

METODE *TELESCOPING DECOMPOSITION METHOD* PADA PERSAMAAN LOGISTIK WINDARTO-ERIDANI-PURWATI DALAM ORDE FRAKSIONAL

GUSRIAN PUTRA*, LUTFI MARDIANTO, NUGRAHA CATUR SEPTIAN PATRA

*Program Studi Matematika,
Fakultas Sains, Institut Teknologi Sumatera
email : gusrian.putra@ma.itera.ac.id*

Diterima 1 April 2024 Direvisi 10 Juni 2024 Dipublikasikan 31 Oktober 2024

Abstrak. Model logistik Windarto-Eridani-Purwati (WEP) merupakan modifikasi model pertumbuhan logistik dan model monomolekuler yang digunakan untuk menggambarkan pertumbuhan organisme. Penelitian ini bertujuan mengkaji model logistik WEP dalam orde fraksional. Perbandingan dilakukan untuk mengetahui model dengan akurasi yang lebih baik. Metode yang digunakan untuk memperoleh solusi model logistik WEP dalam orde fraksional yaitu *Telescoping Decomposition Method* (TDM) dan metode Euler. Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan didapatkan model logistik WEP orde fraksional lebih baik dibandingkan model logistik WEP. Hal ini dikarenakan pada model logistik orde fraksional dapat dilakukan suatu pengaturan dalam menetapkan orde fraksionalnya sehingga model logistik WEP orde fraksional lebih fleksibel untuk menghampiri data yang empiris.

Kata Kunci: Model Logistik WEP, Orde Fraksional, *Telescoping Decomposition Method*, Metode Euler

Abstract. The Windarto-Eridani-Purwati (WEP) Logistic model is a modified logistic growth model used to describe the growth of an organism. This research aims to study the WEP logistic model in fractional order. A comparison of the two models is carried out to determine the model with better accuracy. The proposed methods we use here to obtain the solution of WEP logistic model in fractional order are *Telescoping Decomposition Method* (TDM) and Euler method. Based on the calculations, we found that the fractional order WEP logistic model is better than the WEP logistic model. In this case, one may choose a suitable value of the fractional order so that the corresponding WEP logistic model is able to approach the empirical data.

Keywords: WEP Logistic Model, Fractional Order, *Telescoping Decomposition Method*, Euler Method

*penulis korespondensi

1. Pendahuluan

Model logistik umumnya digunakan untuk menggambarkan pertumbuhan penduduk. Model ini merupakan modifikasi dari model pertumbuhan eksponensial dengan menambahkan parameter *carrying capacity*. Pada tahun 2018, Windarto dkk. dalam [1] memperumum model pertumbuhan logistik dan model monomolekuler untuk mendeskripsikan pertumbuhan berat unggas. Model yang diperumum tersebut dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dy}{dt} = (q + ry)\left(1 - \frac{y}{K}\right), \quad (1.1)$$

dengan K menyatakan berat unggas maksimal, q dan r berturut-turut menyatakan tingkat pertumbuhan konstan dan tingkat pertumbuhan proporsional. Selanjutnya, model pada Persamaan (1.1) dinamakan model logistik WEP. Kata WEP merupakan singkatan dari nama ketiga penulis yaitu Windarto, Eridani dan Purwati. Model logistik WEP orde fraksional diperoleh dengan mengubah notasi turunan Leibniz untuk turunan pertama ke bentuk operator turunan fraksional Caputo, sehingga Persamaan (1.1) dapat ditulis kembali menjadi:

$$D^\alpha y = (q + ry)\left(1 - \frac{y}{K}\right). \quad (1.2)$$

Solusi dari persamaan (1.2) tidak mudah didapatkan secara analitik, sehingga terdapat beberapa metode untuk menghampiri solusi Persamaan (1.2), di antaranya metode pertubasi, *Adomian Decomposition Method* (ADM), *Variational Iteration Method* (VIM) dan masih banyak metode lainnya. Pada [2], Vanani dkk. menggunakan TDM untuk menyelesaikan persamaan Burgers dengan waktu tunda dan dalam [3], Khan dkk. mengimplementasikan metode Euler untuk menghampiri solusi dari model DSEK fraksional. Beberapa penelitian sebelumnya telah membahas penggunaan TDM dan Metode Euler. Selain itu, dalam [1] telah dikaji kestabilan dari model pada Persamaan (1.1). Pada penelitian ini akan diimplementasikan TDM dan Metode Euler untuk menghampiri solusi dari model logistik WEP orde fraksional. Bentuk definisi turunan fraksional yang digunakan adalah operator turunan fraksional Caputo yang dibatasi untuk $0 < \alpha < 1$. Hasil yang diperoleh akan dibandingkan dengan model logistik WEP untuk menentukan model dengan akurasi yang lebih baik.

2. Kajian Pustaka

Dalam matematika, fungsi gamma merupakan perumuman dari notasi faktorial [4]. Selain itu fungsi gamma yang dinotasikan dalam huruf kapital Yunani Γ juga dikenal sebagai integral Euler jenis kedua.

Definisi 2.1. [5] Misalkan $\alpha \in \mathbb{C}$, fungsi gamma didefinisikan sebagai:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (2.1)$$

yang konvergen untuk $\text{Re}(\alpha) > 0$.

Integral fraksional dapat disebut sebagai perumuman dari Teorema Cauchy untuk integral berulang. Misalkan f kontinu pada interval tertutup $[0, t]$, $t > 0$ yaitu $f \in C[0, t]$ maka [6]:

$$\int_0^t \left(\int_0^{\xi_n} \left(\cdots \left(\int_0^{\xi_2} f(\xi_1) d\xi_1 \right) \right) d\xi_{n-1} \right) d\xi_n = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi.$$

Bentuk integral di atas hanya berlaku untuk $\alpha \in \mathbb{N}$. Integral fraksional Riemann-Liouville merupakan hasil modifikasi dari bentuk teorema Cauchy di atas dengan memandang $\alpha \in \mathbb{R}$, sehingga bentuk integral fraksional Riemann-Liouville dapat dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 2.2. [6] Jika $f \in C[0, t]$, $t \in \mathbb{R}^+$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka persamaan

$$I^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (2.2)$$

dikatakan integral fraksional Riemann-Liouville berorde α .

Dalam menghitung turunan fraksional perlu dipahami konsep integral fraksional. Hal ini berbeda dengan kalkulus klasik, dikarenakan pada kalkulus klasik operator turunan hanya terbatas untuk orde bilangan asli, sedangkan dalam kalkulus fraksional operator turunan fraksionalnya tidak hanya untuk bilangan asli saja. Terdapat banyak definisi turunan fraksional yang telah diperkenalkan, akan tetapi yang sering digunakan adalah turunan fraksional tipe Riemann-Liouville dan turunan fraksional tipe Caputo. Hal ini dikarenakan kedua definisi turunan tersebut memiliki kesesuaian dengan sifat turunan pada kalkulus klasik [6]. Pada penelitian ini digunakan turunan fraksional tipe Caputo. Bentuk turunan fraksional tipe Caputo dapat dilihat pada definisi berikut.

Definisi 2.3. [6] Jika $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dan $n-1 < \alpha < n$ dengan $n = \lceil \alpha \rceil \in \mathbb{N}$, maka:

$$D^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\xi) d\xi, \quad (2.3)$$

dengan $\Gamma(\cdot)$ adalah fungsi gamma.

Pada penelitian ini hanya digunakan $0 < \alpha < 1$, sehingga Persamaan (2.3) dapat disederhanakan menjadi:

Definisi 2.4. [6] Jika $0 < \alpha < 1$ dan f terturunkan pada $(0, T)$ maka

$$D^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} f'(\xi) d\xi. \quad (2.4)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 2.2 dan Definisi 2.3 diperoleh teorema yang menyatakan hubungan antara integral fraksional dan turunan fraksional sebagai berikut.

