

## APLIKASI ALGORITMA LEVERRIER FADDEEV DALAM MENGHITUNG INVERS MATRIKS *CENTROSYMMETRIC*

MARZETHA INDASWARI\*, YANITA, NOVERINA ALFIANY

*Departemen Matematika dan Sains Data,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,  
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia, 25175  
email : marzethai@gmail.com, yanita@sci.unand.ac.id, noverinaalfiany@sci.unand.ac.id*

Diterima ..... Direvisi ..... Dipublikasikan .....

**Abstrak.** Matriks *centrosymmetric* adalah matriks bentuk khusus dari matriks simetris, yang mana matriks ini memiliki struktur simetri pada pusat matriksnya. Di antara beberapa masalah terkait matriks *centrosymmetric* adalah masalah penentuan invers dan nilai eigennya. Pada penelitian ini dikaji masalah penentuan invers dan nilai eigen dari matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus ordo  $n \times n$ ,  $n \geq 3$  dengan menggunakan algoritma Leverrier Faddeev. Penelitian ini diawali dengan menentukan  $Y_i$  dan  $q_i$  dari setiap matriks *centrosymmetric* berukuran  $n \times n$ ,  $3 \leq n \leq 8$ . Selanjutnya dengan memperhatikan pola invers dan nilai eigennya diperoleh bentuk umum invers dan nilai eigen dari matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus ordo  $n \times n$ ,  $n \geq 3$  dalam dua kasus, yaitu untuk  $n = 2m + 1$  dan  $n = 2m$ .

*Kata Kunci:* Algoritma Leverrier Faddeev, invers, matriks *centrosymmetric*, nilai eigen

### 1. Pendahuluan

Aljabar linier adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari sistem persamaan linier, vektor, dan transformasi linier. Salah satu konsep dasar dalam aljabar linier adalah matriks. Dalam teori matriks terdapat berbagai macam jenis matriks, salah satunya adalah matriks simetris. Matriks simetris adalah matriks persegi yang memiliki sifat simetri. Salah satu bentuk khusus dari matriks simetris ini adalah matriks *centrosymmetric*.

Matriks *centrosymmetric* merupakan jenis matriks simetris yang memiliki struktur simetri pada pusat matriksnya. Bentuk umum dari matriks *centrosymmetric* adalah sebagai berikut:

\*penulis korespondensi

$$X_n = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & \cdots & x_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2n} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{21} \\ x_{1n} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{11} \end{bmatrix}$$

dengan  $x_{ij} \in \mathbb{R}$ , untuk  $i, j = 1, 2, \dots, n$  dan  $k$  adalah indeks untuk entri di pertengahan matriks [1].

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, matriks *centrosymmetric* memberikan kontribusi pada berbagai bidang ilmu pengetahuan. Dalam [5], telah diperoleh bahwa matriks *centrosymmetric* merupakan teknik dasar untuk interpolasi sinyal Hermitian. Selain itu, pada penelitian [3] yang berjudul "On the Reducibility of Centrosymmetric Matrices-Applications in Engineering Problems", mengungkap bahwa matriks *centrosymmetric* bermanfaat dalam menyelesaikan permasalahan pemilihan fitur *pattern recognition* dan analisis vibrasi.

Salah satu kajian yang banyak diteliti dari matriks *centrosymmetric* ini, yakni bagaimana mendapatkan inversnya. Namun, masalah yang sering dihadapi saat mencari invers dari suatu matriks adalah terkait dengan ordo dari matriks itu sendiri. Semakin besar ordo matriks, maka semakin sulit pula untuk menentukan inversnya.

Salah satu metode yang cocok untuk mengatasi permasalahan di atas adalah algoritma Leverrier Faddeev. Algoritma Leverrier Faddeev ini awalnya dikembangkan pada tahun 1980 oleh D.K. Faddeev dan Urbain Le Verrier dengan tujuan utama untuk menghitung nilai eigen dari suatu matriks [4]. Algoritma Leverrier Faddeev ini memiliki keunggulan dalam menangani kasus khusus, seperti ketika matriks memiliki nilai eigen ganda atau ketika matriks tidak memiliki *full rank*. Namun, selain untuk menghitung nilai eigen, algoritma Leverrier-Faddeev juga dapat digunakan untuk menghitung invers dari suatu matriks yang berordo besar. Untuk ordo matriks yang lebih besar daripada  $5 \times 5$ , algoritma ini merupakan algoritma yang efisien dan efektif dalam penentuan invers dan nilai eigen dari matriks tersebut.

