

FIXED POINT THEOREM FOR MULTIVALUED (ϕ, F, ω) -CONTRACTION MAPPING ON COMPLETE METRIC SPACE

YOVITA MARGERITA DETHAN *, IRVANDI GORBY PASANGKA

*Program Studi Matematika,
Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana.
email : yovitadthn@gmail.com, irvandi.p@staf.undana.ac.id.*

Diterima 9 Mei 2024 Direvisi 3 Juni 2024 Dipublikasikan 31 Juli 2024

Abstrak. Dalam penelitian ini, didefinisikan suatu pemetaan baru yang diberi nama pemetaan kontraksi- (ϕ, F, ω) bernilai banyak. Pemetaan tersebut merupakan hasil modifikasi dari definisi pemetaan yang sebelumnya telah dibuktikan oleh Wardowski yaitu pemetaan kontraksi- (ϕ, F) . Selanjutnya dibuktikan eksistensi titik tetap dari pemetaan kontraksi- (ϕ, F, ω) bernilai banyak, dan diperoleh beberapa akibat dari teorema tersebut.

Kata Kunci: Jarak- ω , Kontraksi- (ϕ, F, ω) , Titik tetap

Abstract. In this research, a new mapping is defined which is called the multivalued (ϕ, F, ω) -contraction mapping. This mapping is a modification of the (ϕ, F) -contraction mapping given by Wardowski. Next, we prove the existence of a fixed point of the multivalued (ϕ, F, ω) -contraction mapping, and obtain several consequences from the theorem.

Keywords: ω -distance, (ϕ, F, ω) -contraction, fixed points

1. Pendahuluan

Teori titik tetap dalam matematika analisis dikenal sebagai salah satu topik penting karena aplikasinya yang cukup luas, di antaranya pada persamaan diferensial dan teori optimasi. Karena penerapannya yang luas, teori titik tetap menjadi topik penelitian yang berkembang pesat dan terus menarik perhatian untuk diteliti. Pada tahun 1922 ditemukan prinsip Kontraksi Banach yang menjadi awal mula munculnya teori titik tetap.

Banyak peneliti dari berbagai negara telah mengembangkan teori titik tetap dengan menggeneralisasi teorema tersebut. Di antaranya, pada 1996, Kada, Suzuki, dan Takahashi menggunakan konsep jarak- ω untuk membuktikan eksistensi titik tetap dalam ruang metrik [1]. Pada 2014, Piri dan Kumam mengembangkan teori

*penulis korespondensi

titik tetap dalam jenis pemetaan baru yang dinamakan kontraksi- F [2]. Dilanjutkan oleh Wardowski yang mengembangkan teorema titik tetap dan dihasilkan jenis pemetaan baru yang dikenal dengan Kontraksi- (ϕ, F) [3]. Selanjutnya pada tahun 2021, Piri, Kumam, dan Zarghami kembali mengembangkan penelitian tentang teorema titik tetap dalam konteks ruang metrik asimetris yang diperluas [4]. Pada tahun yang sama, teori titik tetap juga turut dikaji Ge dan Yang di ruang metrik yang diperumum [5].

Pemetaan kontraksi- (ϕ, F) yang diperkenalkan Wardowski [3] telah menarik minat beberapa peneliti untuk mengembangkannya. Di antaranya, Rossafi dan Kari [6] mengembangkan teorema titik tetap pada konteks ruang metrik- b rectangular yang kemudian menghasilkan aplikasi pada penyelesaian persamaan integral non-linear.

Dengan berbagai jenis pemetaan baru yang muncul pada teori titik tetap, Pasangka juga turut menganalisis teori titik tetap. Dengan menggunakan jarak- ω , Pasangka membuktikan eksistensi titik tetap [7], serta menggunakan pemetaan tipe Hardy-Roger dan memperoleh beberapa akibat dengan mengganti metrik dengan jarak- ω [8].

Oleh karena itu, dalam penelitian ini, eksistensi titik tetap dibuktikan dengan memanfaatkan konsep jarak- ω dalam konteks ruang metrik lengkap, dengan modifikasi dan mendefinisikan ulang pemetaan kontraksi- (ϕ, F) kemudian mengaitkannya dengan jarak- ω . Dengan demikian, diharapkan dapat dihasilkan aplikasi baru yang dapat diterapkan dalam menyelesaikan permasalahan matematika lainnya.

