

MODEL SEIR DENGAN PSEUDO-RECOVERY PADA KASUS TUBERKULOSIS DI JAWA BARAT

ZULFATIN NAFISAH, YUDI ARI ADI*

*Program Studi Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi Terapan, Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia
email : zulfatin2015015025@webmail.uad.ac.id , yudi.adi@math.uad.ac.id*

Diterima 4 Juni 2024 Direvisi 27 Juni 2024 Dipublikasikan 31 Juli 2024

Abstrak. Tuberkulosis adalah salah satu penyakit menular yang paling umum dan juga paling sulit didiagnosis. Provinsi Jawa Barat merupakan salah satu dari beberapa provinsi di Indonesia yang memiliki prevalensi sebesar 63%. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengembangkan model analisis tuberkulosis tipe SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed) dengan mempertimbangkan pengobatan dan adanya pemulihan semu (*pseudo recovery*). Model ini terdiri dari empat kelas yaitu, rentan, terpapar tetapi belum menularkan penyakit, terinfeksi dan dapat menularkan penyakit, dan sembuh semu. Data yang digunakan adalah jumlah total kasus tuberkulosis di Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Barat dari tahun 2011 – 2022. Fungsi Lyapunov dan prinsip invarian LaSalle digunakan untuk menunjukkan bahwa titik keseimbangan stabil secara global dan tuberkulosis akan bertahan jika angka reproduksi dasar lebih besar dari satu. Sebaliknya, penyakit akan musnah jika angka reproduksi dasar kurang dari satu. Prosedur bifurkasi menggunakan teori manifold pusat digunakan untuk melakukan studi bifurkasi. Kondisi matematika memastikan terjadinya bifurkasi maju. Terakhir, simulasi numerik dilakukan untuk mendukung temuan teoretis.

Kata Kunci: Analisis sensitivitas, Bifurkasi forward, Pseudo-recovery, Tuberkulosis

Abstract. Tuberculosis is one of the most common infectious diseases and one of the most difficult to diagnose. West Java Province is one of several provinces in Indonesia that has a prevalence of 63%. The purpose of this study is to develop a SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed) type tuberculosis analysis model by considering treatment and pseudo recovery. The model consists of four classes, namely, susceptible, exposed but not yet transmitting the disease, infected and can transmit the disease, and pseudo recovery. The data used is the total number of tuberculosis cases in the West Java Provincial Health Office from 2011-2022. The Lyapunov function and LaSalle invariance principle were used to show that the equilibrium point is globally stable and tuberculosis will persist if the basic reproduction number is greater than one. Conversely, the disease will be wiped out if the basic reproduction number is less than one. Bifurcation procedures using central manifold theory are used to conduct bifurcation studies. Mathematical conditions ensure the occurrence of forward bifurcation. Finally, numerical simulations are performed to support the theoretical findings.

Keywords: Sensitivity analysis, forward bifurcation, Pseudo-recovery, Tuberculosis

*penulis korespondensi

1. Pendahuluan

Salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis* adalah Tuberkulosis [1]. Data World Health Organization (WHO) menunjukkan bahwa sekitar 969 ribu orang di Indonesia terinfeksi tuberkulosis pada tahun 2021 dan sekitar 144 ribu orang meninggal karena tuberkulosis [2,3]. Tuberkulosis menempati peringkat ke-13 sebagai penyebab kematian terbanyak secara global dan merupakan penyakit menular kedua setelah COVID-19 dan HIV-AIDS [4]. Oleh karena itu, tuberkulosis menjadi masalah kesehatan utama di dunia.

Indonesia masih menjadi negara dengan tingkat kasus tuberkulosis tertinggi di dunia [5]. Jumlah kasus tuberkulosis yang tercatat berdasarkan diagnosa dokter dari 38 provinsi di Indonesia menunjukkan bahwa Provinsi Papua, Provinsi Banten, dan Provinsi Jawa Barat merupakan tiga daerah dengan prevalensi tertinggi, masing-masing mencapai 77%, 76%, dan 63% [6]. Berdasarkan data tersebut, Provinsi Jawa Barat menempati urutan ketiga dengan jumlah kasus tuberkulosis tertinggi di Indonesia. Berdasarkan data dari Dinas Kesehatan Jawa Barat, sebagian besar kasus tuberkulosis di provinsi ini meningkat dari tahun 2021 hingga 2023. Pada 2021, kasus baru mencapai 92.000 kasus, meningkat menjadi 159.000 pada 2022 [7]. Penanganan tuberkulosis menjadi salah satu *Sustainable Development Goals* (SDGs) [8]. Untuk memprediksi kemungkinan pencapaian tujuan tersebut, dapat digunakan model matematika.

Model matematika merupakan representasi formal yang dapat digunakan untuk menyederhanakan dan memahami masalah dalam kehidupan nyata. Salah satu contoh aplikasi model matematika adalah untuk mengetahui dan mempelajari penyakit menular dalam periode waktu tertentu. Penggunaan model deterministik atau stokastik dapat digunakan untuk memodelkan penyakit menular. Model matematika tersebut di antaranya adalah SIR, SEIR, SEIRS, SITR, dan SEIV. Setiap jenis model memiliki karakteristik masing-masing, yang disesuaikan dengan bentuk dan model penyakit menular.

Pemodelan matematika terkait penyebaran tuberkulosis dapat dipelajari pada [9,10,11,12,13]. Syam, dkk [9] membahas tentang model SEIRS untuk penyebaran penyakit tuberkulosis di Kota Makassar. Mereka menggunakan data dari Kota Makassar dan menganalisis pola penyebaran penyakit tersebut dengan menggunakan model matematika. Chandra dan Roudhotillah [10] menganalisis stabilitas model penyebaran penyakit tuberkulosis dengan menggunakan pendekatan MSEITR. Mereka membahas implikasi hasil analisis stabilitas ini terhadap kontrol epidemiologi penyakit. Qomariyah dkk [11] melakukan analisis stabilitas pada model epidemiologi tuberkulosis dengan mempertimbangkan laju insidensi nonlinear dan efek pengobatan. Mereka menyoroti pentingnya efek pengobatan dalam strategi pengendalian penyakit. Selanjutnya Upadhyay dkk [12] membahas tentang dinamika model epidemiologi SEIR dengan laju insidensi dan tingkat pengobatan nonlinier. Mereka menganalisis bagaimana faktor-faktor tersebut mempengaruhi penyebaran penyakit tuberkulosis. Sedangkan Qunia dkk [13] mengeksplorasi dampak tingkat kambuh pada model epidemiologi deterministik dengan pseudo-recovery. Mereka menyoroti pentingnya memperhitungkan tingkat kambuh dalam merancang kebi-

jakan pengendalian penyakit. Artikel-artikel tersebut memberikan kontribusi penting dalam pemahaman tentang dinamika penyebaran penyakit tuberkulosis dan relevansinya dalam pengendalian penyakit tuberkulosis.

