

PELABELAN $L(2, 1)$ PADA GRAF $C_m \supseteq_e C_n$ DAN $S_m \supseteq_o C_n$

ELISABET LAMAPAHA, FARLY O. HANING, GANESHA LAPENANGGA PUTRA*

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Nusa Cendana
 email : ganesha.lapenangga@staf.undana.ac.id*

Diterima 16 Januari 2024 Direvisi 28 Maret 2024 Dipublikasikan 30 April 2024

Abstract. *Given a graph G , the $L(2, 1)$ labeling of G is a mapping $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ such that for every vertex $u, v \in V(G)$ with $d(u, v) = 1$ or $d(u, v) = 2$, then the difference between the labels of those two vertices is at least $3 - d(u, v)$. If k is the biggest number used for the labeling, then, we used to name it as the k - $L(2, 1)$ labeling. Furthermore, the $\lambda_{2,1}(G)$ is the minimum of k , such the the k - $L(2, 1)$ of G exist. In this paper, we deliver the $\lambda_{2,1}$ of the graph $C_m \supseteq_e C_n$ and $S_m \supseteq_o C_n$.*

Keywords: star graph, cycle graph, the $L(2, 1)$ labeling

1. Pendahuluan

Lahirnya teori graf sebagai salah satu bidang di matematika ditemukan oleh Leonhard Euler ketika menyelesaikan suatu permasalahan yang diinterpretasikan ke dalam graf [1]. Suatu graf $G = (V, E)$ adalah pasangan terurut dari himpunan berhingga dan tak kosong, yaitu himpunan titik V dan himpunan E yang merupakan himpunan koleksi subhimpunan V berkardinalitas dua yang dinamakan sisi [2]. Terdapat beberapa operasi pada graf, namun ada dua yang dikenalkan, yakni hasil kali sisir dan sisir sisi. Diberikan graf G dan H . Perhatikan bahwa pendefinisian kedua operasi ini cukup serupa, dinotasikan dengan $G \supseteq_o H$ dan $G \supseteq_e H$, namun perbedaannya terletak pada banyaknya salinan dan penyatuan antara graf, yakni yang satu menyalin sebanyak titik pada graf G dan menyatukan titik [3,4], sedangkan yang lain menyalin sebanyak sisi pada graf pertama dan menyatukan sisi [5].

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, teori graf mulai digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu topik yang dapat diselesaikan dengan teori graf adalah permasalahan penetapan frekuensi. Permasalahan ini dimulai oleh William Hale [6]. Permasalahan tersebut dapat dimodelkan ke dalam graf untuk diselesaikan. Hasilnya, mereka memperkenalkan pelabelan $L(2, 1)$, yang merupakan suatu fungsi $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, dengan syarat untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$ dengan $d(u, v) = 1$ atau $d(u, v) = 2$, maka selisih label kedua titik setidaknya bernilai $3 - d(u, v)$. Tujuan

*Penulis korespondensi

utama pada pelabelan $L(2, 1)$ cukup serupa dengan pewarnaan pada graf, yakni menemukan minimum label terbesar, atau yang dikenal dengan $\lambda_{2,1}$ [7,8,9].

Widyaningsih dkk. melakukan kajian Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf $C_m \supseteq_o C_n$ [10]. Muharam dkk. mengkaji pelabelan $L(2, 1)$ pada graf hasil operasi dari graf siklus [11]. Prasetyo dkk. memberikan hasil Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf siklus, bintang, dan graf roda [12]. Setyo dkk. mengkaji $\lambda_{2,1}$ untuk graf *middle* [13]. Miryawati dkk. memberikan hasil pelabelan $L(2, 1)$ pada graf bidang ubin reguler dan graf outerplanar [14].

Lina dkk. memberikan hasil dari pelabelan $L(2, 1)$ pada graf $Sc(n, r)$ [15]. Fatima dkk. memberikan hasil dari pelabelan $L(2, 1)$ pada operasi beberapa kelas graf, yaitu graf kipas, graf teratai, graf $K_1 \odot (P_n \cup F_n)$ dan graf $K_1 \odot tC_n$ [16]. Sagala dan Susiana memberikan pelabelan pada graf Sierpinski $S(n, k)$ [17]. Pada tahun 2017, Gina dkk. membuktikan bahwa pelabelan pada graf $P_m \supset C_n$ memenuhi definisi pelabelan $L(2, 1)$ [18]. Putri memperoleh nilai $\lambda_{2,1}$ pada graf $P_n \supset_o S_m$ [19]. Irham Af'idatul Umam melakukan pelabelan $L(2, 1)$ pada graf *Lollipop* dengan memperoleh nilai $\lambda_{2,1}(L(m, n)) = 2m - 2$ [20]. Selanjutnya, Chang dan Kuo [21] memberikan algoritma untuk menentukan $\lambda_{2,1}$ untuk graf pohon T dengan waktu penyelesaian polinomial. Paul dkk. juga memberikan hasil terkait $\lambda_{2,1}$ pada graf interval [22]. Shao dkk. [23] juga mendefinisikan graf total dan memberikan batas atas pada nilai $\lambda_{2,1}$ pada beberapa kelas graf total. Wang [24] juga memberikan nilai $\lambda_{2,1}$ pada beberapa jenis graf pohon. Berdasarkan beberapa hasil ini, penulis tertarik untuk menentukan $\lambda_{2,1}$ dari graf hasil kali sisir sisi antara dua graf siklus dan hasil kali sisir antara graf bintang dan graf siklus.

Berikut ini disajikan beberapa teorema pendukung yang digunakan dalam penelitian ini.

Teorema 1.1. [4] Untuk suatu graf G dan subgrafnya, namakan H , maka $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

Teorema 1.2. [4] Jika G adalah sebarang graf terhubung dengan derajat maksimum $\Delta \geq 4$, maka $\lambda_{2,1} \geq \Delta + 1$.

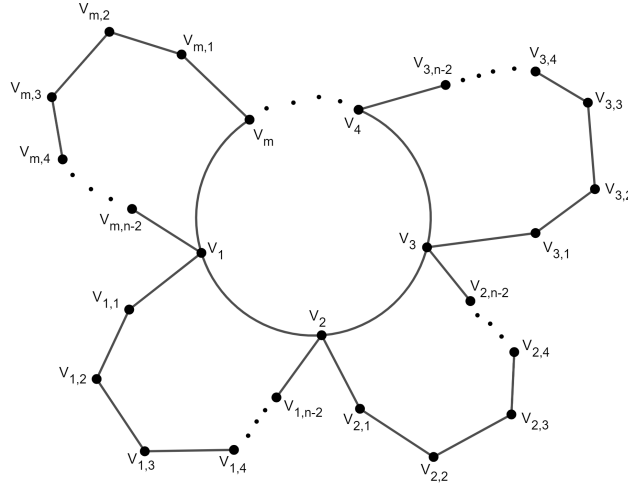
Teorema 1.3. [4] Misalkan G graf dengan derajat maksimum $\Delta \geq 1$. Jika $\lambda_{2,1}(G) = \Delta + 1$, maka untuk setiap $v_j \in V(G)$ dan $\deg(v_j) = \Delta$, $f(v_j) \in \{0, \Delta + 1\}$.

