

KARAKTERISASI POHON DENGAN BILANGAN DOMINASI-LOKASI-METRIK TIGA

ZULFANETI^{a,*}, EDY TRI BASKORO^{b,c}, HILDA ASSIYATUN^{b,c}

^a Prodi Sains Data, Universitas PGRI Sumatera Barat, Padang, Indonesia

^b Kelompok Keahlian Matematika Kombinatorika,

FMIPA Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia

^c Pusat Kolaborasi Riset Teori Graf dan Kombinatorika, Bandung, Indonesia.

email : zulfaneti@upgrisba.ac.id, ebaskoro@itb.ac.id, hilda@itb.ac.id

Diterima 4 Juli 2024 Direvisi 9 Agustus 2024 Dipublikasikan 31 Oktober 2024

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dan terhubung. Untuk suatu himpunan $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\} \subseteq V$ dan $v \in V$, representasi titik v terhadap R adalah vektor $r(v|R) = (d(v, r_1), d(v, r_2), \dots, d(v, r_k))$, dimana $d(v, r)$ menyatakan jarak titik v dan titik r . Himpunan R disebut himpunan pembeda dari G jika semua titik di G memiliki representasi unik terhadap R . Himpunan D disebut himpunan dominasi dari G jika setiap titik di $G \setminus D$ bertetangga dengan suatu titik $v \in D$. Suatu himpunan dominasi dan juga merupakan himpunan pembeda disebut himpunan dominasi-lokasi-metrik dari G . Kardinalitas dari himpunan dominasi-lokasi-metrik minimum dari G disebut bilangan dominasi-lokasi-metrik dari G . Semua graf orde n dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 1, 2, $n - 2$ dan $n - 3$ telah ditentukan secara lengkap. Dalam tulisan ini, ditentukan karakterisasi semua pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 3 dan secara khusus dibuktikan bahwa tidak ada pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik sama dengan dimensi metriknya.

Kata Kunci: Himpunan dominasi, himpunan pembeda, himpunan dominasi-lokasi-metrik

Abstract. Let G be a simple and connected graph. For subset $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\} \subseteq V$ and $v \in V$, the representation of v with respect to R is the vector $r(v|R) = (d(v, r_1), d(v, r_2), \dots, d(v, r_k))$, where $d(v, r)$ is the distance between v and r . Subset R is called the resolving set of G if the representation of all vertices in G with respect to R is unique. Subset $D \subseteq V$ is called a dominating set of G if every vertex in $G - D$ is adjacent to some $v \in D$. A dominating set and also resolving set are called the metric-locating-dominating set of G . Cardinality of a minimum metric-locating-dominating set of G is called a metric-location-domination number of G . All graphs order n with metric-location-domination number 1, 2, $n - 2$ and $n - 3$ has been completely determined. In this paper, we characterize all trees with metric-location-domination number 3. In particular, we prove that no tree with a metric-location-domination-number equal to the metric dimension exists.

Keywords: Dominating set, resolving set, dominating-locating-metric set

*penulis korespondensi

1. Pendahuluan

Konsep bilangan dominasi-lokasi-metrik suatu graf terhubung diperkenalkan pertama kali oleh Brigham dkk. [1]. Konsep ini merupakan gabungan konsep bilangan dominasi dan dimensi metrik, yakni suatu kajian untuk mencari suatu himpunan yang merupakan himpunan dominasi dan juga merupakan himpunan pembeda. Untuk sebarang graf G dengan orde n , hubungan antara bilangan dominasi $\gamma(G)$, dimensi metrik $\beta(G)$, dan bilangan dominasi-lokasi-metrik $\gamma_M(G)$ diberikan oleh:

$$\max\{\gamma(G), \beta(G)\} \leq \gamma_M(G) \leq \min\{\gamma(G) + \beta(G), n - 1\}.$$

Hasil ini sekaligus memberikan batas bawah dan batas atas yang ketat dari bilangan dominasi-lokasi-metrik suatu graf.

