

APLIKASI ALGORITMA LEVERRIER-FADDEEV DALAM MENGHITUNG INVERS MATRIKS *CENTROSYMMETRIC*

YANITA*, MARZETHA INDASWARI, NOVERINA ALFIANY

*Departemen Matematika dan Sains Data,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia, 25175
email : yanita@sci.unand.ac.id, marzethai@gmail.com, noverinaalfiany@sci.unand.ac.id*

Diterima 25 April 2024 Direvisi 28 Juni 2024 Dipublikasikan 31 Oktober 2024

Abstrak. Matriks *centrosymmetric* adalah matriks bentuk khusus dari matriks simetris, dimana matriks ini memiliki struktur simetri pada pusat matriksnya. Di antara beberapa masalah terkait matriks *centrosymmetric* adalah masalah penentuan invers dan nilai eigen matriks tersebut. Pada penelitian ini dikaji masalah penentuan invers dan nilai eigen dari matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus ordo $n \times n$, $n \geq 3$ dengan menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev. Penelitian ini diawali dengan menentukan Y_i dan q_i dari setiap matriks *centrosymmetric* berukuran $n \times n$, untuk $3 \leq n \leq 8$. Selanjutnya dengan memperhatikan pola invers dan nilai eigennya diperoleh bentuk umum invers dan nilai eigen dari matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus ordo $n \times n$, $n \geq 3$ untuk dua kasus, yaitu untuk $n = 2m + 1$ dan $n = 2m$.

Kata Kunci: Algoritma Leverrier-Faddeev, invers, matriks *centrosymmetric*, nilai eigen

Abstract. The *centrosymmetric matrix* is a unique form matrix of a symmetrical matrix, where this matrix has a symmetrical structure at the center of the matrix. Among the several problems related to the *centrosymmetric matrix* is the problem of determining the inverse and its eigenvalues. This study studied the problem of determining the inverse and eigenvalue of the *centrosymmetric matrix* with a particular form of order $n \times n$, $n \geq 3$ using the Leverrier-Faddeev algorithm. This study began by determining the Y_i and q_i of each *centrosymmetric matrix* measuring n times n , for $3 \leq n \leq 8$. Furthermore, attention should be paid to the inverse pattern and its eigenvalue, the general form of inverse and eigenvalue of the *centrosymmetric matrix* with the particular form of the order $n \times n$, $n \geq 3$, in two cases, namely for $n = 2m + 1$ and $n = 2m$, are determined.

Keywords: Leverrier-Faddeev Algorithm, inverse, centrosymmetric matrix, eigenvalues

1. Pendahuluan

Aljabar linier adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari sistem persamaan linier, vektor, dan transformasi linier. Salah satu konsep dasar dalam

*penulis korespondensi

aljabar linier adalah matriks. Dalam teori matriks terdapat berbagai macam jenis matriks, salah satunya adalah matriks simetris. Matriks simetris adalah matriks persegi yang memiliki sifat simetri. Salah satu bentuk khusus dari matriks simetris ini adalah matriks *centrosymmetric*.

Matriks *centrosymmetric* merupakan jenis matriks simetris yang memiliki struktur simetri pada pusat matriksnya. Bentuk umum dari matriks *centrosymmetric* adalah sebagai berikut [1].

$$X_n = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & \cdots & x_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2n} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{21} \\ x_{1n} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{11} \end{bmatrix},$$

dengan $x_{ij} \in \mathbb{R}$, untuk $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan k adalah indeks untuk entri di pertengahan matriks.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, matriks *centrosymmetric* memberikan kontribusi pada berbagai bidang ilmu pengetahuan. Dalam [2], telah diperoleh bahwa matriks *centrosymmetric* merupakan teknik dasar untuk interpolasi sinyal Hermitian. Selain itu, dalam [3] diperoleh bahwa matriks *centrosymmetric* bermanfaat dalam penyelesaian permasalahan pemilihan fitur *pattern recognition* dan analisis vibrasi.