2. Pembahasan

Sebelum memasuki pembahasan terkait pelabelan $L(2, 1)$ pada graf $C_m \supseteq_e C_n$ dan graf $S_m \supseteq_o C_n$, didefinisikan bahwa untuk $a, b \in \mathbb{Z}$, $[a, b] = \{i \in \mathbb{Z} \mid a \leq i \leq b\}$ dan notasi habis membagi, yakni $3|6$ dimaksudkan dengan 3 habis membagi 6 [25].

2.1. Graf $C_m \supseteq_e C_n$

Berikut diberikan himpunan titik dan sisi dari graf $C_m \supseteq_e C_n$ pada Gambar 1. Himpunan titiknya adalah $V(C_m \supseteq_e C_n) = \{v_i \mid i \in [1, m]\} \cup \{v_{i,j} \mid i \in [1, m], j \in [1, n-2]\}$, sedangkan himpunan sisinya adalah $E(C_m \supseteq_e C_n) = \{v_m v_1\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i \in$


 Gambar 1. Graf $C_m \supseteq_e C_n$

$[1, m-1]\} \cup \{v_{i,j}v_{i,j+1} \mid i \in [1, m], j \in [1, n-3]\} \cup \{v_i v_{i,1} \mid i \in [1, m]\} \cup \{v_{i,n-2}v_{i+1} \mid i \in [1, m-1]\} \cup \{v_{m,n-2}v_1\}$.

Berikut diberikan teorema terkait $\lambda_{2,1}$ pada graf $C_m \supseteq_e C_n$. Menurut Teorema 1.2, jika G adalah sebarang graf terhubung dengan derajat maksimum $\Delta \geq 4$, maka $\lambda_{2,1} \geq \Delta + 1$. Akan tetapi berdasarkan hasil yang didapatkan, nilai minimal label terbesar atau $\lambda_{2,1}$ dari graf $C_m \supseteq_e C_n = 6$.

Teorema 2.1. Misalkan $(C_m \supseteq_e C_n)$ adalah graf hasil operasi kali sisir sisi pada dua graf siklus dengan $m \geq 3, n \geq 4$, maka:

$$\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) = \begin{cases} 6; & (m, n) \neq (5, 3) \\ 7; & (m, n) = (5, 3) \end{cases}.$$

Bukti. Pertama, dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) \geq 6$. Untuk membuktikan $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) \geq 6$, digunakan metode kontradiksi. Andaikan $\lambda_{2,1} < 6$. Diketahui bahwa $\Delta(C_m \supseteq_e C_n) = 4$. Menurut Teorema 1.2, maka $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) \geq 5$. Akibatnya, $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) = 5$. Ambil titik $v_1, v_2, v_3 \in V(C_m \supseteq_e C_n)$. Diketahui bahwa $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = 4 = \Delta$. Berdasarkan Teorema 1.3, maka $f(v_1), f(v_2), f(v_3) \in \{0, 5\}$. Akibatnya, terdapat $u, v \in \{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $f(u) = f(v)$. Namun, $d(u, v) \leq 2$. Hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan $L(2, 1)$. Jadi, terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) \geq 6$.

Selanjutnya, dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1} \leq 6$. Bukti pada bagian ini dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1. $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) \leq 6$ untuk $m \geq 3, n \geq 4$.

Untuk membuktikan ini, cukup didefinisikan fungsi pelabelan pada graf $C_m \supseteq_e C_n$. Fungsi pelabelan pada graf $C_m \supseteq_e C_n$ dibagi menjadi beberapa subkasus sebagai berikut.

Subkasus 1.1 $m \equiv 0 \pmod{3}$.

Pada subkasus ini dibagi menjadi tiga subsubkasus, yakni sebagai berikut.

Subsubkasus 1.1.1. $n \equiv 1 \pmod{3}$.

Berikut diberikan fungsi pelabelan sebagai berikut.

$$f(v_i) = \begin{cases} 0; 3|(i-1); i \in [1, m] \\ 6; 3|(i-2); i \in [1, m] \\ 3; \quad 3 \nmid i; \quad i \in [1, m] \end{cases}$$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 4; 3|(j-1); j \in [1, n-2]; 3|(i-1) \\ 2; 3|(j-2); j \in [1, n-2]; 3|(i-1) \\ 6; 3|j; j \in [1, n-2]; 3|(i-1) \\ 4; 3|(j-1); j \in [1, n-3]; 3|(i-2) \\ 2; 3|(j-2); j \in [1, n-3]; 3|(i-2) \\ 6; 3|j; j \in [1, n-3]; 3|(i-2) \\ 1; j = n-2; ; 3|(i-2) \\ 5; 3|(j-1); j \in [1, n-2]; 3 \nmid i \\ 2; 3|(j-2); j \in [1, n-2]; 3 \nmid i \\ 0; 3|j; j \in [1, n-2]; 3 \nmid i \end{cases} \quad (2.1)$$

Berikut dibuktikan bahwa fungsi pelabelan pada Persamaan 2.1 memenuhi sifat pelabelan $L(2, 1)$, yakni untuk setiap $u, v \in V(G)$ dengan $d(u, v) = 1$ atau $d(u, v) = 2$, maka $|f(u) - f(v)| \geq 3 - d(u, v)$.

1. Berikut diberikan semua kemungkinan dua titik berbeda yang berjarak satu.

- 1.1 Titik v_i dan titik v_{i+1}

Untuk $i \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $f(v_i) = 0$ dan $f(v_{i+1}) = 6$, maka $|f(v_i) - f(v_{i+1})| = |0 - 6| = 6 \geq 2$, sehingga memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$.

- 1.2 Titik v_i dan titik $v_{i,1}$

Untuk $i \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $f(v_i) = 0$ dan $f(v_{i,1}) = 4$, maka $|f(v_i) - f(v_{i,1})| = |0 - 4| = 4 \geq 2$, sehingga memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$.

- 1.3 Titik v_{i+1} dan titik v_{n-2}

Untuk $i \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $f(v_{i+1}) = 6$ dan $f(v_{n-2}) = 2$, maka $|f(v_{i+1}) - f(v_{n-2})| = |6 - 2| = 4 \geq 2$, sehingga memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$.