Pada artikel ini dijelaskan model matematika tuberkulosis *Susceptible-Exposed-Infected-Removed* (SEIR) dengan *Pseudo Recovery*. Selanjutnya dari model yang terbentuk akan ditentukan analisis kestabilan lokal titik ekuilibrium bebas penyakit dan kestabilan global titik ekuilibrium endemik pada penyakit tuberkulosis. Dibahas juga analisis sensitivitas dan bifurkasi.

2. Landasan Teori

Pada bagian ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang digunakan dalam pembahasan sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, kriteria Routh Hurwitz, dan bilangan reproduksi dasar.

Definisi 2.1. [14] Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dan $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, E himpunan terbuka, $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Fungsi $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ disebut solusi Sistem (2.1) pada interval I jika $\mathbf{x}(t)$ diferensiabel pada I dan untuk setiap $t \in I$ berlaku $\mathbf{x}(t) \in E$ dan $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, dengan $C(E)$ menyatakan himpunan semua fungsi kontinu pada E dan I interval terbuka.

Definisi 2.2. [14] Titik $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari sistem persamaan diferensial (2.1) jika memenuhi $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Teorema 2.3. [14] Jika $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ memiliki turunan di $\mathbf{x}_0$, maka turunan parsial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ ada pada $\mathbf{x}_0$ dan untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ berlaku:

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x} = \sum_{i=1, j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{\mathbf{x}})x_j, \quad (2.2)$$

matriks $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$, atau biasa ditulis dengan J , dinamakan matriks Jacobian.

Linearisasi sistem diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.4. [14] Diberikan matriks Jacobian $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$. Sistem linear $\dot{\mathbf{x}} = (D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))\mathbf{x}$ disebut linearisasi dari sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ di sekitar titik $\bar{\mathbf{x}}$.

Definisi 2.5. [14] Diberikan suatu sistem persamaan diferensial $\frac{dx}{dt} = f(x)$, dengan $x, f(x) \in \mathbb{R}$. Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}$ disebut titik ekuilibrium jika dan hanya jika $f(\bar{x}) = 0$.

Kestabilan titik ekuilibrium Sistem (2.1) diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.6. [14] Sistem linear dikatakan **stabil** jika semua solusi pada sistem $t \rightarrow \infty$ dan **stabil asimtotik** jika semua solusi konvergen ke 0 dengan $t \rightarrow \infty$.

Teorema 2.7. [15] Misal persamaan karakteristik matriks $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ pada sistem (2.2) dinyatakan sebagai:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2.3)$$

dengan $a_n \neq 0$. Akar-akar persamaan karakteristik sistem (2.1) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika:

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0,$$

dengan $k = 1, 2, \dots, n$.

Untuk kasus tertentu, misalnya $n = 4$, maka persamaan (2.2) menjadi,:

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0. \quad (2.4)$$

Akar-akar persamaan (2.4) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika:

- (1) $a_1 > 0$,
- (2) $a_4 > 0$,
- (3) $a_1a_2 - a_3 > 0$,
- (4) $(a_1a_2 - a_3)a_3 - a_1^2a_4 > 0$.

Definisi 2.8. [16] Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah rata-rata jumlah individu yang terinfeksi selama masa terinfeksi dalam keseluruhan populasi rentan.

Selanjutnya, persamaan kompartemen terinfeksi yang sudah dilinearkan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = (F - V)x, \quad (2.5)$$

dengan F dan V merupakan matriks $n \times n$. Notasi F_i menyatakan laju kemunculan infeksi baru yang menambah kelas terinfeksi, V_i adalah laju perpindahan individu yang keluar dari kelas terinfeksi, x_0 adalah titik ekuilibrium bebas penyakit, dan G merupakan matriks non negatif. Maka bilangan reproduksi dasar merupakan radius spektral dari matriks G atau $\rho(G)$ yang dinyatakan dengan [17,18,19]:

$$R_0 = \rho(G) = \rho(FV^{-1}), \quad (2.6)$$

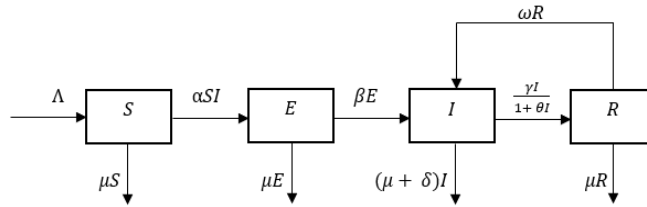
dan bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks $\left[\frac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_j} \right] \left[\frac{\partial V_i(x_0)}{\partial x_j} \right]^{-1}$, dimana $F = \left[\frac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_j} \right]$ dan $V = \left[\frac{\partial V_i(x_0)}{\partial x_j} \right]$.

3. Pembahasan

3.1. Formulasi Model

Penyakit menular tuberkulosis dapat di modelkan menggunakan model matematika epidemik. Untuk menyusun model epidemik tuberkulosis ini, total populasi pada saat waktu t disimbolkan dengan $N(t)$, terdiri dari empat sub-populasi, yaitu

populasi rentan (S) adalah individu yang berisiko tertular penyakit tersebut, populasi terpapar (E) adalah individu yang terpapar tuberkulosis namun belum mampu menularkannya, populasi terinfeksi (I) mewakili individu yang tertular penyakit dan dapat menularkannya, dan populasi sembuh (R) mencakup individu yang telah pulih dari tuberkulosis. Dalam penelitian ini, formulasi model menambahkan asumsi bahwa individu yang sudah pulih masih mempunyai peluang untuk terinfeksi atau mengalami kekambuhan (*pseudo recovery*) dan dapat menularkan penyakit. Diagram kompartemen model SEIR dengan *pseudo recovery* penyakit tuberkulosis seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram kompartemen model SEIR dengan pseudo-recovery

Berdasarkan Gambar 1, diagram alur model SEIR dengan *Pseudo Recovery* untuk dinamika penularan penyakit tuberkulosis; Λ adalah jumlah individu yang masuk karena adanya kelahiran dan migrasi, αSI terjadi ketika individu yang rentan melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi, βE mewakili individu yang tertular sepenuhnya, $\frac{1}{1 + \theta I}$ adalah faktor penghambat (*inhibitor*) terhadap laju kesembuhan. Faktor penghambat tersebut seperti biaya pengobatan yang mahal, fasilitas kesehatan yang kurang memadai, persediaan obat yang terbatas, dan kebiasaan minum obat yang kurang teratur. Jumlah individu yang mati secara alami selama perjalanan penyakit dilambangkan dengan μS ; μE ; μI ; μR , δI adalah kematian yang disebabkan oleh penyakit di kelas *infected* (I), dan ωR adalah individu yang mengalami kekambuhan.