Dalam makalah ini, akan dikaji masalah penentuan invers dan nilai eigen dari matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus berordo  $n \times n$ ,  $n \geq 3$  dengan menggunakan algoritma Leverrier Faddeev

## 2. Landasan Teori

### 2.1. Matriks dan Operasi Matriks

Matriks adalah susunan bilangan atau simbol dalam suatu baris dan kolom sehingga membentuk suatu bangun persegi panjang. Suatu matriks  $X$  berordo  $m \times n$  berarti matriks tersebut memiliki  $m$  baris dan  $n$  kolom yang dinotasikan sebagai  $X_{m \times n}$

dan dapat dituliskan sebagai berikut [2]:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

**Definisi 2.1.** [1] Jika  $X$  dan  $Y$  adalah matriks dengan ordo yang sama, maka hasil penjumlahan dari  $X+Y$  diperoleh dengan menambahkan setiap entri pada  $X$  dengan entri yang bersesuaian pada  $Y$ . Sedangkan, hasil untuk pengurangan dari  $X - Y$  diperoleh dengan mengurangi setiap entri pada  $X$  dengan entri yang bersesuaian pada  $Y$ . Penting untuk diingat bahwa matriks dengan ordo yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Dalam notasi matriks, jika  $X = [x_{ij}]$  dan  $Y = [y_{ij}]$  adalah matriks-matriks yang berordo  $m \times n$ , maka

$$X + Y = [x_{ij}] + [y_{ij}] = [x_{ij} + y_{ij}]$$

dan

$$X - Y = [x_{ij}] - [y_{ij}] = [x_{ij} - y_{ij}]$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, m$  dan  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Definisi 2.2.** [1] Jika  $X$  adalah matriks  $m \times r$  dan  $Y$  adalah matriks  $r \times n$ , maka hasil kali  $XY$  adalah sebuah matriks berordo  $m \times n$ . Untuk menentukan nilai entri pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari matriks  $XY$ , langkahnya adalah dengan memisahkan baris ke- $i$  dari matriks  $X$  dan kolom ke- $j$  dari matriks  $Y$ . Kemudian, setiap entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dikalikan dan hasilnya dijumlahkan.

**Definisi 2.3.** [1] Matriks identitas berordo  $n \times n$ , ditulis sebagai  $I$  atau  $I_n$ , adalah suatu matriks bujur sangkar yang memiliki entri 1 di sepanjang diagonal utama (diagonal dari kiri atas ke kanan bawah) dan 0 ditempat lain.

$$I = [i_{ij}], \quad (2.2)$$

dimana

$$i_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

untuk  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

## 2.2. Invers Matriks

**Definisi 2.4.** [1] Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah matriks bujur sangkar yang berordo sama, jika  $XY = YX = I$ , maka  $X$  memiliki sifat invertible atau disebut juga sebagai matriks yang dapat dibalik.  $Y$  disebut sebagai invers dari  $X$ , yang dapat ditulis sebagai  $Y = X^{-1}$ . Namun, jika matriks  $Y$  tidak dapat ditentukan atau didefinisikan, maka  $X$  disebut sebagai matriks singular.

### 2.3. Rotasi Matriks

**Definisi 2.5.** [1] Diberikan matriks  $X$  berordo  $n \times n$ , dengan  $x_{ij} \in \mathbb{R}$ . Rotasi dari matriks  $X$  dinotasikan dengan  $X^R$  dan didefinisikan sebagai

$$X^R = J_n X J_n, \quad (2.4)$$

dimana  $J_n = (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \dots, \mathbf{e}_1)$  dan  $\mathbf{e}_i$  merupakan vektor unit dengan entri ke- $i$  bernilai 1 dan entri yang lainnya bernilai 0.

### 2.4. Trace Matriks

**Definisi 2.6.** [1] Misalkan  $X = [x_{ij}]$  merupakan sebuah matriks bujur sangkar. Trace dari matriks  $X$  didefinisikan sebagai jumlah entri dari diagonal matriks  $X$  yang dinotasikan dengan  $\text{tr}(X)$ . Jadi, trace dari matriks  $X$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{tr}(X) = \sum_{i=1}^n x_{ii}, \quad (2.5)$$

dengan  $n$  adalah ordo dari matriks  $X$ .

### 2.5. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

**Definisi 2.7.** [1] Jika  $X$  adalah matriks  $n \times n$  maka vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  dinamakan vektor eigen dari  $X$  jika

$$X\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  dinamakan nilai eigen dari  $X$  dan  $\mathbf{v}$  dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .

**Teorema 2.8.** [1] Jika  $X$  adalah matriks  $n \times n$ , maka  $\lambda$  merupakan nilai eigen dari  $X$  jika dan hanya jika memenuhi polinomial karakteristik berikut:

$$\det(\lambda I - X) = 0,$$

dimana  $I$  adalah matriks identitas berordo  $n \times n$ .