- 1.4 Titik $v_{i,j}$ dan titik $v_{i,j+1}$

Untuk $i \equiv 1 \pmod{3}; j \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $f(v_{i,j}) = 4$ dan $f(v_{i,j+1}) = 2$, maka $|f(v_{i,j}) - f(v_{i,j+1})| = |4 - 2| = 2 \geq 2$, sehingga memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$.

2. Berikut diberikan semua kemungkinan dua titik berbeda yang berjarak dua.

- 2.1 Titik v_i dan titik v_{i+2}

Untuk $i \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $f(v_i) = 0$ dan $f(v_{i+2}) = 3$, maka $|f(v_i) - f(v_{i+2})| = |0 - 3| = 3 \geq 1$, sehingga memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$.

2.2 Titik v_i dan titik $v_{i,2}$

Untuk $i \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $f(v_i) = 0$ dan $f(v_{i,2}) = 2$, maka $|f(v_i) - f(v_{i,2})| = |0 - 2| = 2 \geq 1$, sehingga memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$.

2.3 Titik v_{i+1} dan titik $v_{i,1}$

Untuk $i \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $f(v_{i+1}) = 6$ dan $f(v_{i,1}) = 4$, maka $|f(v_{i+1}) - f(v_{i,1})| = |6 - 4| = 2 \geq 1$, sehingga memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$.

2.4 Titik $v_{i,j}$ dan titik $v_{i,j+2}$

Untuk $i \equiv 1 \pmod{3}; j \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $f(v_{i,j}) = 4$ dan $f(v_{i,j+2}) = 6$, maka $|f(v_{i,j}) - f(v_{i,j+2})| = |4 - 6| = 2 \geq 1$, sehingga memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$.

Berdasarkan hasil di atas diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) \leq 6$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$ dan $n \equiv 1 \pmod{3}$.

Subsubkasus 1.1.2. $n \equiv 2 \pmod{3}$

Berikut diberikan fungsi pelabelan untuk subsubkasus ini sebagai berikut. Fungsi pelabelan untuk titik v_i sama dengan Persamaan 2.1, sedangkan untuk titik $v_{i,j}$ sebagai berikut.

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 5; 3|(j-1); & j \in [1, n-2]; 3|(i-1) \\ 3; 3|(j-2); & j \in [1, n-2]; 3|(i-1) \\ 1; 3|j; & j \in [1, n-2]; 3|(i-1) \\ 2; 3|(j-1); & j \in [1, n-2]; 3|(i-2) \\ 0; 3|(j-2); & j \in [1, n-2]; 3|(i-2) \\ 5; 3|j; & j \in [1, n-2]; 3|(i-2) \\ 1; 3|(j-1); & j \in [1, n-3]; 3|i \\ 4; 3|(j-2); & j \in [1, n-3]; 3|i \\ 6; 3|j; & j \in [1, n-3]; 3|i \\ 2; j = n-2; & ; 3|i \end{cases} \quad (2.2)$$

Pada bagian ini, pembuktian terkait fungsi berikut memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$ serupa dengan Subsubkasus 1.1.1 dan cukup jelas.

Subsubkasus 1.1.3. $n \equiv 2 \pmod{3}$

Berikut diberikan fungsi pelabelan untuk subsubkasus berikut. Fungsi pelabelan untuk titik v_i sama dengan Persamaan 2.1, sedangkan untuk titik $v_{i,j}$ sebagai berikut.

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 4; 3|(j-1); & j \in [1, n-2]; 3|(i-1) \\ 6; 3|(j-2); & j \in [1, n-2]; 3|(i-1) \\ 0; 3|j; & j \in [1, n-2]; 3|(i-1) \\ 1; 3|(j-1); & j \in [1, n-2]; 3|(i-2) \\ 3; 3|(j-2); & j \in [1, n-2]; 3|(i-2) \\ 6; 3|j; & j \in [1, n-2]; 3|(i-2) \\ 5; 3|(j-1); & j \in [1, n-2]; 3|i \\ 0; 3|(j-2); & j \in [1, n-2]; 3|i \\ 3; 3|j; & j \in [1, n-2]; 3|i \end{cases} \quad (2.3)$$

Pada bagian ini, pembuktian terkait fungsi berikut memenuhi syarat pelabelan

$L(2, 1)$ serupa dengan Subsubkasus 1.1.1 dan cukup jelas. Berdasarkan ketiga subsubkasus ini, terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) \leq 6$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$.

Subkasus 1.2. $m \equiv 1 \pmod{3}$.

Pada subkasus ini dibagi menjadi tiga subsubkasus, yakni sebagai berikut.

Subsubkasus 1.2.1. $n \equiv 1 \pmod{3}$

Berikut diberikan fungsi pelabelan untuk kasus berikut.

$$\begin{aligned}
 f(v_i) &= \begin{cases} 0; 3|(i-1); i \in [1, m-1] \\ 6; 3|(i-2); i \in [1, m-1] \\ 3; \quad 3|i; \quad i \in [1, m-1] \\ 5; \quad \quad \quad i = m \end{cases} \\
 f(v_{i,j}) &= \begin{cases} 4; 3|(j-1); j \in [1, n-3]; \quad 3|[(i-1) \& (i-2)]; i \in [1, m-2] \\ 2; 3|(j-2); j \in [1, n-3]; \quad 3|[(i-1) \& (i-2)]; i \in [1, m-2] \\ 6; 3|j; \quad \quad \quad j \in [1, n-3]; \quad 3|[(i-1) \& (i-2)]; i \in [1, m-2] \\ 1; \quad \quad \quad j = n-2; \quad \quad 3|[(i-1) \& (i-2)]; i \in [1, m-2] \\ 5; 3|(j-1); j \in [1, n-2]; \quad 3|i; \quad \quad \quad i \in [1, m-2] \\ 2; 3|(j-2); j \in [1, n-2]; \quad 3|i; \quad \quad \quad i \in [1, m-2] \\ 0; 3|j; \quad \quad \quad j \in [1, n-2]; \quad 3|i; \quad \quad \quad i \in [1, m-2] \\ 0; 3|(j-1); j \in [1, n-3]; \quad i = m-1 \\ 5; 3|(j-2); j \in [1, n-3]; \quad i = m-1 \\ 3; 3|j; \quad \quad \quad j \in [1, n-3]; \quad i = m-1 \\ 2; \quad \quad \quad j = n-2; \quad \quad i = m-1 \\ 1; 3|(j-1); j \in [1, n-2]; \quad i = m \\ 3; 3|(j-2); j \in [1, n-2]; \quad i = m \\ 5; 3|j; \quad \quad \quad j \in [1, n-2]; \quad i = m \end{cases} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Pembuktian untuk menunjukkan bahwa fungsi ini memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$ serupa dengan pada Subsubkasus 1.1.1 dan merupakan pembuktian yang rutin.

