasarkan (2.2) didapatkan:

$$D_q t^n = [n]_q t^{n-1}, \quad (2.5)$$

dimana

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (2.6)$$

Di sini $[n]_q$ disebut sebagai analog- q dari sebarang bilangan n .

Bukti. Berdasarkan definisi dari q -derivative didapatkan

$$D_q t^n = \frac{t^n - (qt)^n}{(1-q)t} = \frac{(1 - q^n)}{(1-q)} t^{n-1} = [n]_q t^{n-1}. \quad \square$$

Selanjutnya, diberikan definisi dari q -analog dari fungsi eksponensial. Fungsi ini yang sering digunakan dalam makalah ini.

Definisi 2.3. [14] Berikut didefinisikan q -analog dari fungsi eksponensial (dino-tasikan $e_q(t)$):

$$e_q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{[j]_q!}, \quad (2.7)$$

dimana:

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q \times [n-1]_q \times \cdots \times [3]_q \times [2]_q \times [1]_q, & n \in \mathbb{N}, \\ 1, & n = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

Notasi $[n]_q!$ menyatakan q -analog dari faktorial.

Dalam makalah ini akan dibahas mengenai persamaan q -diferensial. Oleh karena itu diperlukan definisi dari q -integral. Berikut diberikan beberapa definisi dan akibat, yang dalam kalkulus klasik disebut sebagai teorema fundamental kalkulus pertama. Lebih lanjut, diberikan akibat yang isinya adalah integral dari fungsi q -eksponensial.

Definisi 2.4. [1] Berikut adalah definisi q -integral tertentu (juga dikenal sebagai integral Jackson) dari fungsi f :

$$\int_0^x f(t) d_q t = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x). \quad (2.9)$$

Akibat 2.5. Berdasarkan (2.2) dan (2.9) didapatkan:

$$\int_0^x D_q f(t) d_q t = f(x) - f(0).$$

Bukti. Perhatikan jumlahan berhingga berikut

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} f(q^j x) - f(q^{j+1} x) &= f(x) - f(qx) + f(qx) - f(q^2 x) + \cdots + f(q^{n-1} x) - f(q^n x) \\ &= f(x) - f(q^n x), \end{aligned}$$

sehingga

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(q^j x) - f(q^{j+1} x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(q^j x) - f(q^{j+1} x) = f(x) - f(0). \quad (2.10)$$

Selanjutnya, tinjau bahwa

$$\begin{aligned} \int_0^x D_q f(t) d_q t &= (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j D_q f(q^j x) \\ &= (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{f(q^j x) - f(q^{j+1} x)}{(1-q)q^j x} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j x) - f(q^{j+1} x). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan (2.10) diperoleh $\int_0^x D_q f(t) d_q t = f(x) - f(0)$. $\square$

Definisi 2.6. [1] q -integral taktentu Jackson dari fungsi q -exponensial $e_q(\alpha t)$ diberikan sebagai berikut.

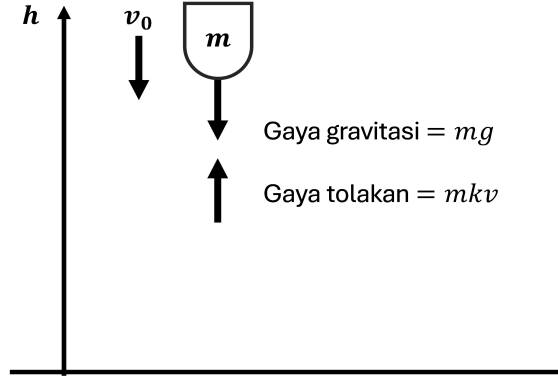
$$\int e_q(\alpha t) d_q t = \frac{1}{\alpha} e_q(\alpha t) + c, \quad (2.11)$$

dimana c adalah konstanta bilangan real.

3. Pembahasan

3.1. Analog- q Model Permasalahan Benda Jatuh

Tinjau sebuah objek dengan massa m sedang bergerak jatuh ke bawah dengan kecepatan awal v_0 dari ketinggian h dalam medan gravitasi yang konstan sebesar g . Fenomena tersebut digambarkan melalui diagram gerak pada Gambar 1 sebagai berikut.