### 2.6. Transformasi Laplace

**Definisi 2.9.** [6] Misalkan

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_n(t) \end{bmatrix}, \text{ untuk } t \geq 0,$$

transformasi Laplace dari  $f(t)$  didefinisikan sebagai berikut:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{f_{11}(t)\} & \mathcal{L}\{f_{12}(t)\} & \dots & \mathcal{L}\{f_{1n}(t)\} \\ \mathcal{L}\{f_{21}(t)\} & \mathcal{L}\{f_{22}(t)\} & \dots & \mathcal{L}\{f_{2n}(t)\} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathcal{L}\{f_{n1}(t)\} & \mathcal{L}\{f_{n2}(t)\} & \dots & \mathcal{L}\{f_{nn}(t)\} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

**Contoh 2.10.** Misalkan  $f(t) = e^{tX}$ , dimana X adalah matriks konstanta berordo  $n \times n$ , maka

$$\mathcal{L}\{e^{tX}\} = (sI - X)^{-1}. \quad (2.7)$$

### 2.7. Resolven

**Definisi 2.11.** [8] Himpunan resolven dari matriks X berordo  $n \times n$ , dengan  $x_{ij} \in \mathbb{C}$ , dilambangkan dengan  $\rho(X)$ , adalah himpunan titik  $s \in \mathbb{C}$ , dimana  $sI - X$  adalah invertible. Komplemen dari himpunan resolven disebut spektrum yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma(X) = \mathbb{C}/\rho(X). \quad (2.8)$$

Resolven dari X adalah pemetaan dari  $\rho(X)$  ke matriks berukuran  $n \times n$ , dengan setiap entrinya adalah elemen  $\mathbb{C}$  yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$R(X, s) = (sI - X)^{-1}. \quad (2.9)$$

### 2.8. Induksi Matematika

**Prinsip induksi Matematika** [7]: Untuk membuktikan  $P(n)$  bernilai benar untuk semua  $n$  bilangan bulat positif, dimana  $P(n)$  adalah *proporsional function*, harus melakukan dua langkah berikut.

- (1) **Langkah basis:** menunjukkan  $P(1)$  bernilai benar.
- (2) **Langkah induksi:** menunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif  $k$ , jika  $P(k)$  benar, maka  $P(k + 1)$  juga bernilai benar.

## 3. APLIKASI ALGORITMA LEVERRIER FADDEEV DALAM MENGHITUNG INVERS MATRIKS CENTROSMMETRIC DENGAN BENTUK KHUSUS BERORDO $n \times n$ , $n \geq 3$

### 3.1. Matriks Centrosymmetric

**Definisi 3.1.** [9] Suatu matriks  $X = (x_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  disebut matriks centrosymmetric, jika setiap entri di X memenuhi hubungan berikut:

$$x_{ij} = x_{(n-i+1)(n-j+1)}, \quad (3.1)$$

untuk setiap  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , yang ekuivalen dengan  $J_n X J_n = X$ , dimana  $J_n = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$  dan  $e_i$  merupakan vektor unit dengan entri ke- $i$  bernilai 1 dan entri yang lainnya bernilai 0.

Berdasarkan definisi di atas, maka dapat dibuat suatu matriks centrosymmetric dengan bentuk khusus berordo  $n \times n$ ,  $n \geq 3$  sebagai berikut:

(1) untuk  $n = 2m + 1$ 

$$X_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & \cdots & a & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dan} \quad (3.2)$$

(2) untuk  $n = 2m$ 

$$X_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & a & \cdots & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

dengan  $a \neq 0$ .

### 3.2. Algoritma Leverrier Faddeev

**Teorema 3.2.** [4] Misalkan matriks  $X$  adalah matriks berordo  $n \times n$  dengan polinomial karakteristiknya, yaitu

$$p(\lambda) = \lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + q_2\lambda^{n-2} + \cdots + q_n,$$

koefisien  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  dari polinomial karakteristik di atas diberikan oleh berikut ini:

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\text{tr}(Y_0)}{1}, \text{ dengan } Y_0 = X, \\ q_2 &= -\frac{\text{tr}(Y_1)}{2}, \text{ dengan } Y_1 = XY_0 + q_1X, \\ q_3 &= -\frac{\text{tr}(Y_2)}{3}, \text{ dengan } Y_2 = XY_1 + q_2X, \\ &\vdots \\ q_n &= -\frac{\text{tr}(Y_{n-1})}{n}, \text{ dengan } Y_{n-1} = XY_{n-2} + q_{n-1}X. \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Bukti.** Misalkan, diberikan sebuah matriks  $X$  berordo  $n \times n$  dengan  $\det(\lambda I - X) = \lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + q_2\lambda^{n-2} + \cdots + q_n = p(\lambda)$ . Kemudian, misalkan  $(\lambda I - X)^{-1}$  merupakan resolven dari  $X$  yang dinyatakan sebagai berikut:

$$(\lambda I - X)^{-1} = \frac{N(\lambda)}{p(\lambda)}, \quad (3.5)$$

dimana matriks adjugat  $N(\lambda)$  adalah polinomial  $\lambda$  berderajat  $n-1$  dengan koefisien matriks  $N_0, N_1, \dots, N_{n-1}$  dimana  $N_i = X^{-1}Y_i$ . Untuk menguraikan persamaan (3.5) digunakan transformasi Laplace dari matriks eksponensial, yaitu  $\mathcal{L}\{e^{tX}\} = (\lambda I - X)^{-1}$ .

Diketahui  $\frac{de^{tX}}{dt} = Xe^{tX}$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{de^{tX}}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{Xe^{tX}\} \\ \lambda\mathcal{L}\{e^{tX}\} - I &= X\mathcal{L}(e^{tX}) \\ \lambda\mathcal{L}\{e^{tX}\} - I &= X\left(\frac{N(\lambda)}{p(\lambda)}\right) \\ \lambda\mathcal{L}\{e^{tX}\} - I &= \frac{Y(\lambda)}{p(\lambda)} \\ \lambda \operatorname{tr}(\mathcal{L}\{e^{tX}\}) - \operatorname{tr}(I) &= \operatorname{tr}\left(\frac{Y(\lambda)}{p(\lambda)}\right) \\ \lambda\left(\frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)}\right) - n &= \operatorname{tr}\left(\frac{Y(\lambda)}{p(\lambda)}\right) \\ \lambda p'(\lambda) - np(\lambda) &= \operatorname{tr}(Y(\lambda)) \\ -q_1\lambda^{n-1} - 2q_2\lambda^{n-2} - \dots - nq_n &= \operatorname{tr}(Y_0\lambda^{n-1}) + \operatorname{tr}(Y_1\lambda^{n-2}) + \dots + \operatorname{tr}(Y_{n-1}). \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan mengambil komponen-komponen yang bersesuaian diperoleh

$$\begin{aligned} -q_1\lambda^{n-1} &= \operatorname{tr}(Y_0\lambda^{n-1}) \\ -q_1\lambda^{n-1} &= \lambda^{n-1}\operatorname{tr}(Y_0) \\ q_1 &= -\frac{\operatorname{tr}(Y_0)}{1}, \dots \\ -nq_n &= \operatorname{tr}(Y_{n-1}) \\ q_n &= -\frac{\operatorname{tr}(Y_{n-1})}{n}. \end{aligned} \quad \square$$

**Teorema 3.3.** [4] Misalkan algoritma Leverrier Faddeev merupakan suatu algoritma yang bersifat iteratif yang melibatkan  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ , maka proses iterasi tersebut akan berhenti ketika

$$Y_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = O \quad (3.6)$$

**Bukti.** Misalkan  $X$  adalah sebuah matriks persegi berordo  $n \times n$  dengan polinomial karakteristik  $p(\lambda) = \lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + q_2\lambda^{n-2} + \dots + q_n$ . Dengan mencari solusi dari  $p(\lambda)$ , diperoleh akar-akar  $\lambda_j$  untuk  $j = 1, 2, \dots, n$ . Misalkan untuk setiap  $\lambda$  memiliki

$$Y = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-1-i} Y_i.$$

Berdasarkan algoritma (3.4), maka

$$\begin{aligned}\lambda^n Y_0 &= \lambda^n X \\ \lambda^{n-1} Y_1 &= \lambda^{n-1} X Y_0 + \lambda^{n-1} q_1 X \\ \lambda^{n-2} Y_2 &= \lambda^{n-2} X Y_1 + \lambda^{n-2} q_2 X \\ &\dots \\ Y_n &= X Y_{n-1} + q_n X.\end{aligned}$$

Kemudian, jumlahkan semua ruas kiri dan kanan.

$$\begin{aligned}\lambda^n Y_0 + \lambda^{n-1} Y_1 + \lambda^{n-2} Y_2 + \dots + Y_n &= \lambda^n X + \lambda^{n-1} X Y_0 + \lambda^{n-1} q_1 X + \lambda^{n-2} X Y_1 + \lambda^{n-2} q_2 X + \dots + X Y_{n-1} + q_n X \\ Y_n &= (\lambda I - X) Y + X(p(\lambda))\end{aligned}$$

karena  $\det(\lambda I - X) = 0$  dan  $p(\lambda) = 0$ , maka terbukti bahwa  $Y_n = O$ .  $\square$