Subsubkasus 1.2.2. $n \equiv 2 \pmod{3}$

Definisikan fungsi pelabelan pada subsubkasus ini sebagai berikut. Fungsi pelabelan untuk titik v_i sama dengan pada Persamaan 2.4, sedangkan untuk titik $v_{i,j}$ diberikan sebagai berikut.

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 4; 3|(j-1); & j \in [1, n-5]; 3|(i-1); i \in [1, m-1] \\ 6; 3|(j-2); & j \in [1, n-5]; 3|(i-1); i \in [1, m-1] \\ 0; 3|j; & j \in [1, n-5]; 3|(i-1); i \in [1, m-1] \\ 4; j = n-2; & ; 3|(i-1); i \in [1, m-1] \\ 2; j = n-3; & ; 3|(i-1); i \in [1, m-1] \\ 5; j = n-4; & ; 3|(i-1); i \in [1, m-1] \\ 2; 3|(j-1); & j \in [1, n-2]; 3|(i-2); i \in [1, m-1] \\ 4; 3|(j-2); & j \in [1, n-2]; 3|(i-2); i \in [1, m-1] \\ 0; 3|j; & j \in [1, n-2]; 3|(i-2); i \in [1, m-1] \\ 1; 3|(j-1); & j \in [1, n-4]; 3|i; i \in [1, m-1] \\ 5; 3|(j-2); & j \in [1, n-4]; 3|i; i \in [1, m-1] \\ 3; 3|j; & j \in [1, n-4]; 3|i; i \in [1, m-1] \\ 2; j = n-2; & ; 3|i; i \in [1, m-1] \\ 4; j = n-3; & ; 3|i; i \in [1, m-1] \\ 1; 3|(j-1); & ; i = m; \\ 6; 3|(j-2); & ; i = m; \\ 3; 3|j; & ; i = m; \end{cases} \quad (2.5)$$

Pembuktian untuk menunjukkan bahwa fungsi ini memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$ serupa dengan pada Subsubkasus 1.1.1 dan merupakan pembuktian yang rutin.

Subsubkasus 1.2.3. $n \equiv 0 \pmod{3}$

Definisikan fungsi pelabelan pada subsubkasus ini sebagai berikut. Fungsi pelabelan untuk titik v_i sama dengan pada Persamaan 2.4, sedangkan untuk titik $v_{i,j}$ diberikan sebagai berikut.

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 4; 3|(j-1); & j \in [1, n-2]; 3|(i-1); i \in [1, m-2] \\ 6; 3|(j-2); & j \in [1, n-2]; 3|(i-1); i \in [1, m-2] \\ 0; 3|j; & j \in [1, n-2]; 3|(i-1); i \in [1, m-2] \\ 1; 3|(j-1); & j \in [1, n-2]; 3|(i-2); i \in [1, m-2] \\ 3; 3|(j-2); & j \in [1, n-2]; 3|(i-2); i \in [1, m-2] \\ 6; 3|j; & j \in [1, n-2]; 3|(i-2); i \in [1, m-2] \\ 5; 3|(j-1); & j \in [1, n-2]; 3|i; i \in [1, m-2] \\ 0; 3|(j-2); & j \in [1, n-2]; 3|i; i \in [1, m-2] \\ 3; 3|j; & j \in [1, n-2]; 3|i; i \in [1, m-2] \\ 0; 3|(j-1); & j \in [1, n-3]; ; i = m-1 \\ 5; 3|(j-2); & j \in [1, n-3]; ; i = m-1 \\ 3; 3|j; & j \in [1, n-3]; ; i = m-1 \\ 1; ; & j = n-2; ; i = m-1 \\ 2; 3|(j-1); & j \in [1, n-2]; ; i = m \\ 0; 3|(j-2); & j \in [1, n-2]; ; i = m \\ 5; 3|j; & j \in [1, n-2]; ; i = m \end{cases} \quad (2.6)$$

Pembuktian terkait fungsi berikut memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$ serupa dengan Subsubkasus 1.1.1 dan cukup jelas. Berdasarkan ketiga subsubkasus ini, terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) \leq 6$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}$.

Subkasus 1.3. $m \equiv 2 \pmod{3}$

Pada subkasus ini dibagi menjadi tiga subsubkasus, yakni sebagai berikut.

Subsubkasus 1.3.1. $n \equiv 1 \pmod{3}$

Berikut diberikan fungsi pelabelan untuk kasus berikut.

$$\begin{aligned}
 f(v_i) &= \begin{cases} 0; i \in [1, m-2]; 3|(i-1) \\ 6; i \in [1, m-2]; 3|(i-2) \\ 3; i \in [1, m-2]; 3|i \\ 1; & i = m-1 \\ 4; & i = m \end{cases} \\
 f(v_{i,j}) &= \begin{cases} 2; 3|(j-1); 3|(i-1); & i \in [1, m-3] \\ 4; 3|(j-2); 3|(i-1); & i \in [1, m-3] \\ 6; 3|j; & 3|(i-1); & i \in [1, m-3] \\ 1; 3|(j-1); 3|[i \& (i-2)]; & i \in [1, m-3] \\ 5; 3|(j-2); 3|[i \& (i-2)]; & i \in [1, m-3] \\ 3; 3|j; & 3|[i \& (i-2)]; & i \in [1, m-3] \\ 0; 3|(j-1); ; & i = m-2 \\ 5; 3|(j-2); ; & i = m-2 \\ 2; 3|j; ; & i = m-2 \\ 6; 3|(j-1); ; & i = m-1 \\ 2; 3|(j-2); ; & i = m-1 \\ 4; 3|j; ; & i = m-1 \\ 6; 3|(j-1); ; & i = m \\ 3; 3|(j-2); ; & i = m \\ 0; 3|j; ; & i = m \end{cases} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Pembuktian untuk menunjukkan bahwa fungsi ini memenuhi syarat pelabelan $L(2,1)$ serupa dengan pada Subsubkasus 1.1.1 dan merupakan pembuktian yang rutin.

Subsubkasus 1.3.2. $n \equiv 2 \pmod{3}$

Definisikan fungsi pelabelan pada subsubkasus ini sebagai berikut. Fungsi pelabelan untuk titik v_i sama dengan pada Persamaan 2.7, sedangkan untuk titik $v_{i,j}$ diberikan sebagai berikut.