2. Landasan Teori

Menurut Kada, Suzuki, dan Takahashi [5], konsep jarak- ω didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. [5] Misalkan terdapat (B, d) suatu ruang metrik, maka yang disebut sebagai jarak- ω pada B adalah pemetaan $p : B \times B \rightarrow [0, \infty)$ yang memenuhi:

- (a) untuk setiap $z_0, z_1, z_2 \in B$ berlaku $p(z_0, z_2) \leq p(z_0, z_1) + p(z_1, z_2)$,
- (b) pemetaan $p(z_0, \cdot) : B \rightarrow [0, \infty)$ merupakan fungsi semikontinu bawah, $\forall z_0 \in B$,
- (c) untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga $\forall z_0, z_1, z_2 \in B$ di mana $p(z_0, z_1) \leq \delta$ dan $p(z_0, z_2) \leq \delta$ berakibat $d(z_1, z_2) \leq \varepsilon$.

Berikut adalah beberapa sifat yang relevan terkait dengan konsep jarak- ω yang akan digunakan dalam penelitian ini.

Lema 2.2. [5] Diberikan (B, d) suatu ruang metrik dan p jarak- ω pada B . Misalkan $\{t_n\}, \{u_n\}$ merupakan barisan di B dan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subseteq [0, \infty)$ konvergen ke 0, dan $z_0, z_1, z_2 \in B$, maka $\forall n, m \in \mathbb{N}$ berlaku:

- (a) Jika $p(t_n, z_1) \leq \alpha_n$ dan $p(t_n, z_2) \leq \beta_n$ maka $z_1 = z_2$, selanjutnya, jika $p(z_0, z_1) = 0$ serta $p(z_0, z_2) = 0$ maka $z_1 = z_2$.
- (b) Jika $p(t_n, u_n) \leq \alpha_n$ serta $p(t_n, z_2) \leq \beta_n$ maka $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = z_2$.
- (c) Jika $p(t_n, t_m) \leq \alpha_n$ di mana $n < m$ maka $\{t_n\}$ barisan Cauchy.

(d) Jika $p(y, t_n) \leq \alpha_n$ maka $\{t_n\}$ barisan Cauchy.

Untuk selanjutnya, didefinisikan $D_p(c, T(z)) = \inf\{p(c, u) : u \in T(z)\}$, $\mathfrak{F}$ merupakan notasi untuk koleksi dari fungsi $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dan Φ adalah koleksi dari fungsi $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ yang memenuhi

- (i) F naik monoton;
- (ii) Untuk setiap barisan bilangan positif $\{x_n\}$ berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \text{ jika dan hanya jika } \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = -\infty;$$

- (iii) Untuk setiap $\alpha > 0$ berlaku $\liminf_{s \rightarrow \alpha^+} \phi(s) > 0$;
- (iv) Terdapat $j \in (0, 1)$ sehingga $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^j F(x) = 0$.

3. Pembahasan

Diberikan definisi kontraksi- (ϕ, F, ω) bernilai banyak dan keberadaan titik tetap pada pemetaan tersebut yang kemudian akan dibuktikan.

Definisi 3.1. Misalkan (B, d) suatu ruang metrik. Pemetaan $T : B \rightarrow 2^B \setminus \{\emptyset\}$ disebut pemetaan kontraksi- (ϕ, F, ω) bernilai banyak jika terdapat p merupakan jarak- ω , $F \in \mathfrak{F}$ dan $\phi \in \Phi$ sehingga untuk setiap $a, b \in B$ dan $u \in Ta$ terdapat $v \in Tb$ dengan $p(u, v) > 0$ dan berlaku:

$$F[p(u, v)] + \phi(p(a, b)) \leq F[p(a, b)]. \quad (3.1)$$

Selanjutnya, pada pemetaan kontraksi- (ϕ, F, ω) bernilai banyak akan dibuktikan keberadaan titik tetapnya.