Salah satu kajian yang banyak diteliti terkait matriks *centrosymmetric* ini adalah bagaimana menentukan invers matriks tersebut. Namun, masalah yang sering dihadapi saat mencari invers dari suatu matriks adalah terkait dengan ordo dari matriks itu sendiri. Semakin besar ordo matriks, maka semakin sulit pula untuk menentukan inversnya.

Salah satu metode yang cocok untuk mengatasi permasalahan di atas adalah algoritma Leverrier-Faddeev. Algoritma Leverrier-Faddeev awalnya dikembangkan pada tahun 1980 oleh D.K. Faddeev dan Urbain Le Verrier dengan tujuan utama untuk menghitung nilai eigen dari suatu matriks [4]. Algoritma Leverrier-Faddeev ini memiliki keunggulan dalam menangani kasus khusus, seperti ketika matriks memiliki nilai eigen ganda atau ketika matriks tidak memiliki *full rank*. Namun, selain untuk menghitung nilai eigen, algoritma Leverrier-Faddeev juga dapat digunakan untuk menghitung invers dari suatu matriks yang berordo besar. Untuk ordo matriks yang lebih besar daripada 5×5 , algoritma ini merupakan algoritma yang efisien dan efektif dalam penentuan invers dan nilai eigen dari matriks tersebut.

Dalam makalah ini, akan dikaji masalah penentuan invers dan nilai eigen dari matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus berordo $n \times n$, $n \geq 3$ dengan menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev.

2. Landasan Teori

Berikut diberikan beberapa definisi terkait matriks yang dikutip dari [1]. Matriks adalah susunan bilangan atau simbol dalam suatu baris dan kolom sehingga membentuk suatu bangun persegi panjang. Suatu matriks X berordo $m \times n$ berarti matriks tersebut memiliki m baris dan n kolom yang dinotasikan sebagai $X_{m \times n}$ dan dapat dituliskan sebagai berikut [1].

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Pada Definisi 2.1 diberikan definisi operasi penambahan terhadap dua matriks.

Definisi 2.1. [1] Jika X dan Y adalah matriks dengan ordo yang sama, maka hasil penjumlahan dari $X+Y$ diperoleh dengan menambahkan setiap entri pada X dengan entri yang bersesuaian pada Y . Sedangkan, hasil untuk pengurangan dari $X - Y$ diperoleh dengan mengurangkan setiap entri pada X dengan entri yang bersesuaian pada Y . Penting untuk diingat bahwa matriks dengan ordo yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Dalam notasi matriks, jika $X = [x_{ij}]$ dan $Y = [y_{ij}]$ adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$, maka:

$$X + Y = [x_{ij}] + [y_{ij}] = [x_{ij} + y_{ij}],$$

$$X - Y = [x_{ij}] - [y_{ij}] = [x_{ij} - y_{ij}],$$

dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.

Pada Definisi 2.2 diberikan definisi operasi perkalian terhadap dua matriks.

Definisi 2.2. [1] Jika X adalah matriks $m \times r$ dan Y adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali XY adalah sebuah matriks berordo $m \times n$. Untuk menentukan nilai entri pada baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks XY , langkahnya adalah dengan memisahkan baris ke- i dari matriks X dan kolom ke- j dari matriks Y . Kemudian, setiap entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dikalikan dan hasilnya dijumlahkan.

Pada Definisi 2.3 diberikan definisi matriks identitas.

Definisi 2.3. [1] Matriks identitas berordo $n \times n$, ditulis sebagai I atau I_n , adalah suatu matriks bujur sangkar yang memiliki entri 1 di sepanjang diagonal utama (diagonal dari kiri atas ke kanan bawah) dan 0 ditempat lain.

$$I = [i_{ij}], \text{ dengan } i_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j, \\ 0; & i \neq j, \end{cases} \quad (2.2)$$

untuk $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Pada Definisi 2.4 diberikan definisi matriks invers.