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 5; 3|(j-1); & j \in [1, n-3]; 3|(i-1); & i \in [1, m-3] \\ 2; 3|(j-2); & j \in [1, n-3]; 3|(i-1); & i \in [1, m-3] \\ 0; 3|j; & j \in [1, n-3]; 3|(i-1); & i \in [1, m-3] \\ 4; j = n-2; ; & 3|(i-1); & i \in [1, m-3] \\ 2; 3|(j-1); ; & 3|(i-2); & i \in [1, m-3] \\ 0; 3|(j-2); ; & 3|(i-2); & i \in [1, m-3] \\ 5; 3|j; ; & 3|(i-2); & i \in [1, m-3] \\ 1; 3|(j-1); & j \in [1, n-4]; 3|i; & i \in [1, m-3] \\ 5; 3|(j-2); & j \in [1, n-4]; 3|i; & i \in [1, m-3] \\ 3; 3|j; & j \in [1, n-4]; 3|i; & i \in [1, m-3] \\ 2; j = n-2; ; & 3|i; & i \in [1, m-3] \\ 4; j = n-3; ; & 3|i; & i \in [1, m-3] \end{cases} \quad (2.8)$$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 0; 3|(j-1); & ; i = m-2 \\ 2; 3|(j-2); & ; i = m-2 \\ 6; 3|j; & ; i = m-2 \\ 5; 3|(j-1); & j \in [1, n-3]; i = m-1 \\ 3; 3|(j-2); & j \in [1, n-3]; i = m-1 \\ 0; 3|j; & j \in [1, n-3]; i = m-1 \\ 6; j = n-2; & ; i = m-1 \\ 2; 3|(j-1); & j \in [1, n-3]; i = m \\ 6; 3|(j-2); & j \in [1, n-3]; i = m \\ 0; 3|j; & j \in [1, n-3]; i = m \\ 3; j = n-2; & ; i = m \end{cases}$$

Pembuktian untuk menunjukkan bahwa fungsi ini memenuhi syarat pelabelan $L(2,1)$ serupa dengan pada Subsubkasus 1.1.1 dan merupakan pembuktian yang rutin.

Subsubkasus 1.3.3. $n \equiv 0 \pmod{3}$

Definisikan fungsi pelabelan pada subsubkasus ini sebagai berikut. Fungsi pelabelan untuk titik v_i sama dengan pada Persamaan 2.7, sedangkan untuk titik $v_{i,j}$ diberikan sebagai berikut.

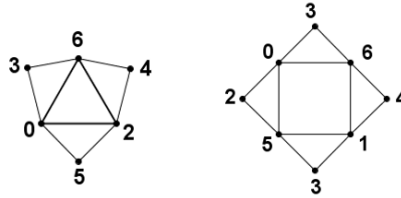
$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2; 3|(j-1); & ; 3|(i-1); & i \in [1, m-3] \\ 6; 3|(j-2); & ; 3|(i-1); & i \in [1, m-3] \\ 0; 3|j; & ; 3|(i-1); & i \in [1, m-3] \\ 1; 3|(j-1); & j \in [1, n-4]; 3|(i-2); & i \in [1, m-3] \\ 3; 3|(j-2); & j \in [1, n-4]; 3|(i-2); & i \in [1, m-3] \\ 5; 3|j; & j \in [1, n-4]; 3|(i-2); & i \in [1, m-3] \\ 0; j = n-3; 3|(i-2); & i \in [1, m-3] \\ 5; j = n-2; 3|(i-2); & i \in [1, m-3] \\ 1; 3|(j-1); & j \in [1, n-4]; 3|i; & i \in [1, m-3] \\ 5; 3|(j-2); & j \in [1, n-4]; 3|i; & i \in [1, m-3] \\ 3; 3|j; & j \in [1, n-4]; 3|i; & i \in [1, m-3] \\ 2; j = n-3; 3|i; & ; i \in [1, m-3] \\ 4; j = n-2; 3|i; & ; i \in [1, m-3] \\ 0; 3|(j-1); & j \in [1, n-3]; ; & i = m-2 \\ 6; 3|(j-2); & j \in [1, n-3]; ; & i = m-2 \\ 3; 3|j; & j \in [1, n-3]; ; & i = m-2 \\ 5; j = n-2; & ; & i = m-2 \\ 6; 3|(j-1); & ; & i = m-1 \\ 4; 3|(j-2); & ; & i = m-1 \\ 1; 3|j; & ; & i = m-1 \\ 2; 3|(j-1); & j \in [1, n-3]; ; & i = m \\ 0; 3|(j-2); & j \in [1, n-3]; ; & i = m \\ 5; 3|j; & j \in [1, n-3]; ; & i = m \\ 3; j = n-2; & ; & i = m \end{cases} \quad (2.9)$$

Berdasarkan ketiga subsubkasus ini, terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) \leq 6$ untuk $m \equiv 2 \pmod{3}$.

Berdasarkan hasil dari ketiga subkasus dan masing-masing subsubkasus di atas, terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) \leq 6$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$.

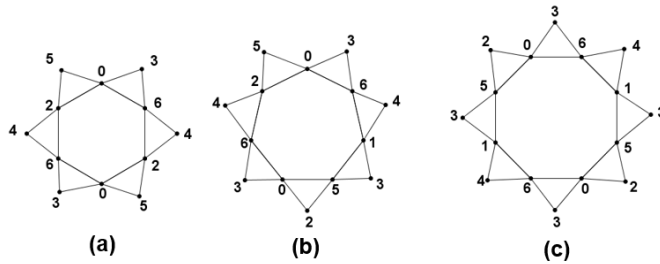
Kasus 2. $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n)$ untuk $m \neq 5$ dan $n = 3$.

Pada bagian ini, cukup dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(C_3 \supseteq_e C_3) = \lambda_{2,1}(C_3 \supseteq_e C_3) \leq 6$. Untuk $m \geq 6$, cukup menggunakan induksi kuat pada $m \geq 6$ untuk menyatakan bahwa m dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari 3 dan 4 atau dapat ditulis $m = 3x + 4y$ dengan $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Bukti pada bagian ini cukup sederhana untuk menyatakan bahwa $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_3) \leq 6$ dapat diperoleh dari kombinasi antara $\lambda_{2,1}(C_3 \supseteq_e C_3) \leq 4$ dan $\lambda_{2,1}(C_3 \supseteq_e C_3) \leq 4$. Pada langkah awal, dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(C_3 \supseteq_e C_3) = \lambda_{2,1}(C_3 \supseteq_e C_3) \leq 6$ dengan cara memberikan pelabelan seperti pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Pelabelan 6- $L(2,1)$ pada graf $C_3 \supseteq_e C_3$ dan $C_4 \supseteq_e C_3$

Cukup jelas bahwa pelabelan pada Gambar 2 merupakan suatu pelabelan $L(2,1)$. Selanjutnya, dengan menggunakan kombinasi pelabelan $L(2,1)$ pada Gambar 2 dan pembuktian dasar menggunakan induksi bahwa untuk $m \geq 6$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari 3 dan 4, maka terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_3) \leq 6$ untuk $m \geq 6$. Berikut diberikan contoh pada Gambar 3 berikut.