Berdasarkan Gambar 1 diperoleh model dalam persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - (\mu + \alpha I) S, \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha SI - (\mu + \beta) E, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta E - (\mu + \delta) I - \frac{\gamma I}{1 + \theta I} + \omega R, \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{\gamma I}{1 + \theta I} - (\mu + \omega) R, \end{aligned} \quad (3.1)$$

yang memenuhi kondisi awal

$$S(0), E(0), I(0), R(0) \geq 0, \quad (3.2)$$

dengan

- S : Individu rentan
 E : Individu yang terinfeksi tuberkulosis, namun tidak mampu menularkan penyakit
 I : Individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit tuberkulosis
 R : Individu yang sudah pulih
 Λ : Jumlah individu yang masuk (kelahiran, migrasi)
 α : Laju individu rentan menjadi terinfeksi
 β : Laju penularan penyakit tuberkulosis
 γ : Laju kesembuhan dari infeksi yang aktif
 θ : Faktor *inhibitor* (penghambat) terhadap penularan penyakit tuberkulosis
 μ : Laju kematian alami
 δ : Laju kematian karena terinfeksi tuberkulosis pada setiap individu
 ω : Laju kekambuhan penyakit tuberkulosis

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa variabel dalam model bernilai positif, maka akan dibuktikan bahwa sistem (3.1) mempunyai solusi positif dan terbatas dalam Teorema 3.1.

Teorema 3.1. *Himpunan $\Omega = \left\{ (S, E, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : S + E + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$ merupakan invarian positif untuk sistem (3.1) dengan kondisi awal (3.2).*

Bukti. Berdasarkan persamaan (3.1) diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}, \\
 &= \Lambda - (\mu + \alpha I) S + \alpha SI - (\mu + \beta) E + \beta E - (\mu + \delta) I - \frac{\gamma I}{1 + \theta I} + \omega R \\
 &\quad + \frac{\gamma I}{1 + \theta I} - (\mu + \omega) R, \\
 &= \Lambda - \mu S - \mu E - \mu I - \mu R - \delta I, \\
 &= \Lambda - \mu (S + E + I + R) - \delta I, \\
 &= \Lambda - \mu N - \delta I,
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \delta I \leq \Lambda - \mu N.$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan pertidaksamaan di atas diperoleh penyelesaian menggunakan kondisi awal $t = 0$, N_0 sebagai berikut.

$$N(t) \leq N_0 e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Dengan demikian, jika kondisi awal berada dalam himpunan Ω , maka solusi sistem akan selalu berada dalam Ω untuk $t \rightarrow \infty$. Sebaliknya, jika kondisi awal berada di luar himpunan Ω , maka solusi sistem akan cenderung mendekati himpunan Ω untuk $t \rightarrow \infty$. Oleh karena itu, himpunan Ω merupakan invarian positif. $\square$

3.2. Titik Ekuilibrium dan Analisis Kestabilan

Titik ekuilibrium Sistem (3.1) terjadi pada saat $\left(\frac{dS}{dt}, \frac{dE}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt}\right) = (0, 0, 0, 0)$. Diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit:

$$E_0 = (S^0, E^0, I^0, R^0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right).$$

Berikutnya ditentukan bilangan reproduksi dasar. Bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan jumlah rata-rata individu dalam suatu populasi yang rentan terhadap individu yang terinfeksi. Metode *next generation matrix* digunakan untuk memperoleh bilangan reproduksi dasar, yaitu $G = FV^{-1}$. Dalam model epidemiologi ini, individu yang mengalami kekambuhan penyakit dikelompokkan ke matriks $\mathcal{F}$. Matriks $\mathcal{F}$ mewakili kompartemen E , I , dan R yang merupakan sub populasi individu yang sembuh dari infeksi, tetapi masih memiliki kemungkinan kambuh kembali. Sedangkan matriks $\mathcal{V}$ merupakan transisi yang tersisa yaitu laju kelahiran, laju kematian, penyebaran penyakit, dan laju pemulihan. R_0 didefinisikan sebagai radius *spektral* dari *next generation matrix* FV^{-1} dengan F dan V adalah matriks Jacobian dari $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Oleh karena itu dari persamaan (3.1) diperoleh:

$$\mathcal{F}[E, I, R] = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V}[E, I, R] = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mu + \beta)E \\ -\beta E + (\mu + \delta)I + \frac{\gamma I}{1 + \theta I} - \omega R \\ -\frac{\gamma I}{1 + \theta I} + (\mu + \omega)R \end{bmatrix}.$$

Diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0), yaitu:

$$R_0 = \frac{\alpha \Lambda \beta (\mu + \omega)}{\mu (\mu + \beta) (\mu (\mu + \delta + \gamma) + \omega (\mu + \delta))}.$$

Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.2. *Titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) akan bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.*

Bukti. Matriks Jacobian sistem (3.1) di titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ adalah:

$$J(S^0, E^0, I^0, R^0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\alpha \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) & 0 \\ 0 & -(\mu + \beta) & \alpha \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) & 0 \\ 0 & \beta & -(\mu + \delta + \gamma) & \omega \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \omega) \end{bmatrix},$$

dan persamaan karakteristiknya adalah:

$$(\lambda + \mu) \left[\lambda + (\mu + \beta) [(\lambda + \mu + \delta + \gamma) (\lambda + \mu + \omega) - \omega \gamma] + \beta \left(\frac{-\alpha \Lambda}{\mu} (\lambda + \mu + \omega) \right) \right] = 0,$$

sehingga diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = -\mu < 0,$$

dan tiga nilai eigen lainnya merupakan akar persamaan kubik:

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (3.3)$$

dengan:

$$a_2 = (\mu + \omega) + (\mu + \delta + \gamma) + (\mu + \beta) > 0,$$

$$a_1 = (\mu + \beta)(\mu + \delta + \gamma) + (\mu + \beta)(\mu + \omega) + (\mu + \delta + \gamma)(\delta + \gamma) - \left(\omega\gamma - \frac{\beta\alpha\Lambda}{\mu}\right),$$

$$a_0 = (\mu + \beta)(\mu(\mu + \delta + \gamma) + \omega(\mu + \delta))(1 - R_0).$$

