

PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI BETA DENGAN METODE MOMEN DAN METODE MAKSIMUM *LIKELIHOOD*

FEBY RIDIANI

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
febyridianifeby@rocketmail.com*

Abstrak. Penduga titik dari suatu parameter populasi adalah sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai penduga dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Pada artikel ini, pendugaan titik dengan metode momen dan metode maksimum *Likelihood* digunakan untuk menentukan penduga titik dari distribusi Beta. Pendugaan parameter distribusi beta dengan metode kemungkinan maksimum dibantu dengan metode iterasi numerik, yaitu Newton-Raphson. Penduga yang diharapkan adalah yang memiliki sifat tak bias, efisien dan konsisten. Simulasi data dilakukan dalam penelitian ini untuk membuktikan ketiga sifat tersebut. Hasil simulasi data menunjukkan bahwa metode kemungkinan maksimum lebih efisien dibandingkan dengan metode momen dalam menduga parameter distribusi beta.

Kata Kunci: Distribusi Beta, Metode Momen, Metode Kemungkinan Maksimum, Metode Newton-Raphson

1. Pendahuluan

Statistika Inferensia mencakup semua metode yang berhubungan dengan analisis sebagian data untuk kemudian melakukan peramalan atau penarikan kesimpulan mengenai keseluruhan gugus data induknya [3]. Penarikan kesimpulan tersebut dapat dilakukan dengan dua hal, yaitu pendugaan parameter dan pengujian hipotesis mengenai parameter populasi.

Penduga titik dari sebuah parameter populasi adalah sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai penduga dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Penduga yang diharapkan adalah penduga yang bersifat tak bias yaitu penduga yang memiliki nilai harapan sama dengan nilai parameter yang sebenarnya. Selain itu penduga tersebut harus memiliki variansi minimum di antara semua penduga tak bias lainnya.

Distribusi yang dibahas dalam penelitian ini adalah distribusi Beta. Distribusi Beta adalah salah satu distribusi probabilitas kontinu yang didefinisikan pada interval $[0, 1]$ dan memiliki dua parameter bernilai positif, dilambangkan dengan α dan β , yang berperan sebagai eksponen variabel acak dan mengontrol bentuk dari distribusi Beta. Fungsi kepekatan peluang distribusi Beta dapat dinyatakan sebagai

berikut.

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad (1.1)$$

dimana $\alpha > 0$, $\beta > 0$ dan $B(\alpha, \beta)$ adalah fungsi Beta.

Dalam penelitian ini akan dikaji bagaimana menduga parameter distribusi beta dengan menggunakan berbagai metode pendugaan dan bagaimana perbandingan keefisienan penduga tersebut. Dua metode yang akan dikaji pada penelitian ini adalah metode momen dan metode kemungkinan maksimum.

2. Pendugaan Parameter dengan Metode Momen

Untuk mendapatkan penduga parameter distribusi beta dengan menggunakan metode momen, diperlukan momen pusat pertama dan kedua baik untuk populasi maupun sampel dari distribusi beta.

Momen pusat ke- k dari populasi didefinisikan sebagai

$$\mu'_k = E(X^k) \quad (2.1)$$

Momen pusat pertama dari populasi adalah nilai harapan dari peubah acak X tersebut, yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\mu_1 = E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (2.2)$$

Selanjutnya momen pusat kedua dari populasi diperoleh sebagai berikut.

$$\mu_2 = E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} \quad (2.3)$$

Momen pusat pertama dan kedua dari sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ didefinisikan sebagai berikut.

$$m_1 = \frac{\sum X_i}{n}, \quad (2.4)$$

$$m_2 = \frac{\sum X_i^2}{n} \quad (2.5)$$

Berdasarkan momen pusat populasi dan momen pusat sampel distribusi Beta serta menyelesaikan persamaan yang diperoleh, penduga untuk parameter α yang diperoleh dengan metode momen adalah

$$\hat{\alpha} = \bar{x} \left(\frac{\bar{x}(1 - \bar{x})}{S^2} - 1 \right) \quad (2.6)$$

dan penduga untuk parameter β yang diperoleh dengan metode kemungkinan maksimum adalah

$$\hat{\beta} = (1 - \bar{x}) \left(\frac{\bar{x}(1 - \bar{x})}{S^2} - 1 \right) \quad (2.7)$$

3. Pendugaan Parameter dengan Metode Kemungkinan Maksimum

Misalkan $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ adalah sampel acak berukuran n yang berasal dari distribusi Beta. Pendugaan parameter dengan metode kemungkinan maksimum dapat dilakukan dengan terlebih dahulu menentukan fungsi kemungkinan dari distribusi tersebut.