Gambar 1. Diagram gerak benda jatuh bebas

Berdasarkan Gambar 1, persamaan gerak benda jatuh bebas versi diberikan oleh:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - mkv, \quad (3.1)$$

dimana k adalah konstanta positif. Keadaan awal diberikan dengan:

$$v(0) = v_0, \quad z(0) = h, \quad (3.2)$$

dimana $z(t)$ adalah jarak vertikal dari objek pada sebarang waktu t dan

$$\frac{dz(t)}{dt} = v(t). \quad (3.3)$$

Persamaan (3.1) didiskritisasi menggunakan analog- q yang dinotasikan sesuai pada Definisi 2.1, sehingga didapatkan:

$$\frac{d_q v}{d_q t} = -g - kv, \quad q \in (0, 1], \quad (3.4)$$

merupakan analog- q dari model permasalahan benda jatuh.

3.2. Penyelesaian Analitik

Untuk mencari penyelesaian dari persamaan (3.4), asumsikan penyelesaiannya berbentuk deret kuasa :

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \quad (3.5)$$

Oleh karena itu, berdasarkan Akibat 2.2, diperoleh:

$$\frac{d_q v}{d_q t} = \sum_{n=1}^{\infty} [n]_q a_n t^{n-1} \quad (3.6)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [n+1]_q a_{n+1} t^n. \quad (3.7)$$

Substitusikan (3.5) dan (3.7) ke dalam (3.4) menghasilkan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n+1]_q a_{n+1} t^n = -g - k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (3.8)$$

$$[1]_q a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [n+1]_q a_{n+1} t^n = -g - k a_0 - k \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n. \quad (3.9)$$

Diperoleh:

$$a_1 = \frac{-g - k a_0}{[1]_q}, \text{ dan } a_{n+1} = \frac{-k a_n}{[n+1]_q}, \quad n \geq 1. \quad (3.10)$$

Berdasarkan (3.10) diperoleh:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-k a_1}{[2]_q} = \frac{(-1)^2 k g + (-k)^2 a_0}{[2]_q [1]_q}, \\ a_3 &= \frac{-k a_2}{[3]_q} = \frac{(-1)^3 k^2 g + (-k)^3 a_0}{[3]_q [2]_q [1]_q}, \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{(-1)^n k^{n-1} g + (-k)^n a_0}{[n]_q \cdots [4]_q [3]_q [2]_q [1]_q}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Diperoleh lema berikut yang memberikan suku ke- n .

Lema 3.1. Misal a_n , untuk $n = 1, 2, \dots$, yang memenuhi (3.10) dan (3.11). Maka didapatkan

$$a_n = \frac{(-1)^n k^{n-1} g + (-k)^n a_0}{[n]_q!}, \quad n \geq 1. \quad (3.12)$$

Bukti. Tinjau kasus dasar untuk $n = 1$, diperoleh:

$$a_1 = \frac{(-1)^1 k^0 g + (-k)^1 a_0}{[1]_q!} = \frac{-g - k a_0}{[1]_q}.$$

Selanjutnya, asumsikan persamaan (3.12) benar untuk $n = m$, dimana

$$a_m = \frac{(-1)^m k^{m-1} g + (-k)^m a_0}{[m]_q!}.$$

Dengan mengalikan $-k/[m+1]_q$ pada masing-masing ruas, didapat

$$\frac{-k a_m}{[m+1]_q} = \frac{(-1)^{m+1} k^m g + (-k)^{m+1} a_0}{[m+1]_q!} = a_{m+1}. \quad \square$$

Dari apa yang telah didapat pada (3.12), fungsi untuk kecepatan sesaat adalah

$$\begin{aligned} v(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n k^{n-1} g + (-k)^n a_0}{[n]_q!} \right] t^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(g/k)(-kt)^n + (-kt)^n a_0}{[n]_q!} \right], \end{aligned}$$

yang mana dapat ditulis sebagai

$$v(t) = a_0 + \left(\frac{g}{k} + a_0\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-kt)^n}{[n]_q!}. \quad (3.13)$$

Dengan menggunakan Definisi 2.3 akan menjadi

$$v(t) = a_0 + \left(\frac{g}{k} + a_0\right) (e_q(-kt) - 1). \quad (3.14)$$

Berdasarkan kondisi awal yang terdapat pada persamaan (3.2), maka $a_0 = v_0$ sehingga $v(t)$ menjadi:

$$v(t) = v_0 + \left(\frac{g}{k} + v_0\right) (e_q(-kt) - 1), \quad (3.15)$$

atau dapat disederhanakan ke dalam bentuk:

$$v(t) = -\frac{g}{k} + \left(\frac{g}{k} + v_0\right) e_q(-kt). \quad (3.16)$$

Jarak vertikal $z(t)$ dalam kalkulus kuantum dapat diperoleh melalui:

$$D_q z(t) = -\frac{g}{k} + \left(\frac{g}{k} + v_0\right) e_q(-kt), \quad (3.17)$$