Menurut kriteria *Routh-Hurwitz*, persamaan (3.3) memiliki akar-akar dengan bagian real negatif jika $a_2 > 0$, $a_0 > 0$, dan $a_2a_1 - a_0 > 0$.

$$\begin{aligned} a_2a_1 - a_0 &= [(\mu + \omega) + (\mu + \delta + \gamma) + (\mu + \beta)][(\mu + \beta)(\mu + \delta + \gamma) + (\mu + \beta)(\mu + \omega)] \\ &\quad + (\mu + \delta + \gamma)(\delta + \gamma) - \left(\omega\gamma - \frac{\beta\alpha\Lambda}{\mu}\right) - (\mu + \beta)(\mu + \delta + \gamma)(\mu + \omega) - \omega\gamma \\ &\quad - \frac{\beta\alpha\Lambda}{\mu}(\mu + \omega) \\ &= [(\mu + \omega) + (\mu + \delta + \gamma) + (\mu + \beta)][(\mu + \beta)((\mu + \delta + \gamma) + (\mu + \omega)) \\ &\quad + (\mu + \delta + \gamma)(\delta + \gamma) + \frac{\beta\alpha\Lambda}{\mu} - \omega\gamma - (\mu + \beta)(\mu(\mu + \delta + \gamma) + \omega(\mu + \delta)) \\ &\quad - \frac{\beta\alpha\Lambda}{\mu}(\mu + \omega)] \\ &= \left[(\mu + \beta)[(\mu + \delta + \gamma) + (\mu + \omega)] + (\mu + \delta + \gamma)(\delta + \gamma) + \frac{\beta\alpha\Lambda}{\mu} - \omega\gamma\right] A \\ &\quad - B, \end{aligned}$$

dengan:

$$A = (\mu + \omega) + (\mu + \delta + \gamma) + (\mu + \beta),$$

$$B = (\mu + \beta)[\mu(\mu + \delta + \gamma) + \omega(\mu + \delta)] \left(1 - \frac{\beta\alpha\Lambda(\mu + \omega)}{(\mu + \beta)[\mu(\mu + \delta + \gamma) + \omega(\mu + \delta)]}\right).$$

Untuk membuktikan bahwa semua nilai eigen mempunyai bilangan real negatif digunakan kriteria *Routh Hurwitz*, yaitu $a_2 > 0$, $a_0 > 0$, $a_2a_1 - a_0 > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik lokal dengan syarat $R_0 < 1$. $\square$

Selanjutnya dapat diperoleh titik ekuilibrium endemik yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3. *Sistem (3.1) mempunyai:*

- (1) satu titik ekuilibrium endemik jika $R_0 > 1$,
- (2) tidak ada titik ekuilibrium endemik jika $R_0 < 1$.

Bukti. Titik ekuilibrium tercapai pada saat ($I \neq 0$). Dari sistem (2.1) diperoleh:

$$\begin{aligned}\Lambda - (\mu + \alpha I^*) S^* &= 0, \\ \alpha S^* I^* - (\mu + \beta) E^* &= 0, \\ \beta E^* - (\mu + \delta) I^* - \frac{\gamma I^*}{1 + \theta I^*} + \omega R^* &= 0, \\ \frac{\gamma I^*}{1 + \theta I^*} - (\mu + \omega) R^* &= 0,\end{aligned}\tag{3.4}$$

sehingga $S^* = \frac{\Lambda}{\mu + \alpha I^*}$, $E^* = \frac{\alpha \Lambda I^*}{(\mu + \beta)(\mu + \alpha I^*)}$, dan $R^* = \frac{\gamma I^*}{(1 + \theta I^*)(\mu + \omega)}$.

Selanjutnya substitusi ke dalam persamaan ketiga pada (3.5). Diperoleh:

$$a_2 I^2 + a_1 I + a_0 = 0,$$

dengan:

$$\begin{aligned}a_2 &= -(\mu + \omega)(\mu + \delta)(\mu + \beta)\alpha\theta < 0, \\ a_1 &= (\mu + \omega)\beta\alpha\Lambda\theta - (\mu + \beta)((\mu + \omega)(\mu + \beta)(\mu + \delta + \gamma) + \mu\alpha\gamma), \\ a_0 &= (R_0 - 1)\mu(\mu + \beta)(\mu(\mu + \delta + \gamma) + \omega(\mu + \delta)) < 0, \text{ jika } R_0 < 1, \\ &= (R_0 - 1)\mu(\mu + \beta)(\mu(\mu + \delta + \gamma) + \omega(\mu + \delta)) > 0, \text{ jika } R_0 > 1.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Berdasarkan aturan tanda Descartes, maka diperoleh jumlah perubahan tanda pada titik ekuilibrium endemik (I^*) sebagai berikut.

Tabel 1. Titik ekuilibrium endemik

	a_2	a_1	a_0	Banyaknya akar positif
$R_0 < 1$	< 0	< 0	< 0	0
$R_0 > 1$	< 0	< 0	> 0	1

Dari Tabel 1 terlihat bahwa jika $R_0 < 1$ maka tidak ada titik ekuilibrium endemik, sedangkan jika $R_0 > 1$ hanya terdapat satu titik ekuilibrium endemik. $\square$

Kestabilan titik ekuilibrium endemik dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.4. *Titik ekuilibrium endemik $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ pada sistem (3.1) stabil asimtotik global jika $R_0 > 1$.*

Bukti. Berikut diberikan Fungsi Lyapunov tipe Volterra:

$$\begin{aligned}L &= \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*}\right) + \left(E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*}\right) + \frac{\mu + \beta}{\beta} \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}\right) \\ &\quad + \frac{\omega(\mu + \beta)}{\beta(\mu + \omega)} \left(R - R^* - R^* \ln \frac{R}{R^*}\right).\end{aligned}$$

Turunan Fungsi Lyapunov diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt} &= S - \frac{SS^*}{S} + E - \frac{EE^*}{E} + \frac{\mu + \beta}{\beta} \left(I - \frac{II^*}{I} \right) + \frac{\omega(\mu + \beta)}{\beta(\mu + \omega)} \left(R - \frac{RR^*}{R} \right), \\
 &= S \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) + E \left(1 - \frac{E^*}{E} \right) + \frac{(\mu + \beta)}{\beta} I \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) + \frac{\omega(\mu + \beta)}{\beta(\mu + \omega)} R \left(1 - \frac{R^*}{R} \right), \\
 &= \Lambda \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) - \mu S \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) + \alpha IS^* - \alpha IS \frac{E^*}{E} + (\mu + \beta) E^* \\
 &\quad - \frac{(\mu + \beta)(\mu + \delta)I}{\beta} - \frac{(\mu + \beta)\gamma I}{\beta(1 + \theta I)} - (\mu + \beta) E \frac{I^*}{I} + \frac{(\mu + \beta)(\mu + \delta)I^*}{\beta} + \frac{(\mu + \beta)\gamma I^*}{\beta(1 + \theta I)} \\
 &\quad - \frac{(\mu + \beta)\omega RI^*}{\beta I} + \frac{\omega(\mu + \beta)}{\beta(\mu + \omega)} \left(\frac{\gamma I}{1 + \theta I} \right) - \frac{\omega(\mu + \beta)}{\beta(\mu + \omega)} \left(\frac{\gamma I}{1 + \theta I} \right) \frac{R^*}{R} + \frac{\omega(\mu + \beta)}{\beta} R^*.
 \end{aligned}$$