Gambar 3. Pelabelan 6- $L(2,1)$ pada graf: (a.) $C_6 \supseteq_e C_3$, (b.) $C_7 \supseteq_e C_3$, dan (c.) $C_8 \supseteq_e C_3$

Selanjutnya, dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(C_5 \supseteq_e C_3) = 7$. Pembuktian ini dibagi menjadi dua, yakni:

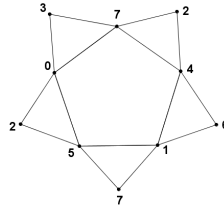
1. Pertama, dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(C_5 \supseteq_e C_3) \geq 7$. Bukti dengan metode kontradiksi. Gunakan fakta yang telah dibuktikan sebelumnya, maka pengandaian

menjadi $\lambda_{2,1}(C_5 \supseteq_e C_3) = 6$. Misalkan f adalah pelabelan $6-L(2, 1)$ pada graf $C_5 \supseteq_e C_3$. Perhatikan bahwa, terdapat $v \in \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ dengan $f(v) \in \{0, 6\}$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $f(v) = 6$. Pandang klaim berikut.

Klaim. Jika $u, w \in \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ dengan $uv, vw \in E(G)$ dan $|f(u) - f(w)| = 2$, maka pengandaian salah.

Perhatikan bahwa terdapat tiga kemungkinan untuk $f(u)$ dan $f(w)$, yakni $\{f(u), f(w)\} \subset \{\{2, 4\}, \{1, 3\}, \{0, 2\}\}$. Bukti pada bagian ini merupakan bukti yang cukup jelas dan rutin, jadi diberikan contoh untuk kasus $\{f(u), f(w)\} = \{2, 4\}$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $v = v_1$, $u = v_6$, dan $w = v_2$. Syarat dari pelabelan $L(2, 1)$ mengakibatkan $f(v_{1,1}) = 1$, $f(v_{2,1}) = 2$, dan $f(v_3) = 0$. Namun, untuk semua kemungkinan label titik $v_{5,1}, v_4$, dan $v_{4,1}$ menyalahi aturan pelabelan $L(2, 1)$. Jadi, klaim di atas terbukti. Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa jika $\{f(u), f(w)\} \subset \{\{4, 1\}, \{4, 0\}, \{3, 0\}, \}$ merupakan suatu pembuktian yang rutin yang berujung pada kontradiksi. Akibatnya, $\lambda_{2,1}(C_5 \supseteq_e C_3) \geq 7$.

2. Kedua, untuk menunjukkan $\lambda_{2,1}(C_5 \supseteq_e C_3) \leq 7$, diberikan pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4. Pelabelan $7-L(2, 1)$ pada graf $C_5 \supseteq_e C_3$

Jadi, diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(C_5 \supseteq_e C_3) = 7$. □

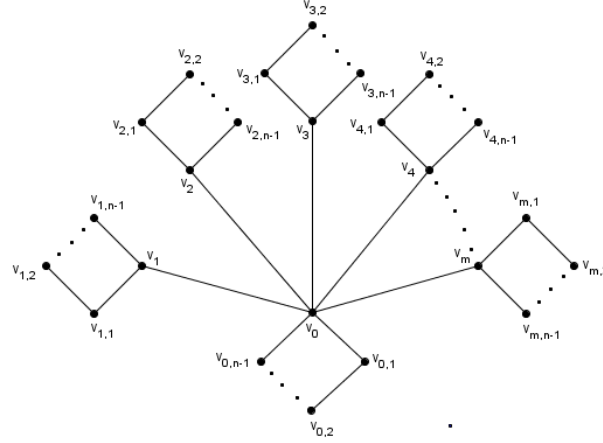
2.2. Graf $S_m \supseteq_o C_n$

Graf $S_m \supseteq_o C_n$ merupakan graf yang terbentuk dari operasi hasil kali sisir pada graf bintang S_m dengan graf siklus C_n , untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Graf $S_m \supseteq_o C_n$ dengan himpunan titik, yaitu $V(S_m \supseteq_o C_n) = \{v_i \mid i \in [0, m]\} \cup \{v_{i,j} \mid i \in [0, m], j \in [1, n-1]\}$ dan himpunan sisi yaitu $E(S_m \supseteq_o C_n) = \{v_0 v_i \mid i \in [1, m]\} \cup \{v_i v_{i,1}, v_i v_{i,n-1} \mid i \in [0, m]\} \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} \mid i \in [0, m], j \in [1, n-2]\}$. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.2. Misalkan S_m adalah graf bintang dan C_n adalah graf siklus, untuk $m \geq 2$, $n \geq 3$, maka $\lambda_{2,1}(S_m \supseteq_o C_n) = m + 3$.

Bukti.

1. Berikut dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(S_m \supseteq_o C_n) \geq m + 3$. Perhatikan bahwa graf $S_m \supseteq_o C_n$ memiliki $\Delta = m + 2 \geq 2$. Graf $S_m \supseteq_o C_n$ merupakan graf terhubung

Gambar 5. Graf $S_m \triangleright_o C_n$

- dengan derajat minimum $\delta \geq 2$. Berdasarkan Teorema 1.2, diperoleh $\lambda_{2,1}(S_m \triangleright_o C_n) \geq \Delta + 1 = m + 3$.
2. Selanjutnya, dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(S_m \triangleright_o C_n) \leq m + 3$. Pembuktian ini dilakukan dengan cara mendefinisikan fungsi pelabelan $m + 3 - L(2, 1)$ pada graf $S_m \triangleright_o C_n$. Diberikan pelabelan f pada graf $S_m \triangleright_o C_n$ dengan mendefinisikan $f : V(S_m \triangleright_o C_n) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m+3\}$ dengan menggunakan kongruensi modulo sebagai berikut.