Meskipun telah diketahui batas bawah dan batas atas bilangan dominasi-lokasi-metrik sebarang graf, namun penentuan bilangan dominasi-lokasi-metrik suatu graf adalah suatu permasalahan yang belum mempunyai algoritma yang efisien. Hal ini disebabkan oleh beragamnya struktur graf. Oleh karena itu, kajian bilangan dominasi-lokasi-metrik dilakukan dengan membatasi pada keluarga graf tertentu atau dengan mengkarakterisasi graf dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik tertentu. Untuk beberapa kelas graf, bilangan dominasi-lokasi-metrik telah ditentukan, seperti pada [2], [3], [4], dan [5].

Bilangan dominasi-lokasi-metrik dari pohon telah dibuktikan oleh [6]. Untuk menentukan bilangan dominasi-lokasi-metrik sebarang pohon, parameter yang menjadi penentu adalah titik dominasi, titik pendukung, dan titik pendaan dari pohon tersebut. Kemudian dengan metode berbeda, pada [7] ditentukan kembali bilangan dominasi-lokasi-metrik dari sebarang pohon T , yaitu parameter bilangan dominasi, dimensi metrik dan banyak daun dari T .

Selanjutnya, Henning dan Oellermann [6] mengkarakterisasi semua graf dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik $n - 2$ atau $n - 1$. Selain itu, bilangan dominasi-lokasi-metrik dari pohon T yang mencapai batas bawah $\gamma_M(T) = \gamma(T)$ telah dapat dikarakterisasi, yaitu $\gamma_M(T) = \gamma(T)$ jika dan hanya jika T tidak memuat titik pendukung kuat (yaitu titik yang bertetangga dengan sedikitnya dua titik berderajat satu).

Dalam [8], González dkk. melengkapi hasil yang telah diperoleh Henning dan Oellermann [6]. Hasil utama yang diperoleh adalah karakterisasi semua pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik mencapai batas atas, yaitu pohon T dengan $\gamma_M(T) = \gamma(T) + \beta(T)$. Hasil-hasil tersebut memberikan syarat cukup dan syarat perlu untuk struktur pohon dengan kondisi bilangan dominasi-lokasi metrik mencapai batas atas. Selanjutnya, Cáceres dan Pelayo [9] memperluas hasil tersebut dan memperumum untuk sebarang graf terhubung. Batas bawah bilangan dominasi-lokasi-metrik dari graf G diperoleh melalui pendeteksian banyaknya titik pendaan $\ell(G)$ dan keberadaan himpunan titik pendukung $S(G)$ dari G sehingga diperoleh

$$\gamma_M(G) \geq \gamma(G) + \ell(G) - |S(G)|.$$

Sejauh ini telah diperoleh graf dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 1 dan bilangan dominasi-lokasi-metrik 2. Graf dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 1

merupakan kondisi trivial yaitu graf lintasan P_1 dan P_2 . Selanjutnya, Zulfaneti [10] memperoleh sebanyak 51 graf dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 2.

Dalam tulisan ini dipaparkan semua pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 3, dan kemudian dibahas bahwa tidak ada pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik yang bernilai sama dengan dimensi metrik graf pohon tersebut.

2. Landasan Teori

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dan terhubung. Suatu himpunan $D \subseteq V$ disebut himpunan dominasi dari G jika untuk setiap $u \in V \setminus D$ bertetangga dengan suatu titik $d \in D$. Bilangan dominasi dari G adalah kardinalitas dari himpunan dominasi minimum dari G , dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Suatu himpunan $R = \{r_1, \dots, r_p\} \subseteq V$ dan $v \in V$, representasi titik v terhadap R adalah suatu vektor $(d(v, r_1), d(v, r_2), \dots, d(v, r_p))$, di mana $d(x, y)$ adalah jarak antara titik x dan y di G . Suatu himpunan R disebut himpunan pembeda dari G jika setiap titik dari G memiliki representasi unik terhadap R . Dimensi metrik dari G , dinotasikan sebagai $\beta(G)$, adalah kardinalitas dari himpunan pembeda minimum dari G .