Teorema 3.2. Misalkan (B, d) suatu ruang metrik lengkap. Jika pemetaan $T : B \rightarrow 2^B \setminus \{\emptyset\}$ suatu kontraksi- (ϕ, F, ω) bernilai banyak dan memenuhi $\forall z \in B$ di mana $z \notin T(z)$ berlaku

$$\inf\{p(u, z) + D_p(u, T(u)) : u \in B\} > 0, \quad (3.2)$$

maka T memiliki titik tetap.

Bukti. Diambil sebarang $z_0 \in B$, dan $z_1 \in Tz_0$, berdasarkan (3.1) terdapat $z_2 \in Tz_1$ dengan $p(z_1, z_2) > 0$ sehingga $F[p(z_1, z_2)] + \phi(p(z_0, z_1)) \leq F(p(z_0, z_1))$. Proses dilanjutkan sehingga diperoleh barisan $\{z_n\}$ di mana untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku:

- (a) $p(z_n, z_{n+1}) > 0$,
- (b) $z_n \in T(z_{n-1})$,
- (c) $F[p(z_n, z_{n+1})] + \phi(p(z_{n-1}, z_n)) \leq F(p(z_{n-1}, z_n))$.

Berdasarkan (c) diperoleh,

$$F(p(z_n, z_{n+1})) \leq F[p(z_n, z_{n+1})] + \phi(p(z_{n-1}, z_n)) \leq F(p(z_{n-1}, z_n)).$$

Akibatnya,

$$F(p(z_n, z_{n+1})) < F(p(z_{n-1}, z_n)). \quad (3.3)$$

Lebih lanjut, berdasarkan (c) diperoleh

$$\begin{aligned}
 F(d(z_n, z_{n+1})) &\leq F(p(z_{n-1}, z_n)) - \phi(p(z_{n-1}, z_n)), \\
 &\leq F(p(z_{n-2}, z_{n-1})) - \phi(p(z_{n-1}, z_n)) - \phi(p(z_{n-2}, z_{n-1})), \\
 &\leq \dots \\
 &\leq F(p(z_0, z_1)) - \sum_{i=0}^n \phi(p(z_i, z_{i+1})).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Karena $\liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(p(z_{n-1}, z_n)) > 0$, maka berdasarkan definisi limit, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ dan $A > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$, dan $\phi(p(z_{n-1}, z_n)) > A$. Akibatnya untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku:

$$\begin{aligned}
 F(p(z_n, z_{n+1})) &\leq F(p(z_0, z_1)) - \sum_{i=0}^{n_0} \phi(p(z_i, z_{i+1})) - \sum_{i=n_0+1}^n \phi(p(z_i, z_{i+1})), \\
 &\leq F(p(z_0, z_1)) - \sum_{i=n_0+1}^n A, \\
 &= F(p(z_0, z_1)) - (n - n_0)A.
 \end{aligned}$$

Dengan mengambil limit $n \rightarrow \infty$ pada pertidaksamaan di atas diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(p(z_n, z_{n+1})) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [F(p(z_0, z_1)) - (n - n_0)A], \tag{3.5}$$

artinya, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(p(z_n, z_{n+1})) = -\infty$. Karena $F \in \mathfrak{F}$ maka diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(z_n, z_{n+1}) = 0. \tag{3.6}$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy. Berdasarkan definisi $\mathfrak{F}$ bagian (iv), terdapat $k \in (0, 1)$ sedemikian sehingga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [p(z_n, z_{n+1})]^k F(p(z_n, z_{n+1})) = 0. \tag{3.7}$$

Selanjutnya, karena:

$$F[p(z_n, z_{n+1})] \leq F[p(z_0, z_1)] - (n - n_0)A,$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 [p(z_n, z_{n+1})]^k F[p(z_n, z_{n+1})] &\leq [p(z_n, z_{n+1})]^k F[p(z_0, z_1)] \\
 &\quad - [(n - n_0)A] [p(z_n, z_{n+1})]^k.
 \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
 [p(z_n, z_{n+1})]^k F[p(z_n, z_{n+1})] &- [p(z_n, z_{n+1})]^k F[p(z_0, z_1)] \\
 &\leq -[(n - n_0)A] [p(z_n, z_{n+1})]^k \leq 0.
 \end{aligned}$$

Dengan mengambil limit $n \rightarrow \infty$ pada pertidaksamaan di atas, diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(z_n, z_{n+1})^k (n - n_0)A = 0.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} p(z_n, z_{n+1})^k (n - n_0)A = 0$, maka terdapat $h \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga $\forall n \geq h$ berlaku

$$p(z_n, z_{n+1}) \leq \frac{1}{[(n - n_0)A]^{\frac{1}{k}}}. \quad (3.8)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(z_n, z_m) = 0$.