**Teorema 3.4.** [4] *Misalkan matriks  $X$  adalah matriks berordo  $n \times n$ . Dengan menggunakan algoritma Leverrier Faddeev, invers dari  $X$  adalah*

$$X^{-1} = -\frac{1}{q_n}(Y_{n-2} + q_{n-1}I). \quad (3.7)$$

**Bukti.** Pada Teorema (3.3) diketahui  $Y_n = O$ .

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}Y_n &= O \\ X Y_{n-1} + q_n X &= O \\ q_n X &= -X Y_{n-1} \\ q_n X &= -X(X Y_{n-2} + q_{n-1} X) \\ X^{-1} X q_n &= -X^{-1} X(X Y_{n-2} + q_{n-1} X) \\ X^{-1} X q_n &= -I(X Y_{n-2} + q_{n-1} X) \\ X^{-1} X q_n &= -X(Y_{n-2} + q_{n-1} I) \\ X^{-1} &= -\frac{(Y_{n-2} + q_{n-1} I)}{q_n}.\end{aligned} \quad \square$$

### 3.3. Penerapan Algoritma Leverrier Faddeev dalam Menghitung Invers dan Nilai Eigen Matriks Centrosymmetric dengan Bentuk Khusus

Pada bagian ini, akan ditentukan bentuk umum invers dan nilai eigen dari matriks *centrosymmetric* pada Persamaan(3.2) dan (3.3) yang berordo  $3 \times 3$  sampai dengan  $8 \times 8$  dengan menggunakan algoritma Leverrier Faddeev.

(1) Untuk ordo  $n = 3$

Dengan menggunakan algoritma Leverrier Faddeev (3.4), diperoleh

$$\text{a. Invers dari } X_3, \text{ yaitu } \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^{-1} \\ -a^{-1} & a^{-1} & -a^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b. Nilai eigen dari  $X_3$ , yaitu  $a$  dan  $-a$ , yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ \lambda^3 - a\lambda^2 - a^2\lambda + a^3 &= 0 \\ (\lambda - a)^2(\lambda + a) &= 0 \end{aligned}$$

- (2) Untuk ordo  $n = 4$

Dengan menggunakan algoritma Leverrier Faddeev (3.2.1), diperoleh

a. Invers dari  $X_4$ , yaitu 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b. Nilai eigen dari  $X_4$ , yaitu  $a$  dan  $-a$ , yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ \lambda^4 - 2a^2\lambda^2 + a^4 &= 0 \\ (\lambda - a)^2(\lambda + a)^2 &= 0 \end{aligned}$$

- (3) Untuk ordo  $n = 5$

Dengan menggunakan algoritma Leverrier Faddeev (3.2.1), diperoleh

a. Invers dari  $X_5$ , yaitu 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b. Nilai eigen dari  $X_5$ , yaitu  $a$  dan  $-a$ , yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ \lambda^5 - a\lambda^4 - 2a^2\lambda^3 + 2a^3\lambda^2 + a^4\lambda - a^5 &= 0 \\ (\lambda - a)^3(\lambda + a)^2 &= 0 \end{aligned}$$

- (4) Untuk ordo  $n = 6$

Dengan menggunakan algoritma Leverrier Faddeev (3.2.1), diperoleh

a. Invers dari  $X_6$ , yaitu 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b. Nilai eigen dari  $X_6$ , yaitu  $a$  dan  $-a$ , yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ \lambda^6 - 3a^2\lambda^4 + 3a^4\lambda^2 - a^6 &= 0 \\ (\lambda - a)^3(\lambda + a)^3 &= 0 \end{aligned}$$

- (5) Untuk ordo  $n = 7$

Dengan menggunakan algoritma Leverrier Faddeev (3.2.1), diperoleh

- a. Invers dari  $X_7$ , yaitu 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-1} & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- b. Nilai eigen dari  $X_7$ , yaitu  $a$  dan  $-a$ , yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ \lambda^7 - a\lambda^6 - 3a^2\lambda^5 + 3a^3\lambda^4 + 3a^4\lambda^3 - 3a^5\lambda^2 - a^6\lambda + a^7 &= 0 \\ (\lambda - a)^4(\lambda + a)^3 &= 0 \end{aligned}$$

(6) Untuk ordo  $n = 8$

Dengan menggunakan algoritma Leverrier Faddeev (3.2.1), diperoleh

- a. Invers dari  $X_8$ , yaitu 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- b. Nilai eigen dari  $X_8$ , yaitu  $a$  dan  $-a$ , yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ \lambda^8 - 4a^2\lambda^6 + 6a^4\lambda^4 - 4a^6\lambda^2 + a^8 &= 0 \\ (\lambda - a)^4(\lambda + a)^4 &= 0 \end{aligned}$$

### 3.4. Teorema Karakteristik Matriks Centrosymmetric dengan Bentuk Khusus Ordo $n \times n$

Berdasarkan pola invers dan nilai eigen yang diperoleh sebelumnya, dapat dibuat sebuah teorema baru sebagai berikut.