Kasus 1: $n \equiv 0 \pmod{3}$

$$\begin{aligned}
 f(v_i) &= \begin{cases} 0 & i = 0 \\ 3 & i = 1 \\ i + 3 & i \in [2, m] \end{cases} \\
 f(v_{0,j}) &= \begin{cases} 4 & j \in [0, n-1], 3|(j-1) \\ 2 & j \in [0, n-1], 3|(j-2) \\ 0 & j \in [0, n-1], 3|j \end{cases} \\
 f(v_{1,j}) &= \begin{cases} 1 & j \in [0, n-1], 3|(j-1) \\ 5 & j \in [0, n-1], 3|(j-2) \\ 3 & j \in [0, n-1], 3|j \end{cases} \\
 f(v_{i,j}) &= \begin{cases} 1 & i \in [2, m], j \in [0, n-1], 3|(j-1), \\ 3 & i \in [2, m], j \in [0, n-1], 3|(j-2) \\ 5 & i \in [2, m], j \in [0, n-1], 3|j \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Berikut dibuktikan bahwa $|f(u) - f(w)| \geq 2$ jika $d(u, w) = 1$. Untuk mem-

buktikan ini, diberikan semua kemungkinan dua titik berbeda yang bertetangga.

1. Titik v_0 dan v_i .

Perhatikan bahwa pada bagian ini ditinjau untuk $i = 1$ dan $i \in [2, m]$. Jika $i = 1$, maka $|f(v_0) - f(v_1)| = |0 - 3| = 3 \geq 2$, sedangkan jika $i \in [2, m]$, maka $|f(v_0) - f(v_i)| = |0 - (i + 3)| = |i + 3| \geq 2$

2. Titik v_i dan $v_{i,1}$.

Pada bagian ini ditinjau untuk titik v_0 dan $v_{0,1}$, titik v_1 dan $v_{1,1}$, serta titik v_i dan $v_{i,1}$.

$$\begin{aligned} * |f(v_0) - f(v_{0,1})| &= |0 - 4| = 4 \geq 2. \\ * |f(v_1) - f(v_{1,1})| &= |3 - 1| = 2 \geq 2. \\ * |f(v_i) - f(v_{i,1})| &= |(i + 3) - 1| = |i + 2| \geq 2. \end{aligned}$$

3. Titik v_i dan $v_{i,n-1}$.

Pada bagian ini ditinjau untuk titik v_0 dan $v_{0,1}$, titik v_1 dan $v_{1,1}$, serta titik v_i dan $v_{i,1}$.

$$\begin{aligned} * |f(v_0) - f(v_{0,n-1})| &= |0 - 2| = 2 \geq 2. \\ * |f(v_1) - f(v_{1,n-1})| &= |3 - 5| = 2 \geq 2. \\ * |f(v_i) - f(v_{i,n-1})| &= |(i + 3) - 3| = |i| \geq 2. \end{aligned}$$

4. Titik $v_{i,j}$ dan $v_{i,j+1}$.

Pada bagian ini juga cukup mudah untuk dilihat bahwa selisih dari label titik $v_{i,j}$ dan $v_{i,j+1}$ tak kurang dari dua.

Selanjutnya, dibuktikan bahwa $|f(u) - f(w)| \geq 1$ untuk $d(u, w) = 2$. Berikut diberikan semua kemungkinan pasang titik yang berjarak dua.

1. Titik v_0 dan $v_{i,1}$.

Pada bagian ini ditinjau untuk titik v_0 dan $v_{1,1}$ serta titik v_0 dan $v_{i,1}$. Perhatikan bahwa $|f(v_0) - f(v_{1,1})| = |0 - 1| = 1 \geq 1$ dan $|f(v_0) - f(v_{i,1})| = |0 - 1| = 1 \geq 1$.

2. Titik v_0 dan $v_{i,n-1}$.

Pada bagian ini juga ditinjau untuk titik v_0 dan $v_{1,n-1}$ serta titik v_0 dan titik $v_{i,n-1}$. Perhatikan bahwa $|f(v_0) - f(v_{1,n-1})| = |0 - 5| = 5 \geq 1$, sedangkan $|f(v_0) - f(v_{i,n-1})| = |0 - 3| = 3 \geq 1$.

3. Titik v_i dan $v_{0,1}$.

Bukti pada bagian ini juga serupa dengan kasus sebelumnya, dan mudah untuk dibuktikan bahwa $|f(v_i) - f(v_{0,1})| \geq 1$

4. Titik v_i dan $v_{0,n-1}$.

Bukti pada bagian ini juga serupa dengan sebelumnya dan mudah dilihat bahwa $|f(v_i) - f(v_{0,n-1})| \geq 1$. Pada beberapa kasus berikutnya cukup diberikan pasangan titik yang perlu ditinjau. Rincian pembuktiannya merupakan suatu pekerjaan yang rutin.

5. Titik v_1 dan v_i .

6. Titik v_i dan v_l .

7. Titik v_i dan $v_{i,2}$.

8. Titik v_i dan $v_{i,n-2}$.

9. Titik $v_{i,1}$ dan $v_{i,n-1}$.

10. Titik $v_{i,j}$ dan $v_{i,j+2}$.

Berdasarkan hasil di atas, terbukti bahwa fungsi tersebut memenuhi peraturan pelabelan $L(2, 1)$ untuk $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Kasus 2. $n \equiv 1 \pmod{3}$

Berikut diberikan fungsi untuk kasus berikut.

$$\begin{aligned}
 f(v_i) &= \begin{cases} 0 & i = 0 \\ 2 & i = 1 \\ i + 3 & i \in [2, m] \end{cases} \\
 f(v_{0,j}) &= \begin{cases} 4 & j \in [0, n-3], 3|(j-1) \\ 2 & j \in [0, n-3], 3|(j-2) \\ 0 & j \in [0, n-3], 3|j \\ 1 & j = n-2 \\ 3 & j = n-1 \end{cases} \\
 f(v_{1,j}) &= \begin{cases} 4 & j \in [0, n-2], 3|(j-1) \\ 0 & j \in [0, n-2], 3|(j-2) \\ 2 & j \in [0, n-2], 3|j \\ 5 & j = n-1 \end{cases} \\
 f(v_{i,j}) &= \begin{cases} 1 & i \in [2, m], j \in [0, n-3], 3|(j-1) \\ 3 & i \in [2, m], j \in [0, n-3], 3|(j-2) \\ 5 & i \in [2, m], j \in [0, n-3], 3|j \\ 4 & i \in [2, m], j = n-2 \\ 2 & i \in [2, m], j = n-1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa f memenuhi sifat pelabelan $L(2, 1)$, itu merupakan suatu pembuktian yang rutin dan cukup jelas. Jadi, f merupakan suatu pelabelan $L(2, 1)$ untuk $n \equiv 1 \pmod{3}$.