Fungsi kemungkinan dari fungsi kepekatian distribusi Beta adalah

$$L(\alpha, \beta | x_1, \dots, x_n) = \prod f(x_i; \alpha, \beta) = \left(\frac{1}{B(\alpha, \beta)}\right)^n \prod x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1} \quad (3.1)$$

Penduga dari parameter α dan β adalah penduga yang memaksimumkan fungsi kemungkinan tersebut. Nilai maksimum fungsi tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan logaritma natural dari fungsi kemungkinan tersebut, yang dinyatakan

$$\ln L(\alpha, \beta | x_1, \dots, x_n) = \ln\left(\left(\frac{1}{B(\alpha, \beta)}\right)^n \prod x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1}\right) \quad (3.2)$$

$$= n \ln(\Gamma(\alpha + \beta)) - n \ln(\Gamma(\alpha)) - n \ln(\Gamma(\beta)) \quad (3.3)$$

$$+ (\alpha - 1) \sum \ln(x_i) + (\beta - 1) \sum \ln(1 - x_i). \quad (3.4)$$

Fungsi di atas dapat dimaksimumkan dengan mendiferensialkan persamaan fungsi tersebut terhadap semua parameter yang mengikuti dan disamadengankan dengan nol.

- (1) Bila diturunkan terhadap α dan menyamakannya dengan nol

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L(\alpha, \beta | x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (3.5)$$

$$n\psi(\alpha + \beta) - n\psi(\alpha) + \sum \ln(x_i) = 0 \quad (3.6)$$

dimana $\psi(\cdot)$ adalah fungsi digamma.

- (2) Bila diturunkan terhadap β dan menyamakannya dengan nol

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(\alpha, \beta | x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (3.7)$$

$$n\psi(\alpha + \beta) - n\psi(\beta) + \sum \ln(1 - x_i) = 0 \quad (3.8)$$

dimana $\psi(\cdot)$ adalah fungsi digamma.

Dalam menentukan dugaan parameter α dan β dari distribusi beta dengan metode kemungkinan maksimum, tidak diperoleh ekspresi bentuk tertutup untuk dugaan parameter. Hal ini dapat diatasi dengan menggunakan metode iterasi numerik, yaitu metode Newton-Raphson.

4. Metode Newton-Raphson

Secara umum metode Newton Raphson dirumuskan sebagai berikut.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (4.1)$$

Langkah-langkah metode Newton-Raphson untuk menyelesaikan persamaan fungsi dua variabel adalah sebagai berikut.

- (1) Menentukan tebakan awal x_0 dan y_0 ,
- (2) Menentukan turunan pertama dan turunan kedua dari $z = f(x, y)$,
- (3) Definisikan g_t sebagai vektor fungsi yang ingin dicari akar-akarnya, yaitu

$$\vec{g}_t = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

dan matriks G_t sebagai matriks Jacobian dari $\vec{g}_t$ yaitu

$$\vec{G}_t = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Selanjutnya, definisikan matriks Hessian H_t yang dirumuskan dengan $H_t = -G_t$. Jadi iterasi Newton-Raphson untuk kasus ini adalah

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + H_t^{-1} \vec{g}_t \quad (4.4)$$

- (4) Iterasi akan berhenti ketika $\left\| \begin{bmatrix} x_{t+1} - x_t \\ y_{t+1} - y_t \end{bmatrix} \right\| < \epsilon$, dimana ϵ adalah batas galat yang ditetapkan.