Dari sistem (3.1) diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= (\mu + \alpha I^*) S^*, \\
 \mu + \beta &= \frac{\alpha S^* I^*}{E^*}, \\
 \mu + \delta &= \frac{\beta E^* - \frac{\gamma I^*}{1 + \theta I^*} + \omega R^*}{I^*}, \\
 \mu + \omega &= \frac{\gamma I^*}{(1 + \theta I^*) R^*},
 \end{aligned}$$

sehingga:

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt} &= \mu S^* \left[2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} \right] + \alpha S^* I^* \left[3 - \frac{S^*}{S} - \frac{SI}{S^* I^*} \frac{E^*}{E} - \frac{EI^*}{E^* I} \right] \\
 &\quad + \frac{\gamma I^*}{E^* \beta (1 + \theta I)} \left[1 - \frac{I}{I^*} \right] + \frac{\omega R^*}{E^* \beta} \left[1 - \frac{R}{R^*} \right] \\
 &\quad + \frac{\alpha S^* I^* \omega R^*}{E^* \beta} \left[1 - \frac{RI^*}{R^* I} \right] + \frac{\omega \alpha S^* (1 + \theta I^*) R^* I}{E^* \beta (1 + \theta I)} \left[1 - \frac{R^*}{R} \right].
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan AM-GM (*Arithmetic Mean-Geometric Mean*) [20], diperoleh:

$$\begin{aligned}
 2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} &\leq 0, \\
 3 - \frac{S^*}{S} - \frac{SI}{S^* I^*} \frac{E^*}{E} - \frac{EI^*}{E^* I} &\leq 0, \\
 1 - \frac{I}{I^*} &\leq 0, \\
 1 - \frac{R}{R^*} &\leq 0, \\
 1 - \frac{RI^*}{R^* I} &\leq 0, \\
 1 - \frac{R^*}{R} &\leq 0,
 \end{aligned}$$

sehingga $\frac{dL}{dt} \leq 0$ dengan $\frac{dL}{dt} = 0$ jika $S = S^*, E = E^*, I = I^*, R = R^*$. Dengan demikian diperoleh $\frac{dL}{dt} \leq 0$. Berdasarkan teorema *Lyapunov-LaSalle's invariance*, invarian subset terbesar dimana $\frac{dL}{dt} = 0$ adalah $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$, dan disimpulkan bahwa titik ekuilibrium endemik E_1 stabil asimtotik global jika $R_0 > 1$. $\square$

Dari teorema ini dapat disimpulkan bahwa penyakit tuberkulosis akan menyebar kapan pun ketika $R_0 > 1$, berapapun jumlah awal individu yang menularkan penyakit tersebut dalam populasi.

4. Simulasi Numerik

4.1. Estimasi Parameter

Pada bagian ini model akan diselesaikan secara numerik. Sebagai analisis awal untuk menentukan parameter model epidemi tuberkulosis, beberapa parameter diasumsikan berdasarkan data tuberkulosis yang diperoleh dari website Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Barat pada tahun 2011 – 2022. Usia harapan hidup rata-rata penduduk Jawa Barat dari tahun 2011 – 2022 adalah 66 tahun, maka $\mu = \frac{1}{66} = 0.01515$. Badan Pusat Statistik (BPS) menyatakan jumlah penduduk Jawa Barat di tahun 2011 adalah 89.174.917 jiwa, sehingga untuk menghitung laju *recruitment* (Λ), yaitu tingkat kematian alami $\times$ total subpopulasi, yang pada kasus ini menghasilkan $\Lambda = 1.351.000$ [21].

Capaian keberhasilan pengobatan di Provinsi Jawa Barat pada tahun 2020 mencapai 83% dari target yang ditetapkan sebesar 90%. Angka tersebut turun menjadi 74% dari tahun 2021 hingga triwulan III tahun 2022. Berdasarkan hal tersebut, target penurunan insidensi tuberkulosis untuk tahun 2024 telah ditetapkan sebesar 190 per 100.000 penduduk [22]. Untuk parameter lainnya, digunakan metode *least square* melalui minimalisasi fungsi objektif kuadratik:

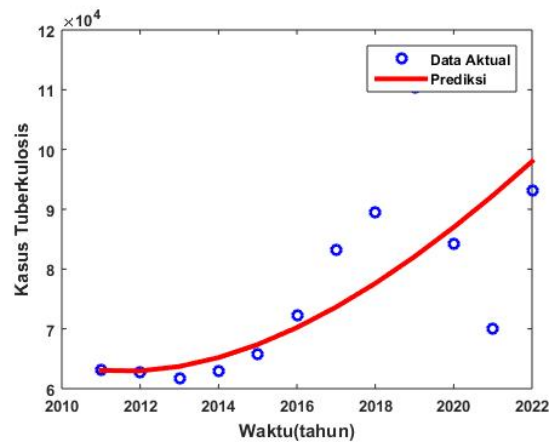
$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^n (I_{a_j} - I_{m_j})^2,$$

dimana I_{a_j} , I_{m_j} , n mewakili masing-masing jumlah kasus infeksi tuberkulosis aktual, jumlah kasus tuberkulosis yang diprediksi, dan jumlah total kasus. Untuk keperluan *fitting data*, penulis menghitung total kasus tuberkulosis yang dikonfirmasi sebagai jumlah total individu yang terpapar (E) dan individu yang terinfeksi (I). Nilai parameter yang paling sesuai dengan kasus tuberkulosis diberikan pada Tabel 2, sementara Hasil *fitting* antara model dengan data penderita tuberkulosis di Jawa Barat dari tahun 2011 – 2022 ditunjukkan pada Gambar 2.

Tingkat akurasi berdasarkan nilai *mean absolute percentage error* (MAPE) sebesar 8.5974% menunjukkan bahwa hasil estimasi parameter yang diperoleh akurat. Selanjutnya dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 2 diperoleh $R_0 = 2.5208 > 1$, yang mengindikasikan bahwa titik ekuilibrium endemik stabil global.