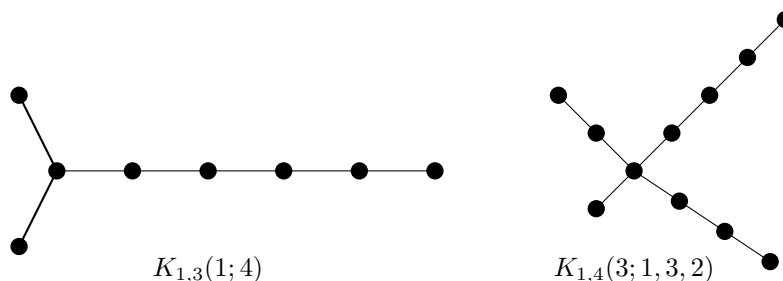
Banyak titik dan sisi dari G secara berturut-turut disebut orde dan ukuran dari G . Dua titik u dan v di G dikatakan bertetangga, ditulis $u \sim v$, jika $e = uv \in E(G)$. Selanjutnya, jika $e = uv \in E(G)$ maka titik u dan v di G dikatakan terkait dengan sisi e , dan titik u dan v dinamakan titik ujung dari sisi e . Banyak sisi yang terkait pada suatu titik v disebut derajat dari v , ditulis $d(v)$.

Suatu titik berderajat 1 disebut titik penda. Titik u dari suatu graf G disebut titik pendukung dari G jika titik u tersebut bertetangga dengan suatu titik penda, dan disebut titik pendukung kuat jika bertetangga dengan sedikitnya dua titik penda.

Jika pada beberapa sisi graf G disisipkan beberapa titik untuk membangun graf baru G' , maka G' dinamakan suatu subdivisi dari G . Graf bintang, $K_{1,n}$ $n \geq 2$, adalah graf yang terdiri dari n titik penda yang bertetangga ke suatu titik bukan titik penda. Misalkan diberikan graf bintang $K_{1,n}$ berorde $n + 1$. Graf $K_{1,n}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)$ adalah graf yang diperoleh dengan mensubdivisi graf $K_{1,n}$ pada k sisi masing-masing sebanyak $m_1, m_2, \dots, m_k$ titik, $m_i \neq 0$. Sebagai contoh, $K_{1,3}(1; 4)$ adalah graf hasil subdivisi $K_{1,3}$ pada 1 sisi sebanyak 4 titik, dan $K_{1,3}(3; 1, 2, 3)$ adalah graf hasil subdivisi $K_{1,3}$ pada 3 sisi berturut-turut sebanyak 1, 2, dan 3 titik, seperti pada Gambar 1.

Untuk suatu pohon, mengacu pada istilah yang digunakan oleh Slater [11], digunakan istilah-istilah berikut ini. Misalkan v adalah suatu titik di pohon T . Suatu cabang di titik v dari pohon T adalah subpohon maksimal yang memuat v sebagai titik ujung. Suatu cabang di v yang berupa lintasan disebut lintasan cabang jika dan hanya jika $d(v) \geq 3$. Titik v disebut *stem* dari lintasan cabang di v . Semua lintasan cabang di v disebut daun dengan *stem* v .

Dimensi metrik dari sebarang graf pohon T telah diperoleh. Definisikan titik $v \in V(T)$ dengan $d(v) \geq 3$ sebagai titik mayor. Titik penda u dari T disebut titik terminal dari suatu titik mayor v dari T , jika $d(u, v) < d(u, w)$ untuk setiap titik


 Gambar 1. Contoh graf hasil subdivisi dari graf bintang $K_{1,n}$

mayor w dari T . Derajat terminal $ter(v)$ dari titik mayor v adalah banyaknya titik terminal dari v . Suatu titik mayor v dari T adalah titik mayor eksterior dari T jika derajat terminalnya positif. Misalkan $\sigma(T)$ dan $ex(T)$ berturut-turut menyatakan banyaknya semua derajat terminal dari semua titik mayor dari T dan banyaknya titik mayor eksterior dari T .