Definisi 2.4. [1] Misalkan X dan Y adalah matriks bujur sangkar yang berordo sama, jika $XY = YX = I$, maka X memiliki sifat invertible atau disebut juga

sebagai matriks yang dapat dibalik. Matriks Y disebut sebagai invers dari X , yang dapat ditulis sebagai $Y = X^{-1}$. Namun, jika matriks Y tidak dapat ditentukan atau didefinisikan, maka X disebut sebagai matriks singular.

Pada Definisi 2.5 diberikan definisi rotasi terhadap suatu matriks.

Definisi 2.5. [1] Diberikan matriks X berordo $n \times n$, dengan $x_{ij} \in \mathbb{R}$. Rotasi dari matriks X dinotasikan dengan X^R dan didefinisikan sebagai

$$X^R = J_n X J_n, \quad (2.3)$$

dimana $J_n = (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \dots, \mathbf{e}_1)$ dan $\mathbf{e}_i$ merupakan vektor unit dengan entri ke- i bernilai 1 dan entri yang lainnya bernilai 0.

Pada Definisi 2.6 diberikan definisi trace dari suatu matriks.

Definisi 2.6. [1] Misalkan $X = [x_{ij}]$ merupakan sebuah matriks bujur sangkar. Trace dari matriks X didefinisikan sebagai jumlah entri dari diagonal matriks X yang dinotasikan dengan $\text{tr}(X)$. Jadi, trace dari matriks X dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{tr}(X) = \sum_{i=1}^n x_{ii}, \quad (2.4)$$

dengan n adalah ordo dari matriks X .

Pada Definisi 2.7 diberikan definisi nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks.

Definisi 2.7. [1] Jika X adalah matriks $n \times n$ maka vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen dari X jika

$$X\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen dari X dan $\mathbf{v}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Teorema 2.8. [1] Jika X adalah matriks $n \times n$, maka λ merupakan nilai eigen dari X jika dan hanya jika memenuhi polinomial karakteristik berikut:

$$\det(\lambda I - X) = 0,$$

dimana I adalah matriks identitas berordo $n \times n$.

Pada Definisi 2.9 diberikan definisi transformasi Laplace dari suatu matriks.

Definisi 2.9. [6] Misalkan

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{bmatrix}, \text{ untuk } t \geq 0,$$

transformasi Laplace dari $f(t)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{f_{11}(t)\} & \mathcal{L}\{f_{12}(t)\} & \cdots & \mathcal{L}\{f_{1n}(t)\} \\ \mathcal{L}\{f_{21}(t)\} & \mathcal{L}\{f_{22}(t)\} & \cdots & \mathcal{L}\{f_{2n}(t)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}\{f_{n1}(t)\} & \mathcal{L}\{f_{n2}(t)\} & \cdots & \mathcal{L}\{f_{nn}(t)\} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Sebagai contoh, diberikan transformasi Laplace untuk suatu matriks konstanta X berordo $n \times n$.

Contoh 2.10. Misalkan $f(t) = e^{tX}$, dimana X adalah matriks konstanta berordo $n \times n$, maka:

$$\mathcal{L}\{e^{tX}\} = (sI - X)^{-1}. \quad (2.6)$$

Pada Definisi 3.5 diberikan definisi himpunan resolven dari suatu matriks.

Definisi 2.11. [7] Himpunan resolven dari matriks X berordo $n \times n$, dengan $x_{ij} \in \mathbb{C}$, dilambangkan dengan $\rho(X)$, adalah himpunan titik $s \in \mathbb{C}$, dimana $sI - X$ adalah invertible. Komplemen dari himpunan resolven disebut spektrum yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma(X) = \mathbb{C}/\rho(X). \quad (2.7)$$

Resolven dari X adalah pemetaan dari $\rho(X)$ ke matriks berukuran $n \times n$, dengan setiap entrinya adalah elemen $\mathbb{C}$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$R(X, s) = (sI - X)^{-1}. \quad (2.8)$$

3. Algoritma Leverrier-Faddeev untuk invers matriks Centrosymmetric dengan orde $n \times n$, untuk $n \geq 3$

Pada Definisi 3.1 diberikan definisi matriks *centrosymmetric*.