Teorema 2.5. [6] Jika $n = \lceil \alpha \rceil \in \mathbb{N}$ dan $n-1 < \alpha < n$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}^+$, maka:

$$I^\alpha(D^\alpha[f(t)]) = f(t) - f(0). \quad (2.5)$$

Perhatikan bahwa Teorema 2.5 merupakan teorema dasar kalkulus dalam konteks kalkulus fraksional. *Telescoping Decomposition Method* (TDM) merupakan salah satu metode iterative hasil modifikasi dari *Adomian Decomposition Method* (ADM). Metode ini lebih sederhana dan menghasilkan pendekatan solusi dengan nilai sebenarnya yang lebih efisien. Hal ini dikarenakan TDM tidak memperhitungkan polinom adomian [8]. Sebagai ilustrasi, diberikan persamaan diferensial orde fraksional sebagai berikut.

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), y(0) = Y_0. \quad (2.6)$$

Dengan menggunakan Teorema 2.5 bentuk Persamaan (2.6) dapat diperoleh sebagai berikut.

$$y(t) = y_0 + I^\alpha[f(t, y(t))]. \quad (2.7)$$

Sekarang kita asumsikan solusi Persamaan (2.6) berbentuk:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t). \quad (2.8)$$

Substitusikan Persamaan (2.8) ke Persamaan (2.7) untuk memperoleh pendekatan solusi, dengan $y_k(t)$ mengikuti algoritma berikut.

$$\begin{aligned} y_0(t) &= Y_0, \\ y_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (t-\xi)^{(\alpha-1)} f(\xi) d\xi = I^\alpha[f(t, y_0)], \\ y_2(t) &= I^\alpha[f(t, y_0 + y_1)] - I^\alpha[f(t, y_0)], \\ &\vdots \\ y_{l-1}(t) &= I^\alpha[f(t, \sum_{k=0}^{l-2} y_k(t))] - I^\alpha[f(t, \sum_{k=0}^{l-3} y_k(t))], 3 < l < n, \\ &\vdots \\ y_n(t) &= I^\alpha[f(t, \sum_{k=0}^{n-1} y_k(t))] - I^\alpha[f(t, \sum_{k=0}^{n-2} y_k(t))]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.9) diperoleh jumlah parsial ke- n dari Persamaan (2.8) sebagai berikut.

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^n y_k(t), n \geq 1. \quad (2.10)$$

Dengan demikian solusi Persamaan (2.6) dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} [f(t, \sum_{k=0}^n y_k(t))] d\xi. \quad (2.11)$$

Di lain pihak, metode numerik merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi dari persamaan diferensial fraksional [7]. Salah satu metode numerik yang sederhana adalah metode Euler. Perbedaan TDM dan metode

Euler terletak pada outputnya, yakni metode Euler menghasilkan output berupa angka, sedangkan TDM menghasilkan output berupa fungsi. Misalkan $t_j = jh$, untuk $j = 0, 1, \dots, N$ dan $h = \frac{T}{N}$ menyatakan ukuran langkah dengan N bilangan bulat positif, maka: [7]

$$y_{k+1} \approx y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^k f(t_j, y_j) b_j, \quad (2.12)$$

dengan $y_{k+1} \equiv y(t_{k+1})$ dan $b_j = (k+j-1)^\alpha - (k-j)^\alpha$. Persamaan (2.12) merupakan rumus iteratif pada metode Euler maju.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Data Penelitian

Pada penelitian ini digunakan data dari penelitian sebelumnya [1]. Berikut data yang digunakan:

Tabel 1. Data rata rata berat ayam

Hari	berat	Hari	Berat
0	37	30	324,92
3	41,74	33	372,83
6	59,19	37	417,41
9	79,94	40	469,13
12	102,96	43	519,72
15	132,13	46	577,27
18	170,18	49	633,59
21	206,56	51	667,18
24	250,71	54	717,17
27	285,27	57	786,35