Teorema 2.1. [11] *Jika T adalah pohon bukan lintasan, maka $\beta(T) = \sigma(T) - ex(T)$.*

Untuk graf lintasan, Zulfaneti dan Baskoro [12] telah menentukan bilangan dominasi-lokasi-metrik dari graf k -lintasan. Secara khusus, jika $k = 1$, maka graf tersebut adalah graf lintasan P_n orde n . Hal tersebut diberikan pada Teorema 2.2 berikut.

Teorema 2.2. [12]

$$\gamma_M(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{jika } n = 1, 2, \\ 2 & \text{jika } n = 3, \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } n \geq 4. \end{cases}$$

Henning dan Oelermann [6] telah mengkarakterisasi semua pohon dengan bilangan dominasi-lokasi metrik mencapai batas bawah dan kemudian merumuskan bilangan dominasi-lokasi-metrik dari sebarang pohon, yang diberikan pada Teorema 2.3 dan Teorema 2.4 berikut:

Teorema 2.3. [6] *Suatu pohon T tidak memiliki titik pendukung kuat jika dan hanya jika $\gamma_M(T) = \gamma(T)$.*

Teorema 2.4. [6] *Untuk sebarang pohon T , $\gamma_M(T) = \gamma(T) + \ell'(T) - |S(T)|$, di mana $\gamma(T)$, $S(T)$ dan $\ell'(T)$ berturut-turut menyatakan bilangan dominasi, himpunan titik pendukung kuat, dan banyaknya titik pendan yang bertetangga dengan titik pendukung kuat dari T .*

Hasil pada Teorema 2.4 disajikan kembali pada Teorema 2.5 dengan menggunakan metode berbeda. Misalkan pohon T adalah suatu pohon dengan semua

daun $L_1, L_2, \dots, L_p$, dan l_i menyatakan banyaknya lintasan cabang dengan panjang minimal 2 pada L_i , dan X adalah himpunan titik *stem* yang tidak mempunyai lintasan cabang dengan panjang 1.

Teorema 2.5. [7] Untuk sebarang pohon T , diperoleh bahwa:

$$\gamma_M(T) = \gamma(T) + \beta(T) - k,$$

di mana $\gamma(T)$ dan $\beta(T)$ berturut-turut menyatakan bilangan dominasi dan dimensi metrik dari T , dan $k = l_1 + l_2 + \dots + l_p - |X|$.

3. Hasil Utama

Pada bagian ini dikarakterisasi pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 3. Selanjutnya dibuktikan bahwa tidak ada pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik yang sama dengan dimensi metriknya.

Lema 3.1. Pada sebarang graf terhubung G dengan orde minimal 3 dan titik pendan sebanyak $\ell(G)$, berlaku $\gamma_M(G) \geq \ell(G)$.

Bukti. Misalkan G memiliki titik pendan sebanyak $\ell(G)$. Andaikan S adalah himpunan dominasi-lokasi-metrik dari G dengan $|S| = \ell(G) - 1$.

Kasus 1. Semua anggota S adalah titik pendan. Karena G memiliki titik pendan sebanyak $\ell(G)$, terdapat satu titik pendan u yang tidak berada di S . Ini berarti terdapat titik pendan u dan titik stem v , dimana $u \sim v$. Akibatnya $d(u, S) = d(u, v) + d(v, S) > 1$. Kontradiksi dengan S adalah suatu himpunan dominasi dari G .