Definisi 3.1. [9] Suatu matriks $X = (x_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ disebut matriks *centrosymmetric*, jika setiap entri di X memenuhi hubungan berikut:

$$x_{ij} = x_{(n-i+1)(n-j+1)}, \quad (3.1)$$

untuk setiap $i, j = 1, 2, \dots, n$, yang ekuivalen dengan $J_n X J_n = X$, dimana $J_n = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ dan e_i merupakan vektor unit dengan entri ke- i bernilai 1 dan entri yang lainnya bernilai 0.

Berdasarkan definisi di atas, maka dapat dibuat suatu matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus berordo $n \times n$, $n \geq 3$ sebagai berikut.

(1) untuk $n = 2m + 1$.

$$X_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & \cdots & a & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

(2) untuk $n = 2m$

$$X_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & a & \cdots & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

dengan $a \neq 0$.

Pada Teorema 3.2 diberikan nilai koefisien dari polinomial karakteristik suatu matriks.

Teorema 3.2. [4] Misalkan matriks X adalah matriks berordo $n \times n$ dengan polinomial karakteristik:

$$p(\lambda) = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + q_2 \lambda^{n-2} + \cdots + q_n,$$

koefisien q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ dari polinomial karakteristik di atas diberikan oleh berikut ini:

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\text{tr}(Y_0)}{1}, \text{ dengan } Y_0 = X, \\ q_2 &= -\frac{\text{tr}(Y_1)}{2}, \text{ dengan } Y_1 = XY_0 + q_1 X, \\ q_3 &= -\frac{\text{tr}(Y_2)}{3}, \text{ dengan } Y_2 = XY_1 + q_2 X, \\ &\vdots \\ q_n &= -\frac{\text{tr}(Y_{n-1})}{n}, \text{ dengan } Y_{n-1} = XY_{n-2} + q_{n-1} X. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bukti. Misalkan, diberikan sebuah matriks X berordo $n \times n$ dengan $\det(\lambda I - X) = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + q_2 \lambda^{n-2} + \cdots + q_n = p(\lambda)$. Kemudian, misalkan $(\lambda I - X)^{-1}$ merupakan resolven dari X yang dinyatakan sebagai berikut:

$$(\lambda I - X)^{-1} = \frac{N(\lambda)}{p(\lambda)}, \quad (3.5)$$

dimana matriks adjugat $N(\lambda)$ adalah polinomial λ berderajat $n-1$ dengan koefisien matriks $N_0, N_1, \dots, N_{n-1}$ dimana $N_i = X^{-1}Y_i$. Untuk menguraikan persamaan (3.5), digunakan transformasi Laplace dari matriks eksponensial, yaitu: $\mathcal{L}\{e^{tX}\} = (\lambda I - X)^{-1}$.

Diketahui $\frac{d(e^{tX})}{dt} = X e^{tX}$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d(e^{tX})}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{X e^{tX}\}, \\ \lambda \mathcal{L}\{e^{tX}\} - I &= X \mathcal{L}(e^{tX}), \\ \lambda \mathcal{L}\{e^{tX}\} - I &= X \left(\frac{N(\lambda)}{p(\lambda)}\right), \\ \lambda \mathcal{L}\{e^{tX}\} - I &= \frac{Y(\lambda)}{p(\lambda)}, \\ \lambda \operatorname{tr}(\mathcal{L}\{e^{tX}\}) - \operatorname{tr}(I) &= \operatorname{tr}\left(\frac{Y(\lambda)}{p(\lambda)}\right), \\ \lambda \left(\frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)}\right) - n &= \operatorname{tr}\left(\frac{Y(\lambda)}{p(\lambda)}\right), \\ \lambda p'(\lambda) - np(\lambda) &= \operatorname{tr}(Y(\lambda)), \\ -q_1 \lambda^{n-1} - 2q_2 \lambda^{n-2} - \dots - nq_n &= \operatorname{tr}(Y_0 \lambda^{n-1}) + \operatorname{tr}(Y_1 \lambda^{n-2}) + \dots + \operatorname{tr}(Y_{n-1}).\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan mengambil komponen-komponen yang bersesuaian diperoleh:

$$\begin{aligned}-q_1 \lambda^{n-1} &= \operatorname{tr}(Y_0 \lambda^{n-1}), \\ -q_1 \lambda^{n-1} &= \lambda^{n-1} \operatorname{tr}(Y_0), \\ q_1 &= -\frac{\operatorname{tr}(Y_0)}{1}, \\ &\vdots \\ -nq_n &= \operatorname{tr}(Y_{n-1}), \\ q_n &= -\frac{\operatorname{tr}(Y_{n-1})}{n}.\end{aligned}\quad \square$$

Pada Teorema 3.3 diberikan kriteria untuk iterasi algoritma Leverrier-Faddeev.

Teorema 3.3. [4] *Misalkan algoritma Leverrier-Faddeev merupakan suatu algoritma yang bersifat iteratif yang melibatkan $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$, maka proses iterasi tersebut akan berhenti ketika:*

$$Y_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = O. \quad (3.6)$$

Bukti. Misalkan X adalah sebuah matriks persegi berordo $n \times n$ dengan polinomial karakteristik $p(\lambda) = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + q_2 \lambda^{n-2} + \dots + q_n$. Dengan mencari solusi dari $p(\lambda)$,

diperoleh akar-akar λ_j untuk $j = 1, 2, \dots, n$. Misalkan untuk setiap λ memiliki:

$$Y = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-1-i} Y_i.$$

Berdasarkan algoritma (3.4), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \lambda^n Y_0 &= \lambda^n X, \\ \lambda^{n-1} Y_1 &= \lambda^{n-1} X Y_0 + \lambda^{n-1} q_1 X, \\ \lambda^{n-2} Y_2 &= \lambda^{n-2} X Y_1 + \lambda^{n-2} q_2 X, \\ &\vdots \\ Y_n &= X Y_{n-1} + q_n X. \end{aligned}$$

Kemudian, jumlahkan semua ruas kiri dan kanan.

$$\begin{aligned} \lambda^n Y_0 + \lambda^{n-1} Y_1 + \lambda^{n-2} Y_2 + \dots + Y_n &= \lambda^n X + \lambda^{n-1} X Y_0 + \lambda^{n-1} q_1 X + \lambda^{n-2} X Y_1 \\ &\quad + \lambda^{n-2} q_2 X + \dots + X Y_{n-1} + q_n X, \\ Y_n &= (\lambda I - X) Y + X (p(\lambda)). \end{aligned}$$

Karena $\det(\lambda I - X) = 0$ dan $p(\lambda) = 0$, maka terbukti bahwa $Y_n = O$. $\square$

Pada Teorema 3.4 diberikan penentuan invers matriks X menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev.

Teorema 3.4. [4] Misalkan matriks X adalah matriks berordo $n \times n$. Dengan menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev, maka invers matriks X adalah:

$$X^{-1} = -\frac{1}{q_n} (Y_{n-2} + q_{n-1} I). \quad (3.7)$$

Bukti. Dari Teorema 3.3 diketahui bahwa $Y_n = O$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} Y_n &= O, \\ X Y_{n-1} + q_n X &= O, \\ q_n X &= -X Y_{n-1}, \\ q_n X &= -X (X Y_{n-2} + q_{n-1} X), \\ X^{-1} X q_n &= -X^{-1} X (X Y_{n-2} + q_{n-1} X), \\ X^{-1} X q_n &= -I (X Y_{n-2} + q_{n-1} X), \\ X^{-1} X q_n &= -X (Y_{n-2} + q_{n-1} I), \\ X^{-1} &= -\frac{(Y_{n-2} + q_{n-1} I)}{q_n}. \end{aligned} \quad \square$$

3.1. Penerapan Algoritma Leverrier-Faddeev dalam Menghitung Invers dan Nilai Eigen Matriks Centrosymmetric dengan Bentuk Khusus

Pada bagian ini, akan ditentukan bentuk umum invers dan nilai eigen dari matriks *centrosymmetric* pada Persamaan (3.2) dan (3.3) yang berordo 3×3 sampai dengan 8×8 dengan menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev.