Berdasarkan langkah-langkah di atas, pendugaan parameter distribusi Beta dengan metode kemungkinan maksimum dan dilanjutkan dengan metode Newton-Raphson dapat dilakukan dengan suatu iterasi

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{t+1} \\ \hat{\beta}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} + H_t^{-1} g_t \quad (4.5)$$

dimana

$$g_t = \begin{bmatrix} n\psi(\hat{\alpha}_t + \hat{\beta}_t) - n\psi(\hat{\alpha}_t) + \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \\ n\psi(\hat{\alpha}_t + \hat{\beta}_t) - n\psi(\hat{\beta}_t) + \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

dan

$$H_t = \begin{bmatrix} -n\psi_1(\hat{\alpha}_t + \hat{\beta}_t) + n\psi_1(\hat{\alpha}_t) & -n\psi_1(\hat{\alpha}_t + \hat{\beta}_t) \\ \psi_1(\hat{\alpha}_t + \hat{\beta}_t) & -n\psi_1(\hat{\alpha}_t + \hat{\beta}_t) + n\psi_1(\hat{\beta}_t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

dengan nilai dugaan awal $\alpha_0 = \hat{\alpha}$ dan $\beta_0 = \hat{\beta}$.

Iterasi akan berhenti jika $\left\| \begin{bmatrix} x_{t+1} - x_t \\ y_{t+1} - y_t \end{bmatrix} \right\| < \epsilon$, dimana ϵ adalah suatu batas yang ditetapkan.

5. Evaluasi Sifat-sifat Penduga

Penduga yang baik adalah penduga yang memiliki sifat tak bias, efisien dan konsisten. Dalam simulasi ini akan dibandingkan nilai harapan, variansi dan *Mean Square Error* (MSE) dari dugaan yang diperoleh antara metode momen dan metode kemungkinan maksimum untuk menunjukkan apakah penduga yang didapatkan dengan metode momen dan metode kemungkinan maksimum merupakan penduga yang bersifat tak bias, efisien dan konsisten. Sampel data yang digunakan yaitu

Ukuran sampel	Nilai dugaan	Parameter			
		α		β	
		Metode momen	Metode MLE	Metode momen	Metode MLE
30	Rata-rata	5,5616	5,5694	3,2990	3,2947
	Bias	0,5616	0,5694	0,2990	0,2947
	Variansi	2,4741	2,357	0,7561	0,7062
	MSE	2,7895	2,6812	0,8455	0,7930
50	Rata-rata	5,2220	5,2646	3,1154	3,1408
	Bias	0,2220	0,2646	0,1154	0,1408
	Variansi	1,1578	1,1572	0,4266	0,4209
	MSE	1,2071	1,2272	0,4399	0,4407
100	Rata-rata	5,1638	5,1732	3,0829	3,0878
	Bias	0,1638	0,1732	0,0829	0,0878
	Variansi	0,6872	0,6286	0,1985	0,1807
	MSE	0,7140	0,6586	0,2053	0,1884
500	Rata-rata	5,0633	5,0581	3,0411	3,0386
	Bias	0,0633	0,0581	0,0411	0,0386
	Variansi	0,1115	0,1062	0,0450	0,0418
	MSE	0,1155	0,1096	0,0467	0,0433

Ukuran sampel	Nilai dugaan	Parameter			
		α		β	
		Metode momen	Metode MLE	Metode momen	Metode MLE
30	Rata-rata	1,1380	1,1248	4,8086	4,8029
	Bias	0,1380	0,1248	0,8086	0,8029
	Variansi	0,1170	0,0829	2,5322	2,2025
	MSE	0,1360	0,0983	3,1861	2,8471
50	Rata-rata	1,0801	1,0649	4,3725	4,308
	Bias	0,0801	0,0649	0,3725	0,308
	Variansi	0,0492	0,0365	1,5429	1,1306
	MSE	0,0556	0,0407	1,6817	1,2255
100	Rata-rata	1,0387	1,0265	4,1880	4,1508
	Bias	0,0387	0,0265	0,1880	0,1508
	Variansi	0,0185	0,0163	0,4271	0,377
	MSE	0,0200	0,0170	0,4624	0,3997
500	Rata-rata	1,0156	1,01	4,0346	4,0223
	Bias	0,0156	0,01	0,0346	0,0223
	Variansi	0,0041	0,0021	0,0674	0,0585
	MSE	0,0044	0,0022	0,0686	0,0590

Gambar 1. Nilai Dugaan Parameter dengan Metode Momen dan Metode Kemungkinan Maksimum (MLE) dengan $\alpha = 1, 3$ dan $\beta = 4, 5$