3.2. Solusi Semi Analitik Model Logistik WEP Orde Fraksional

Solusi semi analitik model logistik WEP orde fraksional diperoleh dengan menggunakan TDM. Langkah awal yang dilakukan untuk memperoleh solusi dengan menggunakan TDM ialah memisalkan solusi dari Persamaan (1.2) berbentuk:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t). \quad (3.1)$$

Dengan mengekspansi ruas kanan pada Persamaan (1.2) diperoleh:

$$D^\alpha[y(t)] = q + c_1 y(t) + c_2 (y(t))^2; y(0) = Y_0, \quad (3.2)$$

dengan $c_1 = r - \frac{q}{K}$ dan $c_2 = -\frac{r}{K}$. Selanjutnya untuk memperoleh solusi semi analitik Persamaan (1.2), diimplementasikan TDM pada Persamaan (3.2) dengan

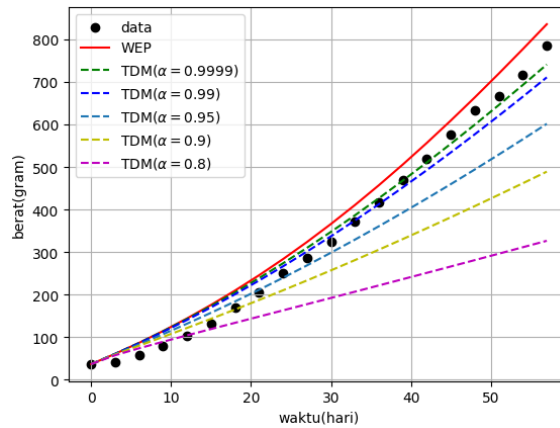
mengikuti algoritma pada persamaan (2.9), sehingga diperoleh tiga suku pertama Persamaan (3.1) yang dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 y_0 &= y(0) = Y_0, \\
 y_1 &= I^\alpha[f(t, y_0)] \\
 &= \frac{q + c_1 a + c_2 a^2}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha \\
 &= \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha; \sigma = q + c_1 a + c_2 a^2, \\
 y_2 &= I^\alpha[f(t, y_0 + y_1)] - I^\alpha[f(t, y_0)] \\
 &= \frac{(c_1 + 2c_2 a)\sigma}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha} + \frac{c_2 \sigma^2 \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)^2 \Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Lebih lanjut hampiran solusi dari Persamaan (3.2) dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \Phi_2(t) \approx \sum_{n=0}^2 y_n(t) \\
 &= Y_0 + \frac{q + c_1 a + c_2 a^2}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + \frac{(c_1 + 2c_2 a)\sigma}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha} + \frac{c_2 \sigma^2 \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)^2 \Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Berdasarkan simulasi yang dilakukan, solusi (3.4) lebih baik dalam menghampiri data dibandingkan solusi model logistik WEP meskipun hanya terbatas pada tiga suku pertama. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 1 yang menampilkan kurva solusi model logistik WEP orde fraksional dengan menggunakan TDM.



Gambar 1. Perbandingan solusi semi analitik model logistik WEP orde fraksional dan model logistik WEP dalam menghampiri data.

Berdasarkan Gambar 1, terlihat bahwa seiring α mendekati 1, kurva solusi semi analitik semakin baik dalam menghampiri data. Nilai $0,99 < \alpha < 1$ menunjukkan bahwa kurva solusi semi analitik mampu menghampiri data sehingga model logistik WEP orde fraksional lebih baik dalam menghampiri data dibandingkan model

logistik WEP. Penentuan nilai α pada solusi semi analitik menjadi faktor utama dikarenakan nilai α yang mendekati satu mengakibatkan solusi semi analitik menghampiri kurva solusi model logistik WEP.