(1) Untuk ordo $n = 3$.

Dengan menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev (3.4), diperoleh:

a. Invers dari X_3 , yaitu:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a^{-1} \\ -a^{-1} & a^{-1} & -a^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Nilai eigen dari X_3 , yaitu a dan $-a$, yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0, \\ \lambda^3 - a\lambda^2 - a^2\lambda + a^3 &= 0, \\ (\lambda - a)^2(\lambda + a) &= 0. \end{aligned}$$

(2) Untuk ordo $n = 4$.

Dengan menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev (3.4), diperoleh:

a. Invers dari X_4 , yaitu:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Nilai eigen dari X_4 , yaitu a dan $-a$, yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0, \\ \lambda^4 - 2a^2\lambda^2 + a^4 &= 0, \\ (\lambda - a)^2(\lambda + a)^2 &= 0. \end{aligned}$$

(3) Untuk ordo $n = 5$.

Dengan menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev (3.4), diperoleh:

a. Invers dari X_5 , yaitu:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Nilai eigen dari X_5 , yaitu a dan $-a$, yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0, \\ \lambda^5 - a\lambda^4 - 2a^2\lambda^3 + 2a^3\lambda^2 + a^4\lambda - a^5 &= 0, \\ (\lambda - a)^3(\lambda + a)^2 &= 0. \end{aligned}$$

(4) Untuk ordo $n = 6$.

Dengan menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev (3.4), diperoleh:

a. Invers dari X_6 , yaitu:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b. Nilai eigen dari X_6 , yaitu a dan $-a$, yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0, \\ \lambda^6 - 3a^2\lambda^4 + 3a^4\lambda^2 - a^6 &= 0, \\ (\lambda - a)^3(\lambda + a)^3 &= 0. \end{aligned}$$

- (5) Untuk ordo $n = 7$.

Dengan menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev (3.2.1), diperoleh

a. Invers dari X_7 , yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-1} & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b. Nilai eigen dari X_7 , yaitu a dan $-a$, yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0, \\ \lambda^7 - a\lambda^6 - 3a^2\lambda^5 + 3a^3\lambda^4 + 3a^4\lambda^3 - 3a^5\lambda^2 - a^6\lambda + a^7 &= 0, \\ (\lambda - a)^4(\lambda + a)^3 &= 0. \end{aligned}$$

- (6) Untuk ordo $n = 8$.

Dengan menggunakan algoritma Leverrier-Faddeev (3.2.1), diperoleh:

a. Invers dari X_8 , yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b. Nilai eigen dari X_8 , yaitu a dan $-a$, yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0, \\ \lambda^8 - 4a^2\lambda^6 + 6a^4\lambda^4 - 4a^6\lambda^2 + a^8 &= 0, \\ (\lambda - a)^4(\lambda + a)^4 &= 0. \end{aligned}$$

3.2. Teorema Karakteristik Matriks Centrosymmetric dengan Bentuk Khusus Ordo $n \times n$

Berdasarkan pola invers dan nilai eigen yang diperoleh sebelumnya, dapat dibuat sebuah teorema baru sebagai berikut.