**Teorema 3.5.** *Misalkan diberikan sebuah matriks centrosymmetric dengan bentuk khusus berordo  $n \times n$ ,  $n \geq 3$ , dan  $m$  adalah bilangan bulat positif, maka*

1. untuk kasus  $n = 2m + 1$

a.  $(X_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} & \dots & -a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a^{-1} & a^{-1} & -a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-1} & \dots & a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

b. nilai eigen dari  $X_n$  adalah  $a$  dan  $-a$  yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$p(\lambda) = (\lambda - a)^{\frac{n+1}{2}} + (\lambda + a)^{\frac{n-1}{2}}, \text{ dan}$$

2. untuk kasus  $n = 2m$

$$a. (X_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{-1} & \dots & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -a^{-1} & a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & a^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

b. nilai eigen dari  $X_n$  adalah  $a$  dan  $-a$  yang merupakan solusi dari polinomial karakteristik berikut:

$$p(\lambda) = (\lambda - a)^{\frac{n}{2}} + (\lambda + a)^{\frac{n}{2}}.$$

**Bukti.**

1. Untuk kasus  $n = 2m + 1$

a. Dengan menggunakan Definisi (2.4), akan ditunjukkan

$$X_n \times (X_n)^{-1} = (X_n)^{-1} \times X_n = I.$$

Perhatikan bahwa:

$$X_n \times (X_n)^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 000 \dots 000 \dots 00a \\ 000 \dots 000 \dots 0aa \\ 000 \dots 000 \dots aaaa \\ \vdots \\ 000 \dots 00a \dots aaaa \\ aaaa \dots aaaa \dots aaaa \\ aaaa \dots a00 \dots 000 \\ \vdots \\ aaaa \dots 000 \dots 000 \\ a00 \dots 000 \dots 000 \\ a00 \dots 000 \dots 000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a^{-1} & a^{-1} & -a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-1} & \dots & a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \dots 000 \dots 000 \\ 010 \dots 000 \dots 000 \\ 001 \dots 000 \dots 000 \\ \vdots \\ 000 \dots 100 \dots 000 \\ 000 \dots 010 \dots 000 \\ 000 \dots 001 \dots 000 \\ \vdots \\ 000 \dots 000 \dots 100 \\ 000 \dots 000 \dots 010 \\ 000 \dots 000 \dots 001 \end{bmatrix} = I, \text{ dan}$$

$$(X_n)^{-1} \times X_n =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a^{-1} & a^{-1} & -a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-1} & \dots & a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a^{-1} & a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 000 \dots 000 \dots 00a \\ 000 \dots 000 \dots 0aa \\ 000 \dots 000 \dots aaaa \\ \vdots \\ 000 \dots 00a \dots aaaa \\ aaaa \dots aaaa \dots aaaa \\ aaaa \dots a00 \dots 000 \\ \vdots \\ aaaa \dots 000 \dots 000 \\ a00 \dots 000 \dots 000 \\ a00 \dots 000 \dots 000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \dots 000 \dots 000 \\ 010 \dots 000 \dots 000 \\ 001 \dots 000 \dots 000 \\ \vdots \\ 000 \dots 100 \dots 000 \\ 000 \dots 010 \dots 000 \\ 000 \dots 001 \dots 000 \\ \vdots \\ 000 \dots 000 \dots 100 \\ 000 \dots 000 \dots 010 \\ 000 \dots 000 \dots 001 \end{bmatrix} = I.$$

Dengan demikian, terbukti invers dari matriks centrosymmetric bentuk khusus  $X_n$  adalah  $(X_n)^{-1}$ .

b. Dengan menggunakan induksi matematika, akan ditunjukkan agar  $\lambda$  menjadi nilai eigen dari matriks  $X_n$ , maka polinomial karakteristiknya haruslah sama dengan 0, yaitu

$$(\lambda - a)^{\frac{n+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{n-1}{2}} = 0.$$

Perhatikan bahwa:

$$\text{misalkan } P(n) : (\lambda - a)^{\frac{n+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{n-1}{2}} = 0.$$

## a. Langkah Basis

Akan ditunjukkan bahwa  $P(3)$  bernilai benar.

Untuk  $n = 3$ , maka  $P(3) : (\lambda - a)^2(\lambda + a) = 0$ .

Pernyataan benar untuk  $n = 3$ , karena

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - X_3) &= 0 \\ \det \left( \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ a & a & a \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -a \\ -a & \lambda - a & -a \\ -a & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ (\lambda - a)^2(\lambda + a) &= 0. \end{aligned}$$

## b. Langkah Induksi

Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat ganjil  $n = k \geq 3$ , jika  $P(k)$  bernilai benar, maka  $P(k + 2)$  juga bernilai benar.