Perhatikan bahwa $\forall m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m > n \geq \max\{n_0, n_1\}$, diperoleh:

$$\begin{aligned} p(z_n, z_m) &\leq p(z_n, z_{n+1}) + (z_{n+1}, z_{n+2}) + (z_{n+2}, z_{n+3}) + (z_{n+3}, z_{n+4}) \\ &\quad + \cdots + p(z_{m-1}, z_m), \\ &= \sum_{i=n}^{i=m-1} p(z_i, z_{i+1}), \\ &\leq \sum_{i=n}^{i=\infty} p(z_i, z_{i+1}), \\ &\leq \sum_{i=n}^{i=\infty} \frac{1}{[(i - n_0)A]^{\frac{1}{k}}}. \end{aligned}$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{i=\infty} \frac{1}{[(i - n_0)A]^{\frac{1}{k}}} = 0$, maka berdasarkan Lemma 2.2 diperoleh $\{z_n\}$ barisan Cauchy.

Lebih lanjut,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(z_n, z_m) = 0.$$

Berdasarkan kelengkapan dari (B, d) , maka terdapat $u \in B$ sedemikian sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, u) = 0.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $u \in T(u)$.

Diambil sebarang $k \in \mathbb{N}$, karena $p(z_k, \cdot)$ semikontinu bawah, maka:

$$p(z_n, u) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf p(z_n, z_m) \leq \sum_{i=n}^{i=\infty} \frac{1}{[(i - n_0)A]^{\frac{1}{k}}}.$$

Diandaikan $u \notin T(u)$. Berdasarkan persamaan (3.2), diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &< \inf \{p(z, u) + D_p(z, Tz) : z \in X\}, \\ &\leq \inf \{p(z_n, u) + D_p(z_n, Tz_n) : n \in \mathbb{N}\}, \\ &\leq \inf \{p(z_n, u) + D_p(z_n, Tz_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}, \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{i=n}^{i=\infty} \frac{1}{[(i - n_0)A]^{\frac{1}{k}}} + \frac{1}{[(n - n_0)A]^{\frac{1}{k}}} : n \in \mathbb{N} \right\}, \\ &\leq 2 \inf \left\{ \sum_{i=n}^{i=\infty} \frac{1}{[(i - n_0)A]^{\frac{1}{k}}} : n \in \mathbb{N} \right\}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hal ini kontradiksi. Akibatnya, haruslah $u \in T(u)$. □

Akibat 3.3. Misalkan (B, d) suatu ruang metrik lengkap. Jika pemetaan $T : B \rightarrow B$ memenuhi:

- a terdapat p merupakan jarak- ω , $F \in \mathfrak{F}$ dan $\phi \in \Phi$ sehingga $\forall a, b \in B$ dan $u \in Ta$ terdapat $v \in Tb$ dengan $p(u, v) > 0$ dan berlaku $F[p(u, v)] + \phi(p(a, b)) \leq F[p(a, b)]$,
 b untuk setiap $b \in B$ dengan $p(b, Tb) > 0$ berlaku $\inf\{p(u, b) + p(u, Tu) : u \in B\} > 0$,

maka T memiliki titik tetap.

Akibat 3.4. Misalkan (B, d) ruang metrik lengkap dan misalkan T suatu pemetaan dari B ke B . Jika terdapat p jarak- ω dan memenuhi

- (a) untuk setiap $a, b \in B$ berlaku:

$$p(Ta, Tb) > 0 \Rightarrow p(Ta, Tb) \leq e^{\frac{-1}{1+p(a,b)}p(a,b)},$$

- (b) untuk setiap $b \in B$ dengan $p(b, Tb) > 0$ berlaku $\inf\{p(u, b) + p(u, T(u)) : u \in B\} > 0$,

maka T memiliki titik tetap.