Teorema 3.5. Misalkan diberikan sebuah matriks centrosymmetric dengan bentuk khusus berordo $n \times n$, $n \geq 3$, dan m adalah bilangan bulat positif, maka:

(1) Untuk kasus $n = 2m + 1$.

$$(a) (X_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} & \cdots & -a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a^{-1} & a^{-1} & -a^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-1} & \cdots & a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(b) Nilai eigen dari X_n adalah a dan $-a$ yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut.

$$p(\lambda) = (\lambda - a)^{\frac{n+1}{2}} + (\lambda + a)^{\frac{n-1}{2}}.$$

(2) Untuk kasus $n = 2m$.

$$(a) (X_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & \cdots & -a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{-1} & \cdots & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -a^{-1} & a^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & a^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(b) Nilai eigen dari X_n adalah a dan $-a$ yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut.

$$p(\lambda) = (\lambda - a)^{\frac{n}{2}} + (\lambda + a)^{\frac{n}{2}}.$$

Bukti.

(1) Untuk kasus $n = 2m + 1$.

(a) Dengan menggunakan Definisi (2.4), akan ditunjukkan:

$$X_n \times (X_n)^{-1} = (X_n)^{-1} \times X_n = I.$$

Perhatikan bahwa:

[illegible]

Dengan demikian, terbukti invers dari matriks *centrosymmetric* bentuk khusus X_n adalah $(X_n)^{-1}$.

- (b) Dengan menggunakan induksi matematika, akan ditunjukkan bahwa agar λ menjadi nilai eigen dari matriks X_n , maka polinomial karakteristiknya haruslah sama dengan 0, yaitu:

$$(\lambda - a)^{\frac{n+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{n-1}{2}} = 0.$$

Misalkan pernyataan $P(n) : (\lambda - a)^{\frac{n+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{n-1}{2}} = 0$.

- (i) Langkah Basis: Akan ditunjukkan bahwa $P(3)$ bernilai benar.

Untuk $n = 3$, maka $P(3) : (\lambda - a)^2 (\lambda + a) = 0$.

Pernyataan benar untuk $n = 3$, karena:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda I - X_3) = \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ a & a & a \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -a \\ -a & \lambda - a & -a \\ -a & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = (\lambda - a)^2 (\lambda + a). \end{aligned}$$

- (ii) Langkah Induksi: Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat ganjil $n = k \geq 3$, jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k+2)$ juga bernilai benar.

Asumsikan bahwa $P(k)$ bernilai benar untuk sebarang bilangan bulat ganjil positif $n = k \geq 3$, yaitu

$$P(k) : (\lambda - a)^{\frac{k+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{k-1}{2}} = 0.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k+2$, maka $P(k+2)$ juga bernilai benar, yaitu

$$P(k+2) : (\lambda - a)^{\frac{(k+2)+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{(k+2)-1}{2}} = 0.$$

Dengan asumsi $P(k)$ benar, maka ruas kiri dari $P(k+2)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} (\lambda - a)^{\frac{(k+2)+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{(k+2)-1}{2}} &= \underbrace{\left\langle (\lambda - a)^{\frac{k+1}{2}} \right\rangle \left\langle (\lambda + a)^{\frac{k-1}{2}} \right\rangle}_{=0} (\lambda^2 - a^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

kedua ruas dari $P(k+2)$ sama, maka $P(k+2)$ bernilai benar.

Dengan demikian, karena langkah basis dan langkah induksi terpenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa

$$(\lambda - a)^{\frac{n+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{n-1}{2}} = 0.$$

2. Untuk kasus $n = 2m$.

- (a) Dengan menggunakan Definisi (2.4), akan ditunjukkan

$$X_n \times (X_n)^{-1} = (X_n)^{-1} \times X_n = I.$$

Perhatikan bahwa:

[illegible]

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Dengan demikian, terbukti invers dari matriks *centrosymmetric* bentuk khusus X_n adalah $(X_n)^{-1}$.

- (b) Dengan menggunakan induksi matematika, akan ditunjukkan agar λ menjadi nilai eigen dari matriks X_n , maka polinomial karakteristiknya haruslah sama dengan 0, yaitu:

$$(\lambda - a)^{\frac{n}{2}}(\lambda + a)^{\frac{n}{2}} = 0.$$

Misalkan pernyataan $P(n) : (\lambda - a)^{\frac{n}{2}}(\lambda + a)^{\frac{n}{2}} = 0$

- (i) Langkah Basis: Akan ditunjukkan bahwa $P(4)$ bernilai benar.