3.3. *Perbandingan Solusi Model Logistik WEP dan Model Logistik WEP Orde Fraksional*

Pada pembahasan sebelumnya telah diperoleh solusi semi analitik dan solusi numerik dari model logistik WEP orde fraksional. Diketahui solusi semi analitik dan solusi numerik model logistik WEP orde fraksional. Berdasarkan pembahasan tersebut dapat dikatakan bahwa model logistik WEP orde fraksional lebih baik dibandingkan model logistik WEP. Hal ini dipengaruhi oleh fleksibilitas nilai α dalam model logistik WEP orde fraksional. Selain itu, pada subbab sebelumnya juga telah diperoleh nilai α yang cukup baik dalam menghampiri data menggunakan solusi semi analitik, yakni $0,99 < \alpha < 1$, sedangkan nilai α yang cukup baik dalam menghampiri data menggunakan solusi numerik yaitu $0,9999 < \alpha < 1$.

Tabel 2. Perbandingan nilai MAPE dan R Square

Orde(α)	Model	MAPE	R Square
1	WEP	0,179853	0,973571
	TDM	0,148610	0,986999
0,999999	Euler	0,151334	0,974206
	TDM	0,148609	0,986995
0,99999	Euler	0,151349	0,974194
	TDM	0,148592	0,986955
0,9999	Euler	0,151502	0,974079

Pada Tabel 2 terlihat bahwa $\alpha = 0,999999$ untuk solusi model logistik WEP orde fraksional menggunakan TDM maupun numerik memiliki nilai R Square yang lebih besar dibandingkan model logistik WEP sedangkan pada $\alpha = 0,9999$ nilai MAPE dari TDM lebih kecil dibandingkan nilai MAPE dari model logistik WEP dan Euler. Hal ini memberikan kesimpulan bahwa model logistik WEP orde fraksional lebih baik dalam menghampiri data dibandingkan model logistik WEP. Selain itu, peningkatan nilai α yang mendekati 1 mengakibatkan model logistik WEP orde fraksional menjadi model logistik WEP.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan dapat disimpulkan bahwa model logistik WEP orde fraksional memiliki akurasi yang baik dibandingkan model logistik WEP. Hal ini dipengaruhi oleh nilai orde dari model logistik WEP orde fraksional. Saran untuk peneliti selanjutnya ialah menentukan metode yang tepat dalam memperoleh solusi semi analitik model logistik WEP orde fraksional untuk nilai α yang lebih umum.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dear Michiko Mutiara Noor dan Bapak Achmad Suryadi Nasution atas masukannya selama penyusunan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Windarto, W., Eridani, E., Purwati, U., 2018, A new modified logistic growth model for empirical use, *Communication in Biomathematical Sciences* Vol. **1**(2): 122 – 131
- [2] Vanani, S.K., Soleymani, F., Khan, M., 2011, Telescoping Decomposition Method For Solving Time-Delayed Burgers Equation, , *Australian Journal of Basic and Applied Sciences* Vol. **5**(9): 1060 – 1065
- [3] Khan, F.S., Khalid, M, Bazighifan, O., El-Mesady, A.I., 2022, *Euler's Numerical Method on Fractional DSEK Model under ABC Derivative*, , *Complexity* Vol. **2022**, article ID 4475491
- [4] Owolabi, K.M., Atangana, A., 2019, *Numerical methods for fractional differentiation*, Springer Series in Computational Mathematics (SSCM, volume 54)
- [5] Podlubny, I., 1998, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Elsevier
- [6] Sikora, B., 2023, Remarks on the Caputo fractional derivative, *Minut* Vol. **5**: 76 – 84
- [7] Changpin, L., Fanhai, Z., 2013, The finite difference methods for fractional ordinary differential equations, *Numerical Functional Analysis and Optimization* Vol. **34**(2): 149 – 179
- [8] Vilinea, A.R., Rusyaman, E., Djauhari, E., 2020, Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Non-Linear Menggunakan Telescoping Decomposition Method, *Jurnal Matematika Integratif* Vol. **15**(2): 139 – 148