Tabel 2. Nilai parameter

Parameter	nilai	sumber
Λ	1.351.000	[21]
μ	0.01515	[21]
α	1.0563×10^{-8}	Fitting
β	0.0010921	Fitting
δ	0.0072373	Fitting
γ	0.0083693	Fitting
θ	0.0012755	Fitting
ω	0.031165	Fitting

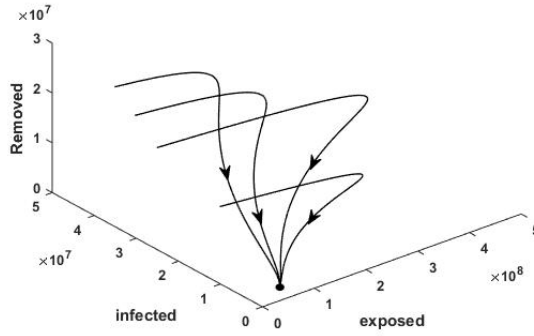


Gambar 2. Fitting model dengan data tuberkulosis di Jawa Barat

Gambar 3 menunjukkan subpopulasi terpapar (E), subpopulasi terinfeksi (I), dan subpopulasi pulih (R) menggunakan empat nilai awal yang berbeda akan menuju ke titik ekuilibrium $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*) = (3.1521, 5.3776, 2.6232, 141.63)$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium endemik E_1 bersifat stabil asimtotik. Dengan demikian ketika bilangan reproduksi dasar $R_0 > 1$, maka dengan kondisi awal apapun penyakit akan tetap ada dalam populasi dan penyebarannya terus terjadi.

Berdasarkan Teorema 3.3 dan Teorema 3.4 dapat disimpulkan terjadi bifurkasi forward ketika $R_0 = 1$. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1. *Sistem (3.1) mengalami bifurkasi forward di $R_0 = 1$, yang bersesuaian dengan $\alpha = \alpha^* = \frac{\mu(\beta + \mu)(\mu(\gamma + \delta + \mu) + \omega(\mu + \delta))}{\Lambda\beta(\mu + \omega)}$.*



Gambar 3. Trayektori fase menggunakan nilai parameter pada Tabel 2

Bukti. Matriks Jacobian sistem (3.1) di E_0 dengan $\alpha = \alpha^*$ adalah:

$$J(E_0, \alpha^*) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\alpha^* \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -(\beta + \mu) & \alpha^* \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \theta + \mu) & \omega \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \omega) \end{bmatrix},$$

mempunyai tiga nilai eigen real negatif dan satu nilai eigen nol. Dengan demikian, E_0 adalah titik ekuilibrium *non-hyperbolic*, sehingga sistem (3.1) mengalami bifurkasi saat $R_0 = 1$, yaitu di $\alpha = \alpha^*$.

Berikutnya akan ditentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen nol. Eigenvektor kanan, $\mathbf{w}$ dan eigenvektor kiri, $\mathbf{v}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen nol diperoleh dari $J(E_0, \alpha^*)\mathbf{w} = 0$ dan $\mathbf{v}J(E_0, \alpha^*) = 0$, yaitu:

$$\mathbf{w} = \left(\frac{-\alpha^* \Lambda}{\mu^2} w_3, \frac{\alpha^* \Lambda}{\mu(\beta + \mu)} w_3, w_3, \frac{\gamma}{\mu + \omega} w_3 \right)^T,$$

$$\mathbf{v} = \left(0, \frac{\beta}{\beta + \mu} v_3, v_3, \frac{\omega}{\mu + \omega} v_3 \right).$$

Agar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1$, maka w_3 dan v_3 adalah:

$$w_3 = \frac{1}{\alpha^* \beta \Lambda (\omega + \mu)^2 + \mu (\mu + \beta)^2 (\mu + \omega)^2 + \omega \gamma \mu (\mu + \beta)^2},$$

$$v_3 = \mu (\beta + \mu)^2 (\mu + \omega)^2.$$

Selanjutnya, arah bifurkasi dapat dilihat dari koefisien bifurkasi a dan b dengan:

$$a = \sum_{k,i,j=1}^4 v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} (E_0, \alpha^*), \quad b = \sum_{k,i=1}^4 v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \alpha} (E_0, \alpha^*).$$

Dengan memperhatikan komponen dari eigenvektor kanan $\mathbf{w}$ dan eigenvektor kiri

$\mathbf{v}$, dan turunan parsial kedua dari $f_i, i = 1, 2, 3, 4$ dari sistem (3.1), diperoleh:

$$a = v_2 w_1 w_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial S \partial I}(E_0, \alpha^*) + v_2 w_3 w_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial I \partial S}(E_0, \alpha^*) = -2 \frac{\alpha^{*3} \Lambda^2 v_2 w_3^2}{\mu^3},$$

$$b = v_2 w_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial I \partial \alpha}(E_0, \alpha^*) = \frac{\alpha^* \Lambda \beta v_3 w_3}{\mu(\beta + \mu)}.$$

Mengingat v_3, w_3 , dan semua nilai parameter sistem (3.1) adalah positif, maka $a < 0$ dan $b > 0$ sehingga menurut Teorema 4 di dalam [23], disimpulkan bahwa sistem (3.1) mempunyai bifurkasi forward di $R_0 = 1$, atau ekuivalen dengan:

$$\alpha = \alpha^* = \frac{\mu(\beta + \mu)(\mu(\gamma + \delta + \mu) + \omega(\mu + \delta))}{\Lambda \beta(\mu + \omega)}. \quad \square$$

4.2. Analisis Sensitivitas

Parameter yang paling berpengaruh pada bilangan reproduksi dasar R_0 yang menunjukkan terjadinya penyebaran penyakit tuberkulosis di dalam populasi diidentifikasi melalui penggunaan analisis sensitivitas. Oleh karena itu, analisis sensitivitas penting dilakukan untuk mengendalikan penyebaran penyakit tuberkulosis. Indeks sensitivitas merupakan rasio perubahan relatif dalam R_0 terhadap perubahan relatif dalam parameter p seperti berikut [24].

$$C_{R_0}^p = \frac{\partial R_0}{\partial p} \times \frac{p}{R_0}.$$

Indeks sensitivitas parameter terhadap R_0 disajikan dalam Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Nilai parameter

Parameter	Indeks sensitivitas
μ	-2.6090
δ	-0.2880
γ	-0.1089
β	0.9327
ω	0.0733
α	1

Berdasarkan Tabel 3 diperoleh parameter dengan indeks sensitivitas positif adalah α, β , dan ω . Hal ini menunjukkan bahwa nilai R_0 akan selalu naik ketika salah satu parameter α, β , dan ω dinaikkan sedangkan parameter lainnya konstan, sehingga penyebaran tuberkulosis akan selalu terjadi. Sementara parameter yang memiliki nilai indeks sensitivitas negatif adalah μ, δ , dan γ . Hal ini menunjukkan bahwa nilai R_0 akan menurun sehingga penyebaran tuberkulosis berkurang, jika salah satu parameter dinaikkan sementara parameter lainnya tetap konstan.