dimana terdapat sebuah hubungan $v(t) = D_q z(t)$. Dengan mengintegrasikan (3.17) sebagai berikut:

$$\int_0^t D_q z(\tau) d_q \tau = \int_0^t \left(-\frac{g}{k}\right) d_q \tau + \left(\frac{g}{k} + v_0\right) \int_0^t e_q(-k\tau) d_q \tau, \quad (3.18)$$

berdasarkan Akibat 2.5 dan Definisi 2.6 secara bersamaan akan menghasilkan:

$$z(t) - z(0) = -\frac{g}{k} \left[\frac{\tau}{[1]_q}\right]_0^t + \left(\frac{g}{k} + v_0\right) \left[-\frac{e_q(-k\tau)}{k}\right]_0^t, \quad (3.19)$$

atau

$$z(t) = h - \frac{g}{k} \left(\frac{t}{[1]_q}\right) + \left(\frac{g}{k} + v_0\right) \left(-\frac{e_q(-kt)}{k} - \frac{1}{k}\right), \quad (3.20)$$

sederhananya dapat ditulis sebagai:

$$z(t) = h - \frac{gt}{k} + \frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} + v_0\right) (1 - e_q(-kt)). \quad (3.21)$$

Penyelesaian eksak (3.16) dan (3.21) akan tereduksi menjadi penyelesaian versi klasik pada mekanika Newton sesuai yang terdapat pada [15] ketika $q \rightarrow 1$. Hal ini mengarah ke pembahasan berikutnya.

3.3. Analisis dan Aplikasi

Pertama-tama, pandang bahwa penyelesaian yang terdapat pada (3.16) dan (3.21), ketika $q \rightarrow 1$ fungsi eksponensial $e_q(-kt)$ akan berubah menjadi fungsi eksponensial biasa e^{-kt} , sehingga (3.16) menjadi:

$$v(t) = -\frac{g}{k} + \left(\frac{g}{k} + v_0\right) e^{-kt}, \quad (3.22)$$

yang mana merupakan bentuk analitik untuk kecepatan dalam versi klasiknya, dan jarak vertikal pada (3.21) menjadi:

$$z(t) = h - \frac{gt}{k} + \frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} + v_0 \right) (1 - e^{-kt}), \quad (3.23)$$

yang mana ini merupakan penyelesaian eksak dari permasalahan benda jatuh bebas. Sebagai tambahan, apabila dalam kasus tanpa adanya gesekan udara atau dengan kata lain parameter k hilang, didapatkan dari 3.22 bahwa:

$$\begin{aligned} v(t)|_{k \rightarrow 0} &= \lim_{k \rightarrow 0} \left[v_0 e^{-kt} + g \left(\frac{e^{-kt} - 1}{k} \right) \right] \\ &= v_0 + g \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-kt} - 1}{k} \right) \\ &= v_0 + g \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{-te^{-kt}}{1} \right) \\ &= v_0 - gt. \end{aligned}$$

Pada jarak vertikal pada persamaan (3.23) dalam keadaan tanpa adanya kehadiran gesekan udara akan menjadi:

$$\begin{aligned} z(t)|_{k \rightarrow 0} &= h + \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{-gtk + (g + kv_0)(1 - e^{-kt})}{k^2} \right] \\ &= h + \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{v_0 - gt + [(g + kv_0)t - v_0]e^{-kt}}{2} \right] \\ &= h + \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{-[(g + kv_0)t - v_0]te^{-kt} + v_0te^{-kt}}{2} \right] \\ &= h + \left(\frac{-(gt - v_0)t + v_0t}{2} \right) \\ &= h + v_0t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Jika diperhatikan kedua persamaan tersebut sesuai dengan persamaan dari kecepatan vertikal dan jarak vertikal dari mekanika newton klasik tanpa kehadiran gesekan udara.

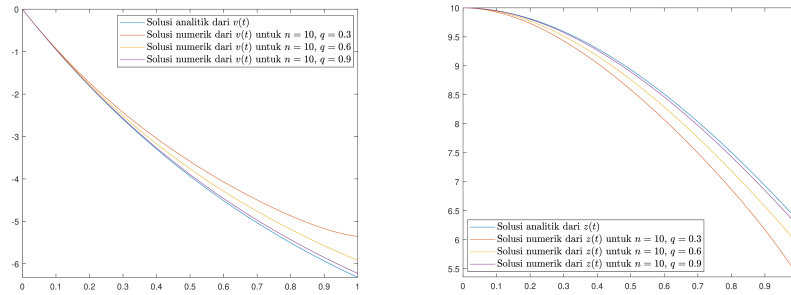
4. Simulasi

Pada bagian ini, akan dilihat apakah (3.16) dan (3.21) akan mendekati nilai dari solusi eksak (3.1) dan (3.3). Untuk itu digunakan *software* Matlab R2023a, selanjutnya pada bagian akhir disajikan *source code* agar pembaca dapat mencoba simulasi ini secara mandiri. Karena keterbatasan komputasi maka fungsi $e_q(t)$ pada (3.16) dan (3.21) akan didekati dengan:

$$e_q(t) \approx \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{[j]_q!}.$$