Untuk $n = 4$, maka $P(4) : (\lambda - a)^2(\lambda + a)^2 = 0$.

Pernyataan benar untuk $n = 4$, karena:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda I - X_4) \\ &= \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & a \\ a & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & -a \\ 0 & \lambda & -a & -a \\ -a & -a & \lambda & 0 \\ -a & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^4 - 2a^2\lambda^2 + a^4 = (\lambda - a)^2(\lambda + a)^2. \end{aligned}$$

- (ii) Langkah Induksi: Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat genap $n = k \geq 4$, jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k + 2)$ juga bernilai benar.

Asumsikan bahwa $P(k)$ bernilai benar untuk sebarang bilangan bulat genap positif $n = k \geq 4$, yaitu:

$$P(k) : (\lambda - a)^{\frac{k}{2}}(\lambda + a)^{\frac{k}{2}} = 0.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 2$, maka $P(k + 2)$ juga bernilai benar, yaitu

$$P(k + 2) : (\lambda - a)^{\frac{k+2}{2}}(\lambda + a)^{\frac{k+2}{2}} = 0.$$

Dengan asumsi $P(k)$ benar, maka ruas kiri dari $P(k+2)$ diperoleh:

$$(\lambda - a)^{\frac{k+2}{2}}(\lambda + a)^{\frac{k+2}{2}} = \underbrace{\left\langle (\lambda - a)^{\frac{k}{2}} \right\rangle \left\langle (\lambda + a)^{\frac{k}{2}} \right\rangle}_{=0} (\lambda^2 - a^2) = 0,$$

karena kedua ruas dari $P(k+2)$ sama, maka $P(k+2)$ bernilai benar. Dengan demikian, karena langkah basis dan langkah induksi terpenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa:

$$(\lambda - a)^{\frac{n}{2}}(\lambda + a)^{\frac{n}{2}} = 0. \quad \square$$

4. Kesimpulan

Pada makalah ini, telah diperoleh bentuk umum invers dan nilai eigen dari matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus ordo $n \times n$, $n \geq 3$ dalam dua kasus, yaitu kasus $n = 2m + 1$ dan kasus $n = 2m$.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Monika Rianti Helmi, Bapak Muhafzan, dan Ibu Ferra Yanuar yang telah memberikan masukan dan saran terhadap penulisan makalah ini, sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H., Rorres, C., 2013, *Aljabar Linear Elementer Edisi Versi Aplikasi*, Edisi Ke-11, Erlangga, Jakarta
- [2] Hanna, M. T., Mansoori, S.A., 2003, A centrosymmetric matrix based technique for the interpolation of hermitian signal, *Numerical Linear Algebra with Appl* Vol. **10**: 701 – 720
- [3] Datta, L., Morgera, S.D., 1989, On the reducibility of centrosymmetric matrices-applications in engineering problems, *Circuits System and Signal Process* Vol. **8**: 71 – 96
- [4] Gower, J. C., 2006, An application of the modified Leverrier-Faddeev algorithm to the spectral decomposition of symmetric block-circulant matrices, *Computational Statistics and Data analysis* Vol. **50**: 89 – 106
- [5] Bronson, R., Gabriel B. C., 2007, *Linear Algebra An Introduction*, Edisi ke-2, Elsevier's Science and Technology Rights Departemen in Oxford, UK
- [6] Hendricks, E., Jannerup, O., Sørensen, P. H., 2008, *Linear Systems Control*, Springer, Berlin
- [7] Teschl, G., 2014, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics: With Application to Schrödinger Operators*, American Mathematical Society
- [8] Rosen, K. H., 2007, *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi ke-7, McGraw-Hill, Singapore
- [9] Tian, Z., Gu, C., 2007, The iterative methods for centrosymmetric matrices, *Applied Mathematics and Computation* Vol. **187**: 902 – 911