Bukti. Jika $p(Ta, Tb) > 0$ maka dapat dikenakan logaritma natural pada kedua sisi dan diperoleh:

$$\ln(p(Ta, Tb)) \leq \ln\left[e^{\frac{-1}{1+p(a,b)}p(a,b)}\right] = \frac{-1}{1+p(a,b)} + \ln[p(a, b)].$$

Sehingga,

$$F[p(Ta, Tb)] + \phi(p(a, b)) \leq F(p(a, b)),$$

dengan $F(t) = \ln(t)$ dan $\phi(t) = \frac{1}{1+t}$. □

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh suatu teorema yang menyatakan bahwa pemetaan kontraksi- (ϕ, F, ω) bernilai banyak memiliki titik tetap. Untuk menjamin eksistensi titik tetap maka ditambahkan suatu syarat yaitu $\forall z \in B$ berlaku $\inf\{p(u, z) + D_p(u, T(u)) : u \in B\} > 0$, di mana $z \notin T(z)$.

Daftar Pustaka

- [1] Kada, O., Suzuki, T., Takahashi, W., 1996, Non Convex Minimization Theorems and A Fixed Point Theorems in Complete Metric Spaces, *Mathematica Japonica*, Vol. **44**: 381 – 391
- [2] Piri, H., Kumam, P., 2014, Some fixed point theorems concerning F -contraction in complete metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, Vol. **2014**(1): 21
- [3] Wardowski, D., 2017, Solving existence problems via F -contractions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. **146**(4): 1585 – 1598

- [4] Piri, H., Rahrovi, S., Zarghami, R., 2021, Some fixed point theorems on generalized asymmetric metric spaces, *Asian-European Journal of Mathematics*, Vol. **14**(07): 2150109
- [5] Ge, X., Yang, S., 2021, Some fixed point results on generalized metric spaces. *AIMS Mathematics*, Vol. **6**(2): 1769 – 1780
- [6] Rossafi, M., Kari, A., 2023, New fixed point theorems for (ϕ, F) -contraction on rectangular b-metric spaces, *Afrika Matematika*, Vol. **34**(3): 26
- [7] Pasangka, I. G., 2021, Teorema Titik Tetap Berkaitan dengan Pemetaan Kontraksi- F dan Jarak- ω pada Ruang Metrik Lengkap, *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, Vol. **15**(2): 355 – 360
- [8] Pasangka, I. G., 2021, Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraksi- ψ - ω Bernilai Banyak pada Ruang Metrik Lengkap- α , *Jurnal Sains Dasar*, Vol. **9**(2): 50 – 53
- [9] Rossafi, M., Kari, A., Park, C., Lee, J. R., 2022, New fixed point for $\theta - \phi$ -contraction on b -metric spaces, *Journal of Mathematics and Computer Science*, Vol. **29**(01): 12 – 27
- [10] Asim, M., Mujahid, S., Uddin, I., 2022, Fixed point theorems for F - contraction mapping in complete rectangular M -metric space, *Appl Gen Topol*, Vol. **23**(2): 363 – 376
- [11] Berinde, V., Pcurar, M., 2021. Existence and Approximation of Fixed Points of Enriched Contractions and Enriched ϕ -Contractions, *Symmetry*, Vol. **13**(3): 498
- [12] Kari, A., Al-Rawashdeh, A., 2023, New Fixed Point Theorems for θ - ω -Contraction on λ, μ -Generalized Metric Spaces, *Journal of Function Spaces*, Vol. **2023**: 1 – 14
- [13] Karlsson, A., 2024, A Metric Fixed Point Theorem and Some of Its Applications, *Geometric and Functional Analysis*, Vol. **34**(2): 486 – 511
- [14] Khantwal, D., Aneja, S., GaiRola, U. C., 2021, A fixed point theorem for (ϕ, ψ) -convex contraction in metric spaces, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Application*, Vol. **5**(2): 240 – 245
- [15] Nazam, M., Park, C., Arshad, M., 2021, Fixed point problems for generalized contractions with applications, *Advances in Difference Equations*, Vol. **2021**(1): 247
- [16] Yaseen, M. T., Ali, A. H., Al-moneef, A. A., Bazighifan, O., Nofal, T. A., Ghanim, F., 2022, New Results of Fixed-Point Theorems in Complete Metric Spaces, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. **2022**: 1 – 5