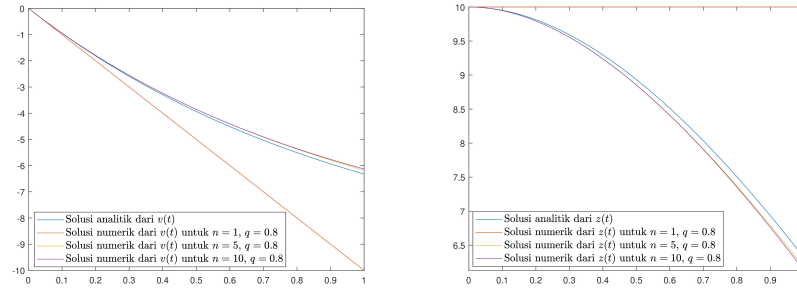
Pada tahapan ini beberapa parameter akan ditetapkan berdasarkan asumsi yang digunakan, diantaranya adalah medan gravitasi $g = 10$, konstanta gesek udara

$k = 1$, benda dijatuhkan pada ketinggian $h = 10$ dan dengan kecepatan awal $v_0 = 0$, serta adapun parameter yang nilainya akan diubah yakni n dan q . Berikut adalah hasil dari simulasi.



Gambar 2. Solusi eksak dan solusi numerik (bentuk kuantum) dari model gerak jatuh bebas dengan nilai $n = 10$ dan $q = 0.3, 0.6, 0.9$ untuk (kiri) $v(t)$ dan (kanan) $z(t)$

Pada Gambar 2, diberikan perbandingan solusi eksak dan solusi numerik dengan $n = 10$ dan $q = 0.3, 0.6, 0.9$. Terlihat bahwa untuk q yang mendekati satu memberikan penyelesaian numerik yang mendekati nilai eksaknya. Dalam hal ini nilai $q = 0.9$ memberikan hasil yang paling dekat dengan nilai analitiknya.



Gambar 3. Solusi eksak dan solusi numerik (bentuk kuantum) dari model gerak jatuh bebas dengan nilai $n = 1, 5, 10$ dan $q = 0.8$ untuk (kiri) $v(t)$ dan (tengah) $z(t)$

Sekarang, perhatikan Gambar 3. Ini memberikan perbandingan solusi eksak dan solusi numerik dengan $n = 1, 5, 10$ dan $q = 0.8$. Terlihat bahwa semakin besar n maka pendekatannya solusi numeriknya semakin baik. Dalam hal ini nilai $n = 10$ memberikan hasil yang paling dekat dengan nilai analitiknya.

Untuk memudahkan memahami hasil simulasi, diberikan *source code* dari hasil simulasi tersebut.

Source Code

```
syms t v(t) z(t);
```

```

g = 10;
k = 1;
h = 10;
v0=0;
% Grafik Kecepatan Vertikal
q = [1;0.3;0.6;0.9];
%inputkan parameter q mulai dari baris ke-2
n = [100;10;10;10];
%inputkan parameter n mulai dari baris ke-2
v(t) = -(g/k)+((g/k)+v0)*exp_q(-k*t,n,q);
fplot(v)
axis([0 1 -6 0])
% Membuat legend
r=length(q);
lgd = cell(r,1);
lgd{1} = 'Solusi analitik dari $v(t)$';
for i=2:r
lgd{i} = strcat('Solusi numerik dari $v(t)$...
untuk ', '$n$ = ', num2str(n(i,1)), ', ...
$q$ = ', num2str(q(i,1)));
end
legend(lgd, 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 6)

% Grafik Jarak Vertikal
q = [1;0.3;0.6;0.9];
%inputkan parameter q mulai dari baris ke-2
n = [100;10;10;10];
%inputkan parameter n mulai dari baris ke-2
z(t) = h - ((g*t)/k) + (1/k)*((g/k)+v0)*...
(1-exp_q(-k*t,n,q));
fplot(z)
axis([0 1 6.5 h])
% Membuat legend
r=length(q);
lgd = cell(r,1);
lgd{1} = 'Solusi analitik dari $z(t)$';
for i=2:r
lgd{i} = strcat('Solusi numerik dari $z(t)$...
untuk ', '$n$ = ', ...
num2str(n(i,1)), ', $q$ = ', num2str(q(i,1)));
end
legend(lgd, 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', ...
6, 'Location ', 'southwest ')

%Fungsi untuk bilangan analog-q