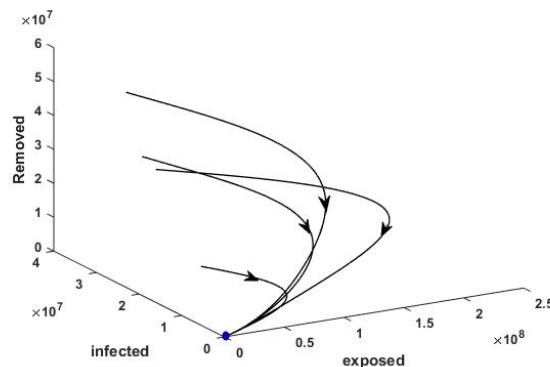
Indeks sensitivitas μ memiliki tanda negatif yang berarti semakin besar tingkat kematian semakin berkurang R_0 . Namun, tidak mungkin untuk meningkatkan tingkat kematian alami meskipun memiliki indeks sensitivitas yang paling luas.

Parameter lain yang memiliki indeks sensitivitas besar adalah α dan β yang memiliki indeks sensitivitas 1 dan 0.9327. Oleh karena itu, untuk mengurangi jumlah reproduksi dasar (R_0) nilai parameter α dan β harus dikurangi.

Pada Tabel 3, nilai parameter $\alpha = 1.0563 \times 10^{-8}$ dan $R_0 = 2.5208$, untuk menjaga stabilitas titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0), maka $R_0 < 1$. Karena indeks sensitivitas $\alpha = 1$, agar tidak terjadi penyebaran penyakit tuberkulosis atau endemik, maka diturunkan sebesar 90% sehingga nilai parameter menjadi $\alpha = 1.0563 \times 10^{-9}$ dan $R_0 = 0.2520$. Sementara nilai parameter $\beta = 0.0010921$ dengan nilai $R_0 = 2.5208$ dan indeks sensitivitas $\beta = 0.9327$, agar tidak terjadi penyebaran penyakit tuberkulosis atau endemik, maka diturunkan juga sebesar 90% sehingga nilai parameter menjadi $\beta = 0.00010921$ dan $R_0 = 0.2683$.

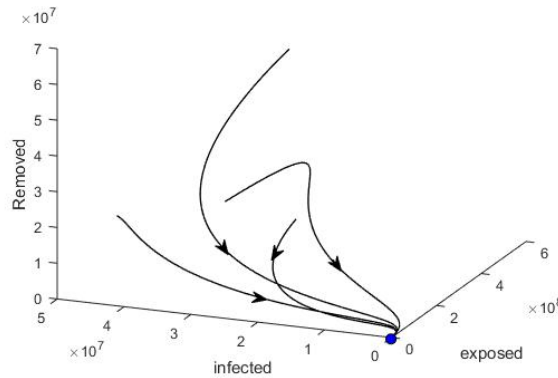
Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil secara asimtotik. Secara medis, untuk mengurangi laju penyebaran penyakit tuberkulosis dari individu yang terinfeksi terhadap individu yang rentan (α) dan individu yang terinfeksi yang dapat menularkan penyakit (β), dapat dilakukan berbagai tindakan pencegahan penularan penyakit tuberkulosis, seperti mengisolasi diri, penggunaan masker, kepatuhan minum obat, mengurangi kontak dengan penderita tuberkulosis, dan tindakan pencegahan lainnya.

Pada Gambar 4 disajikan gambar mengenai sub populasi *exposed*, *infected*, dan *removed* berdasarkan perubahan parameter α dan β .

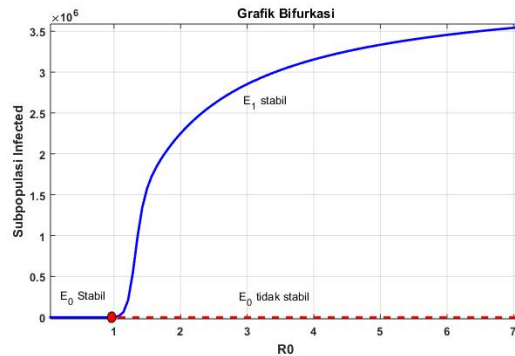


Gambar 4. Trayektori fase menggunakan nilai parameter pada Tabel 2 dengan $\alpha = 1.0563 \times 10^{-9}$

Gambar 4 dan Gambar 5 menunjukkan perilaku subpopulasi terpapar (E), subpopulasi terinfeksi (I), dan subpopulasi pulih (R) menggunakan empat nilai awal yang berbeda, dan menurunkan parameter α dan β sebesar 90%, yang akan menuju satu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (S, E, I, R) = (8.9174, 0, 0, 0)$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 bersifat stabil asimtotik. Artinya ketika bilangan reproduksi dasar $R_0 < 1$ dengan kondisi awal apapun, penyebaran penyakit dari individu terinfeksi sangat rendah sehingga penyebaran penyakit akan lenyap seiring berjalannya waktu.



Gambar 5. Trayektori fase menggunakan nilai parameter pada Tabel 2 dengan $\beta = 1.0921 \times 10^{-4}$



Gambar 6. Bifurkasi forward pada $R_0 = 1$

Gambar 6 memperlihatkan titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 dan titik ekuilibrium endemik E_1 saling berubah kestabilannya. Perubahan tersebut terjadi saat $R_0 = 1$ atau bersesuaian dengan $\alpha = \alpha^* = 4.1902 \times 10^{-9}$. Titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$. Selanjutnya jika $R_0 > 1$ terdapat satu titik ekuilibrium endemik E_1 yang stabil asimtotik. Pada kondisi terjadi bifurkasi forward ini, pencegahan penyebaran tuberkulosis dapat dilakukan dengan mereduksi α sehingga bernilai kurang dari α^* atau $R_0 < 1$.