Kasus 3. $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Berikut didefinisikan fungsi untuk kasus berikut.

$$\begin{aligned}
 f(v_i) &= \begin{cases} 0 & i = 0 \\ 3 & i = 1 \\ i + 3 & i \in [2, m] \end{cases} \\
 f(v_{0,j}) &= \begin{cases} 4 & j \in [0, n-4], 3|(j-1) \\ 2 & j \in [0, n-4], 3|(j-2) \\ 0 & j \in [0, n-4], 3|j \\ 1 & j = n-3 \\ 5 & j = n-2 \\ 2 & j = n-1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(v_{1,j}) &= \begin{cases} 5 & j \in [0, n-3], 3|(j-1) \\ 0 & j \in [0, n-3], 3|(j-2) \\ 3 & j \in [0, n-3], 3 \nmid j \\ 4 & j = n-2 \\ 1 & j = n-1 \end{cases} \\
f(v_{i,j}) &= \begin{cases} 2 & i \in [2, m], j \in [0, n-3], 3|(j-1) \\ 0 & i \in [2, m], j \in [0, n-3], 3|(j-2) \\ 5 & i \in [2, m], j \in [0, n-3], 3 \nmid j \\ 4 & i \in [2, m], j = n-2 \\ 1 & i \in [2, m], j = n-1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti Kasus pertama, cukup mudah untuk membuktikan bahwa f memenuhi syarat pelabelan $L(2, 1)$.

Berdasarkan pembahasan ketiga kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa:

$$\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) = m + 3 \text{ untuk } m \geq 2 \text{ dan } n \geq 3. \quad \square$$

3. Kesimpulan

Pada artikel ini telah diperoleh bahwa

$$\lambda_{2,1}(C_m \supseteq_e C_n) = \begin{cases} 6; & \text{jika } (m, n) \neq (5, 3), \\ 7; & \text{jika } (m, n) = (5, 3), \end{cases}$$

dan

$$\lambda_{2,1}(S_m \supseteq_o C_n) = m + 3.$$

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Nusa Cendana atas dukungan dalam merampungkan tulisan ini.

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G. dan Zhang, P., 2012, *A First Course in Graph Theory*, Dover Publications, New York
- [2] Diestel, R., 2017, *Graph Theory*, Fifth Ed., Springer, Berlin
- [3] Lum, A., 2007, Upper Bounds on the $L(2, 1)$ -Labeling Number of Graphs with Maximum Degree Δ , *Whitman College*
- [4] Saputro, S. W., Mardiana, N., dan Purwasih, I. A., 2017, The Metric Dimension of Comb Product of Graphs, *Matematički Vesnik*, Vol. **69(1)**: 248 – 258
- [5] Bača, M., Salman, A. N. M., Simanjuntak, R., dan Susanti, B. H., 2020, Rainbow 2-Connectivity of Edge-Comb Product of a Cycle and a Hamiltonian Graph, *Proc. Indian Acad. Sci (Math. Sci.)*, Vol. **130**: 1 – 12

- [6] Hale, W. K., 1980, Frequency Assignment: Theory and Applications, *Proceedings of the IEEE*, Vol. **68(12)**: 1497 – 1514
- [7] Marr, A. M., and Wallis, W. D., 2012, *Magic Graphs*, Second Ed., Birkhäuser, New York
- [8] Griggs, J. R., and Yeh, R. K., 1992, Labeling Graphs with a Condition at Distance 2, *SIAM J. Disc. Math.*, Vol. **5(4)**: 586 – 595
- [9] Shao, Z., Yeh, R. K., Poon, K. K., and Shiu, W. C., 2008, The $L(2, 1)$ -Labeling of $K_{1,n}$ -Free Graphs and Its Applications, *Applied Mathematics Letters*, Vol. **21(11)**: 1188 – 1193
- [10] Widyaningsih, M., 2017, *Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf hasil operasi comb antara dua buah graf lingkaran*, *Skripsi*, di UIN Sunan Gunung Djati, tidak diterbitkan
- [11] Muharram, F., *Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf hasil operasi dari graf sikel*, *Skripsi*, di Universitas Diponegoro, tidak diterbitkan
- [12] Prasetyo, I. W., 2011, *Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf cycle, graf star dan graf wheel*, *Skripsi*, di Universitas Sebelas Maret, tidak diterbitkan
- [13] Setyo, N., 2012, *Rentang minimum pelabelan $L(2, 1)$ untuk graf middle*, *Skripsi*, Universitas Diponegoro, tidak diterbitkan
- [14] Miryawati, L., 2010, *Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf bidang ubin reguler dan graf outer planar*, *Skripsi*, Universitas Diponegoro, tidak diterbitkan
- [15] Karimah, L. N., 2016, *Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf super cycle*, *Skripsi*, UIN Maulana Malik Ibrahim, tidak diterbitkan
- [16] Fatimah, S., Sudarsana, I. W., dan Musdalifah, S., 2016, Pelabelan $L(2, 1)$ pada Operasi Beberapa Kelas Graf, *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, Vol. **13(2)**: 73 – 84
- [17] Sagala, Y. C., 2016, Pelabelan $L(2, 1)$ pada Graf Sierpiński $S(n, k)$, *KARIS-MATIKA: Kumpulan Artikel Ilmiah, Informatika, Statistik, Matematika dan Aplikasi*, Vol. **3(2)**: 130 – 139
- [18] Noviana, G., 2017, *Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf hasil operasi comb antara graf lintasan dan graf lingkaran*, *Skripsi*, di UIN Sunan Gunung Djati, tidak diterbitkan
- [19] Putri, A. Z. A., 2017, *Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf 'hasil operasi comb antara graf lintasan dan graf bintang*, *Skripsi*, di UIN Sunan Gunung Djati, tidak diterbitkan
- [20] Umam, I. A., 2021, *Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf lolipop $L(m, n)$* , *Skripsi*, di Universitas Jember, tidak diterbitkan
- [21] Chang, G. J., dan Kuo, D., 1996, The $L(2, 1)$ -Labeling Problem on Graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. **9(2)**: 309 – 316
- [22] Paul, S., Pal, M., dan Pal, A., 2015, The $L(2, 1)$ -Labeling of Interval Graphs, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, Vol. **49**: 419 – 432
- [23] Shao, Z., Yeh, R. K., dan Zhang, D., 2008, The $L(2, 1)$ -labeling on Graphs and The Frequency Assignment Problem, *Applied Mathematics Letters*, Vol. **21(1)**: 37 – 41
- [24] Wang, W. F., 2006, The $L(2, 1)$ -Labeling of Trees, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. **154(3)**: 598 – 603
- [25] Putra, G. L., 2023, *Struktur Aljabar I*, Penerbit NEM, Pekalongan