```

```

function nq = n_q(j,q)
    temp = [1;1;1;1];
    for i=1:j-1
        temp = temp + q.^i;
    end
    nq = temp;
end

%fungsi untuk faktorial-q
function nq_factorial = n_q_factorial(p,q)
    temp = n_q(p,q);
    while p>1
        temp = temp .* n_q(p-1,q);
        p = p-1;
    end
    nq_factorial = temp;
end

%fungsi untuk eksponensial-q
function expq = exp_q(x,n,q)
    temp = 0;
    for i=0:n
        temp = temp + (x)^i./n_q_factorial(i,q);
    end
    expq = temp;
end

```

5. Kesimpulan

Kalkulus kuantum dapat digunakan untuk mendapatkan pendekatan numerik dari penyelesaian permasalahan benda jatuh bebas. Semakin q mendekati nilai satu, maka pendekatan numeriknya akan semakin baik. Semakin besar nilai n yang diambil maka semakin baik juga pendekatan numeriknya.

Daftar Pustaka

- [1] Alanazi, A.M., Ebaid, A., Alhawiti, W.M., Muhiuddin, G., 2020, The Falling Body Problem in Quantum Calculus, *Front. Phys.* **8**:43, DOI: 10.3389/fphy.2020.00043
- [2] Li, Y.Q., Sheng, Z.M., 1992, A deformation of quantum mechanics, *J. Phys. A Math. Gen.* Vol. 25: 677988, DOI: 10.1088/0305-4470/25/24/028
- [3] Annaby, M.H., Mansour, Z.S., 2012, *q-Fractional Calculus and Equations*, Heidelberg, Springer New York
- [4] Koca, I., Demirci, E., 2016, On local asymptotic stability of q-fractional nonlinear dynamical systems, *Appl. Appl. Math.* Vol. **11**: 174 – 183

- [5] Rangaig, N.A., Pada, C.T., Convicto, V.C., 2017, On the existence of the solution for q -Caputo fractional boundary value problem, *Appl Math Phys*. Vol. **5**: 99 - 102, DOI: 10.12691/amp-5-3-4
- [6] Tang, Y., Zhang, T., 2019, A remark on the q -fractional order differential equations, *Appl. Math. Comput.* Vol. 350: 198 - 208, DOI: 10.1016/j.amc.2019.01.008
- [7] Chanchlani, L., Alha, S., Gupta, J., 2019, Generalization of Taylors formula and differential transform method for composite fractional q -derivative, *Ramanujan J.* Vol. **48**: 21 - 32, DOI: 10.1007/s11139-018-9997-7
- [8] Kwok, S.F., 2005, A falling body problem through the air in view of the fractional derivative approach. *Phys A.* Vol. **350**: 199 - 206, DOI: 10.1016/j.physa.2004.11.041
- [9] Ebaid, A., 2011, Analysis of projectile motion in view of the fractional calculus. *Appl Math Model.* Vol. **35**: 12319, DOI: 10.1016/j.apm.2010.08.010
- [10] Garcia, J.J.R., Calderon, M.G., Ortiz, J.M., Baleanu, D., 2013, Motion of a particle in a resisting medium using fractional calculus approach, *Proc. Roman. Acad. Ser. A.* Vol. **14**: 42 - 47.
- [11] Ebaid, A., Masaedeh, B., El-Zahar, E., 2017, A new fractional model for the falling body problem, *Chin Phys Lett.* Vol. **34**: 020201, DOI: 10.1088/0256-307X/34/2/020201
- [12] Alharbi, F.M., Baleanu, D., Ebaid, A., 2019, Physical properties of the projectile motion using the conformable derivative, *Chin. J. Phys.* Vol. 58: 18 - 28, DOI: 10.1016/j.cjph.2018.12.010
- [13] Subiono, 2023, *Kalkulus Kuantum Versi 1.0.0*, Departemen Matematika ITS. ITS News
- [14] Kac. V., Cheung, P., 2002, *Quantum Calculus*, Edisi ke-1. Universitext, Amerika Utara
- [15] Thornton, S.T, Marion, J.B., 2004, *Classical Dynamics Of Particles And Systems*, 5th ed., Thomson Learning