5. Kesimpulan

Pada artikel ini dibahas model SEIR dengan *pseudo recovery* (sembuh semu) untuk penyakit tuberkulosis. Model ini menghasilkan dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 dan titik ekuilibrium endemik E_1 . Dari analisis kestabilan diperoleh bilangan reproduksi dasar yang diperoleh yaitu $R_0 =$

$\frac{\alpha\Lambda\beta(\mu+\omega)}{\mu(\mu+\beta)(\mu(\mu+\delta+\gamma)+\omega(\mu+\delta))}$ sebagai nilai ambang terjadinya endemik. Berdasarkan analisis kestabilan, titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$ dan titik ekuilibrium endemik E_1 stabil asimtotik global ketika $R_0 > 1$. Berdasarkan analisis sensitivitas, semakin besar nilai parameter α, β , dan ω maka R_0 akan semakin besar sehingga meningkatkan kemungkinan terjadi penyebaran penyakit tuberkulosis. Sementara, semakin besar nilai parameter μ, δ , dan γ maka nilai R_0 akan semakin menurun sehingga penyebaran penyakit tuberkulosis juga menurun. Selanjutnya dari analisis bifurkasi, dengan melakukan kontinuitas titik ekuilibrium bebas penyakit terhadap parameter α , model ini memiliki bifurkasi forward. Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa salah satu upaya pencegahan penyebaran penyakit tuberkulosis adalah dengan menurunkan angka penularan, yang dapat dicapai melalui upaya medis seperti menjaga kekebalan tubuh, menggunakan masker, kepatuhan minum obat, dan menghindari kontak dengan penderita tuberkulosis.

6. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada Universitas Ahmad Dahlan yang telah membantu dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Irwan, 2019, *Epidemiologi Penyakit Menular*, Edisi ke-3, Absolute Media, Yogyakarta.
- [2] WHO, 2023, *Global tuberculosis report 2021*
- [3] Biro Komunikasi dan Pelayanan Publik, Kementerian Kesehatan RI, *Deteksi TBC Capai Rekor Tertinggi di Tahun 2022*
- [4] WHO, 2022, *Fakta-fakta Utama Tuberkulosis 2022*
- [5] Aggarwal, A.N., 2019, Quality of life with TB, *Journal of Clinical Tuberculosis and Other Mycobacterial Diseases*, **17**. doi: 10.1016/j.jctube.2019.100121
- [6] Aja, N., Ramli, R., Rahman, H., 2022, Penularan Tuberkulosis Paru dalam Anggota Keluarga di Wilayah Kerja Puskesmas Siko Kota Ternate, *JKK: Jurnal Kedokteran dan Kesehatan* Vol **18**(1): 78 – 87
- [7] Anwari, S.P., 2023, Tren Penyakit TBC Meningkat, Kadinkes Jabar: Masih Banyak Stigma dari Masyarakat. *Portal jabar*.
- [8] Chakaya, J.M., Harries, A.D., Marks, G.B., 2020, Ending tuberculosis by 2030 Pipe dream or reality?, *International Journal of Infectious Diseases*, Vol. **92**: S51 – S54, doi: 10.1016/j.ijid.2020.02.021.
- [9] Syam, R., Side, S., Said, C., 2020, Model SEIRS Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar, *Journal of Mathematics Computations and Statistics* Vol. **3**(1): 11
- [10] Chandra, T.D., Roudhotillah, D., 2021, Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis Dengan Menggunakan MSEITR, *Wahana Matematika dan Sains: Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya* Vol. **15**(2): 56 – 74
- [11] Qomariyah, N., Sutimin, Herdiana, R., Utomo, R.H.S, Permatasari, A.H., 2021. Stability analysis of a tuberculosis epidemic model with nonlinear inci-

- dence rate and treatment effects, *Journal of Physics: Conference Series, IOP Publishing Ltd*, doi: 10.1088/1742-6596/1943/1/012118
- [12] Upadhyay, R.K., Pal, A.K., Kumari, S., Roy, P., 2019, Dynamics of an SEIR epidemic model with nonlinear incidence and treatments rates. *Nonlinear Dyn* Vol. **96**(4): 2351 – 2368, doi: 10.1007/s11071-019-04926-6
 - [13] Qunia, A.F., Kusnanto, A., Sianturi, P., 2021, The Impact of Relapse Rate on Deterministic Epidemiological Models with Pseudo-recovery. *Journal of Physics: Conference Series, IOP Publishing Ltd*, doi: 10.1088/1742-6596/1863/1/012004
 - [14] Perko, 2001, *Texts in Applied Mathematics 7: Differential Equations and Dynamical System*, Third Edition, Springer, New York.
 - [15] Murray, J.D., 2002, *Mathematical Biology: I. An Introduction*, Third Edition, Springer 2002.
 - [16] Yeketi, A. A., Othman, W. A. M., Musa, R., 2021, A Mathematical Model of the Tuberculosis Epidemic, *Acta Biotheor* Vol. **69**(3): 225 – 255, doi: 10.1007/s10441-020-09406-8
 - [17] Sulistiyowati, A., Abadi, 2023, Analisis Kestabilan Model Penyebaran Tuberkulosis Dengan MDR-TB dan Pengaruh Vaksinasi, *MATHunesa Jurnal Ilmiah Matematika* Vol. **11**(2): 156 – 163
 - [18] Ihsan, H., Side, Pagga, M., 2021, Pemodelan Matematika SEIRS Pada Penyebaran Penyakit Malaria di Kabupaten Mimika, *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics* Vol. **4**(1): 21 - 29
 - [19] Panigoro, H.S., Savitri, D., 2020. Bifurkasi Hopf pada Model Lotka-Volterra Orde-Fraksional dengan Efek Allee Aditif pada Predator. *Jambura Journal of Biomathematics (JJBM)* Vol. **1**(1): 16 – 24, doi: 10.34312/jjbm.v1i1.6908
 - [20] Maligranda, L., 2012, The AM-GM Inequality is Equivalent to the Bernoulli Inequality, *Math Intelligencer* Vol. **34**: 1 – 2, <https://doi.org/10.1007/s00283-011-9266-8>.
 - [21] BPS, 2023. *Jumlah Penduduk Menurut Kabupaten/Kota (Jiwa)*, Badan Pusat Statistika (BPS)
 - [22] Lestari, R., *Percepatan Eliminasi TBC Difokuskan Pada Peningkatan Penemuan Kasus*, <https://diskes.jabarprov.go.id/informasipublik/detail-berita>, Diakses pada 25 Maret 2024
 - [23] Castillo-Chavez, C., Song, B., 2020, Dynamical models of tuberculosis and their applications, *Mathematical Biosciences and Engineering* Vol. **1**(2): 361 - 404, doi:DOI:10.3934/mbe.2004.1.361
 - [24] Chitnis, N., Hayman, J. M., Cushing, J. M., 2008, Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model. *Bull. Math. Biol.* Vol. **70**(5): 1272 – 1296, doi: 10.1007/s11538-008-9299-0