Asumsikan bahwa  $P(k)$  bernilai benar untuk sebarang bilangan bulat ganjil positif  $n = k \geq 3$ , yaitu

$$P(k) : (\lambda - a)^{\frac{k+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{k-1}{2}} = 0.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk  $n = k + 2$ , maka  $P(k + 2)$  juga bernilai benar, yaitu  $p(k + 2) : (\lambda - a)^{\frac{(k+2)+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{(k+2)-1}{2}} = 0$ . Dengan asumsi  $P(k)$  benar, maka ruas kiri dari  $P(k + 2)$  diperoleh

$$\begin{aligned} (\lambda - a)^{\frac{(k+2)+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{(k+2)-1}{2}} &= \underbrace{\left\langle (\lambda - a)^{\frac{k+1}{2}} \right\rangle \left\langle (\lambda + a)^{\frac{k-1}{2}} \right\rangle}_{=0} (\lambda^2 - a^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

kedua ruas dari  $P(k + 2)$  sama, maka  $P(k + 2)$  bernilai benar. Dengan demikian, karena langkah basis dan langkah induksi terpenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa

$$(\lambda - a)^{\frac{n+1}{2}} (\lambda + a)^{\frac{n-1}{2}} = 0.$$

2. Untuk kasus  $n = 2m$ 

a. Dengan menggunakan Definisi (2.4), akan ditunjukkan

$$X_n \times (X_n)^{-1} = (X_n)^{-1} \times X_n = I.$$

Perhatikan bahwa:

$$X_n \times (X_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 0000 \dots 0000 & \dots & 0000 & a \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 00aa & \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0aaa & \\ 0000 \dots 0000 & \dots & aaaa & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0000 \dots 0000 & a & \dots & aaaa \\ 0000 \dots 00aa & a & \dots & aaaa \\ aaaa \dots aa00 & 0 & \dots & 0000 \\ aaaa \dots a000 & 0 & \dots & 0000 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ aaaa \dots 0000 & 0 & \dots & 0000 \\ aaaa \dots 0000 & 0 & \dots & 0000 \\ aaaa \dots 0000 & 0 & \dots & 0000 \\ a000 \dots 0000 & 0 & \dots & 0000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{-1} & \dots & a^{-1} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -a^{-1} & a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & a^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \dots 0000 & \dots & 0000 & \\ 0100 \dots 0000 & \dots & 0000 & \\ 0010 \dots 0000 & \dots & 0000 & \\ 0001 \dots 0000 & \dots & 0000 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0000 \dots 1000 & \dots & 0000 & \\ 0000 \dots 0100 & \dots & 0000 & \\ 0000 \dots 0010 & \dots & 0000 & \\ 0000 \dots 0001 & \dots & 0000 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 1000 & \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0100 & \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0010 & \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0001 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0000 & 1000 \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0000 & 0100 \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0000 & 0010 \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0000 & 0001 \end{bmatrix} = I, \text{ dan}$$

$$(X_n)^{-1} \times X_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} & -a^{-1} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-1} & -a^{-1} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a^{-1} & a^{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{-1} & \dots & a^{-1} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -a^{-1} & a^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & a^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0000 \dots 0000 & \dots & 0000 & a \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 00aa & \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0aaa & \\ 0000 \dots 0000 & \dots & aaaa & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0000 \dots 0000 & a & \dots & aaaa \\ 0000 \dots 00aa & a & \dots & aaaa \\ aaaa \dots aa00 & 0 & \dots & 0000 \\ aaaa \dots a000 & 0 & \dots & 0000 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ aaaa \dots 0000 & 0 & \dots & 0000 \\ aaaa \dots 0000 & 0 & \dots & 0000 \\ aaaa \dots 0000 & 0 & \dots & 0000 \\ a000 \dots 0000 & 0 & \dots & 0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \dots 0000 & \dots & 0000 & \\ 0100 \dots 0000 & \dots & 0000 & \\ 0010 \dots 0000 & \dots & 0000 & \\ 0001 \dots 0000 & \dots & 0000 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0000 \dots 1000 & \dots & 0000 & \\ 0000 \dots 0100 & \dots & 0000 & \\ 0000 \dots 0010 & \dots & 0000 & \\ 0000 \dots 0001 & \dots & 0000 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 1000 & \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0100 & \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0010 & \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0001 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0000 & 1000 \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0000 & 0100 \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0000 & 0010 \\ 0000 \dots 0000 & \dots & 0000 & 0001 \end{bmatrix} = I.$$

Dengan demikian, terbukti invers dari matriks centrosymmetric bentuk khusus  $X_n$  adalah  $(X_n)^{-1}$ .