Ukuran sampel	Nilai dugaan	Parameter			
		α		β	
		Metode momen	Metode MLE	Metode momen	Metode MLE
30	Rata-rata	6,4641	6,4719	6,5366	6,5366
	Bias	0,4641	0,4719	0,5366	0,5366
	Variansi	3,6047	3,5954	3,5272	3,4916
	MSE	3,8201	3,8181	3,8151	3,7795
50	Rata-rata	6,3563	6,3911	6,3592	6,3928
	Bias	0,3563	0,3911	0,3592	0,3928
	Variansi	1,5896	1,5691	1,6784	1,6553
	MSE	1,7165	1,7221	1,8075	1,8096
100	Rata-rata	6,2401	6,2501	6,2189	6,227
	Bias	0,2401	0,2501	0,2189	0,227
	Variansi	0,8274	0,8107	0,8167	0,7977
	MSE	0,8850	0,8733	0,8646	0,8492
500	Rata-rata	6,0395	6,0409	6,0450	6,0475
	Bias	0,0395	0,0409	0,0450	0,0475
	Variansi	0,1921	0,1893	0,1789	0,1772
	MSE	0,1937	0,1910	0,1809	0,1795

Gambar 2. Nilai Dugaan Parameter dengan Metode Momen dan Metode Kemungkinan Maksimum (MLE) dengan $\alpha = 6$ dan $\beta = 6$

$n = 30, 50, 100, 500$ dengan nilai parameter berturut-turut dan dengan pengulangan dilakukan sebanyak 100 kali. Batas galat yang digunakan pada metode Newton-Raphson adalah $\epsilon = 10^{-12}$.

Berdasarkan kecenderungan hasil simulasi data sehingga untuk $n \rightarrow \infty$ dapat disimpulkan bahwa penduga parameter distribusi beta yang diperoleh dengan metode momen dan metode kemungkinan maksimum bersifat cenderung konsisten. Ketakbiasan dari penduga parameter distribusi beta tidak dapat diketahui karena tidak dapat dibuktikan secara analitik. Jika dibandingkan keefisienan kedua penduga, diperoleh bahwa pendugaan parameter distribusi beta dengan metode kemungkinan maksimum lebih efisien dibandingkan dengan pendugaan parameter dengan metode momen karena nilai MSE yang diperoleh untuk metode kemungkinan maksimum lebih kecil dibandingkan dengan MSE pada metode momen.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Izzati Rahmi HG ,M.Si, Ibu Hazmira Yozza, M.Si, Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Yudiantri Asdi, M.Sc, dan Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan.

Daftar Pustaka

- [1] Anonim. *Beta Distribution*. 2013. Available from: <http://www.wikipedia.org>. [diakses pada 21 September 2013].
- [2] Bain, L. J. and E. Max. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Second Edition. California:Duxbury Press.
- [3] Casella, G. and R.L. Berger. 2001. *Statistical Inference*. California: Pacific Grove.
- [4] Chapra, S. C. and R.P. Canale. 1985. *Metode Numerik untuk Teknik*. Terjemahan oleh S. Sardy. 1991. Jakarta: UI-Press.
- [5] Hogg, R.V. and T.C. Allen. 1978. *Introduction to Mathematical Statistics*. Fourth Edition. New York. Macmillan Publishing Co., Inc.
- [6] Jalarno, D. dan D. Ispriyanti. 2008. Penentuan Model Regresi Terpotong Atas dengan Metode Maksimum *Likelihood*. *Media Statistika*, Vol. 1, No.2, 53 – 62.
- [7] Larissa, D. I. dan D. Ispriyanti. 2008. Penentuan Estimasi Parameter Regresi dengan Variabel Dependen Tersensor. *Jurnal Matematika*, Vol. 11, No.3, 135 – 140.
- [8] Montgomery, D.C. and G.C. Runger. 1972. *Applied Statistics and Probability for Engineer*. Third Edition. New York. John Willey and Son, Inc.
- [9] Kristin, E.M., A. Adnan dan S. Sugiarto. 2013. Taksiran Parameter Distribusi Weibull dengan Menggunakan Metode Momen dan Metode Maximum *Likelihood*. Karya Ilmiah.
- [10] Misbahussurur, A. 2009. Estimasi Parameter Gamma dengan Metode Maximum *Likelihood*. Skripsi-S1, tidak diterbitkan. UIN Maulana Malik Ibrahim, Malang.