- b. Dengan menggunakan induksi matematika, akan ditunjukkan agar  $\lambda$  menjadi nilai eigen dari matriks  $X_n$ , maka polinomial karakteristiknya haruslah sama dengan 0, yaitu

$$(\lambda - a)^{\frac{n}{2}} (\lambda + a)^{\frac{n}{2}} = 0.$$

Perhatikan bahwa:

$$\text{misalkan } P(n) : (\lambda - a)^{\frac{n}{2}} (\lambda + a)^{\frac{n}{2}} = 0$$

- a. Langkah Basis

Akan ditunjukkan bahwa  $P(4)$  bernilai benar.

Untuk  $n = 4$ , maka  $P(4) : (\lambda - a)^2 (\lambda + a)^2 = 0$ .

Pernyataan benar untuk  $n = 4$ , karena

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - X_4) &= 0 \\ \det \left( \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & a \\ a & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & -a \\ 0 & \lambda & -a & -a \\ -a & -a & \lambda & 0 \\ -a & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \lambda^4 - 2a^2\lambda^2 + a^4 &= 0 \\ (\lambda - a)^2 (\lambda + a)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian,  $P(n)$  benar untuk  $n = 4$ .

## b. Langkah Induksi

Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat genap  $n = k \geq 4$ , jika  $P(k)$  bernilai benar, maka  $P(k+2)$  juga bernilai benar.

Asumsikan bahwa  $P(k)$  bernilai benar untuk sebarang bilangan bulat genap positif  $n = k \geq 4$ , yaitu

$$P(k) : (\lambda - a)^{\frac{k}{2}} (\lambda + a)^{\frac{k}{2}} = 0.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk  $n = k + 2$ , maka  $P(k + 2)$  juga bernilai benar, yaitu  $P(k + 2) : (\lambda - a)^{\frac{k+2}{2}} (\lambda + a)^{\frac{k+2}{2}} = 0$ . Dengan asumsi  $P(k)$  benar, maka ruas kiri dari  $P(k + 2)$  diperoleh

$$\begin{aligned} (\lambda - a)^{\frac{k+2}{2}} (\lambda + a)^{\frac{k+2}{2}} &= \underbrace{\langle (\lambda - a)^{\frac{k}{2}} \rangle \langle (\lambda + a)^{\frac{k}{2}} \rangle}_{=0} (\lambda^2 - a^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

karena kedua ruas dari  $P(k + 2)$  sama, maka  $P(k + 2)$  bernilai benar. Dengan demikian, karena langkah basis dan langkah induksi terpenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa:

$$(\lambda - a)^{\frac{n}{2}} (\lambda + a)^{\frac{n}{2}} = 0. \quad \square$$

#### 4. Kesimpulan

Pada makalah ini, telah diperoleh bentuk umum invers dan nilai eigen dari matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus ordo  $n \times n$ ,  $n \geq 3$  dalam dua kasus, yaitu kasus  $n = 2m + 1$  dan kasus  $n = 2m$ .

#### 5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Monika Rianti Helmi, Bapak Muhafzan, dan Ibu Ferra Yanuar yang telah memberikan masukan dan saran terhadap penulisan makalah ini, sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

#### Daftar Pustaka

- [1] Anton, H., Rorres, C., 2013, *Aljabar Linear Elementer Edisi Versi Aplikasi*, Edisi Ke-11, Erlangga, Jakarta
- [2] Bronson, R., Gabriel B. C., 2007, *Linear Algebra An Introduction*, Edisi ke-2, Elsevier's Science and Technology Rights Departemen in Oxford, UK
- [3] Datta, L., Morgera, S.D., 1989, On the reducibility of centrosymmetric matrices-applications in engineering problems, *Circuits System Signal Process*, **8**
- [4] Gower, J. C., 2006, An application of the modified leverrier faddeev algorithm to the spectral decomposition of symmetric block-circulant matrices, *Computational Statistics and Data analysis*, **50**: 89-106
- [5] Hanna, M. T., Mansoori, S.A., 2003, A centrosymmetric matrix based technique for the interpolation of hermitian signal, *Numerical Linear Algebra with Appl*, **10**: 701-720

- [6] Hendricks, E., Jannerup, O., Sørensen, P. H., 2008, *Linear Systems Control*, Springer, Berlin
- [7] Rosen, K. H., 2007, *Discrete Mathematics and Its Application*, Edisi ke-7, McGraw-Hill, Singapore
- [8] Teschl, G., 2014, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics: With Application to Schrödinger Operators*, American Mathematical Society
- [9] Tian, Z., Gu, C., 2007, The iterative methods for centrosymmetric matrices, *Applied Mathematics and Computation*, **187**: 902-911