Kasus 2. S memuat titik yang bukan titik pendan. Dengan demikian terdapat dua titik pendan u dan v yang tidak berada di S yang memenuhi:

- (i) $u \sim w$ dan $v \sim w$, dengan $w \in S(G)$, dimana $S(G)$ adalah himpunan titik pendukung dari G .
- (ii) $u \sim w$ dan $v \sim z$, dengan $w \neq z$, $w, z \in S(G)$, dimana $S(G)$ adalah himpunan titik pendukung dari G .

Akibatnya, jika (i) terjadi maka $r(u|S) = r(v|S)$, kontradiksi dengan S yang merupakan suatu himpunan pembeda dari G . Jika (ii) terjadi maka $d(u, S) = d(u, w) + d(w, S) > 1$ atau $d(v, S) = d(v, z) + d(z, S) > 1$, kontradiksi dengan S yang merupakan suatu himpunan dominasi dari G . $\square$

Lema 3.2. Semua pohon dengan banyaknya titik pendan 3 adalah $K_{1,3}$ atau subdivisi dari $K_{1,3}$.

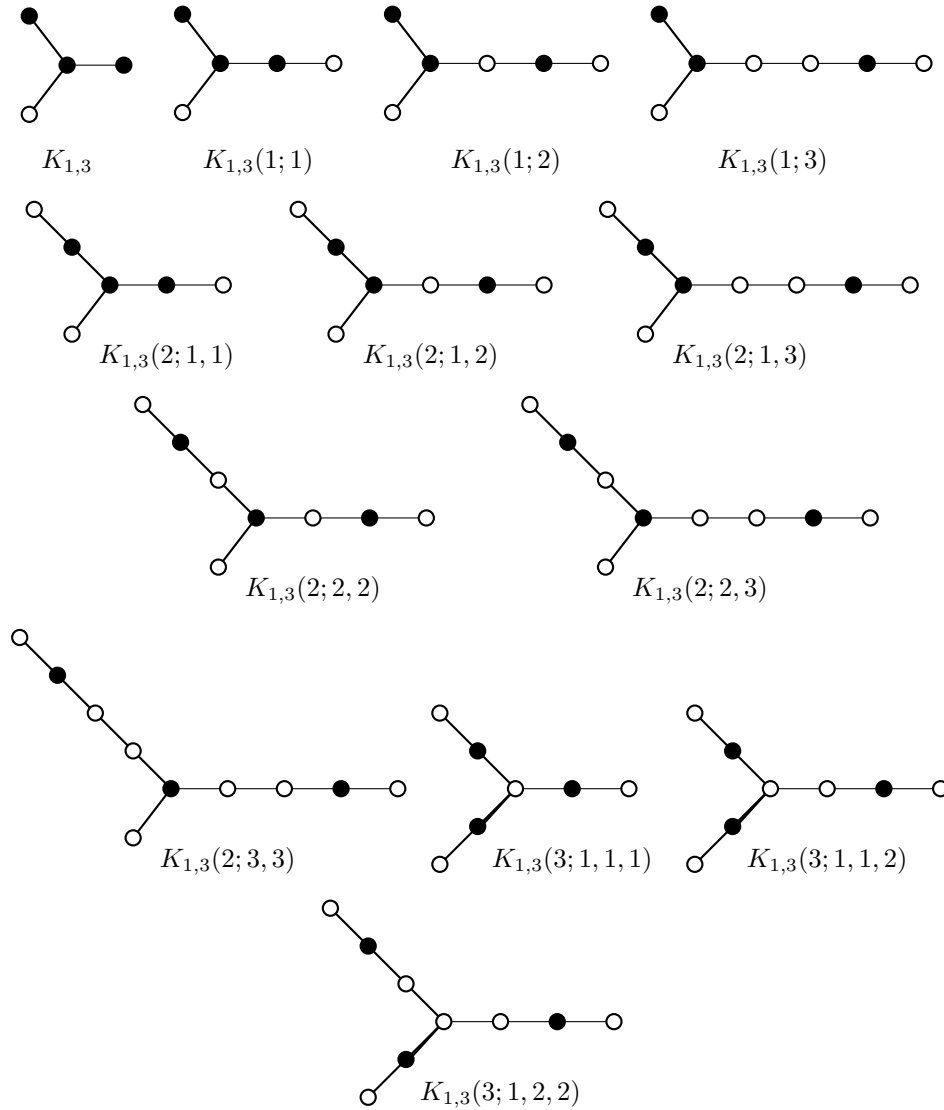
Bukti. Misalkan T adalah pohon dengan banyaknya titik pendan 3. Andaikan T bukan $K_{1,3}$ atau bukan subdivisi dari $K_{1,3}$. Terdapat empat kemungkinan, yaitu:

- (i) $T \cong K_{1,n}$, $n \neq 3$.
- (ii) $T \cong K_{1,n}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)$, $n \neq 3$, $k \geq 1$.
- (iii) $T \not\cong K_{1,n}$, $n \geq 1$.

(iv) $T \not\cong K_{1,n}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)$, $n \geq 1$, $k \geq 1$.

Jika (i) atau (ii) terjadi maka jelas T memiliki titik pendaan tidak sama dengan 3. Jika (iii) atau (iv) terjadi maka T mempunyai titik *stem* lebih dari 1, akibatnya T mempunyai lintasan cabang minimal 4, ini berarti T memiliki titik pendaan lebih dari 3. Ini kontradiksi dengan T adalah pohon dengan titik pendaan sebanyak 3. $\square$

Semua subdivisi dari $K_{1,3}$ dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 3 diberikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf $K_{1,3}(2; k_1, k_2)$ untuk $k_1, k_2 = 1, 2, 3$ dan $K_{1,3}(3; 1, k_1, k_2)$ untuk $k_1, k_2 = 1, 2$.

Lema 3.3.

- (a) $\gamma_M(K_{1,3}) = 3$.
- (b) $\gamma_M(K_{1,3}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)) = 3$ untuk $k = 1, 2$ dan $m_i = 1, 2, 3, i \in [1, k]$.
- (c) $\gamma_M(K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)) = 3$ untuk $m_1, m_2 = 1, 2$.

Bukti.

- (a) Pandang graf $K_{1,3}$. Perhatikan bahwa $K_{1,3}$ memiliki $\gamma(K_{1,3}) = 1$, memiliki 1 titik pendukung kuat dan 3 titik penda yang bertetangga dengan titik pendukung kuat. Berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh $\gamma_M(K_{1,3}) = 1 + 3 - 1 = 3$.
- (b) Pandang graf $K_{1,3}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)$, $k = 1, 2$ dan $m_i = 1, 2, 3, i \in [1, k]$.
Untuk $k = 1$, perhatikan bahwa $K_{1,3}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)$ memiliki 1 titik pendukung kuat dan 2 titik penda yang bertetangga dengan titik pendukung kuat. Selanjutnya, jelas bahwa $\gamma(K_{1,3}(1; m_1)) = 2$, $m_1 = 1, 2, 3$. Berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh $\gamma_M(K_{1,3}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)) = 2 + 2 - 1 = 3$.
Untuk $k = 2$, perhatikan bahwa $K_{1,3}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)$ tidak memiliki titik pendukung kuat dan $\gamma(K_{1,3}(1; m_1, m_2)) = 3$, $m_1 = 1, 2, 3$. Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh $\gamma_M(K_{1,3}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)) = 3$.
- (c) Pandang graf $K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)$, perhatikan bahwa $K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)$ tidak memiliki titik pendukung kuat dan $\gamma(K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)) = 3$. Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh $\gamma_M(K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)) = 3$. $\square$

Teorema 3.4 berikut ini menyatakan semua pohon T dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 3.

Teorema 3.4. Misalkan T adalah pohon. Diperoleh $\gamma_M(T) = 3$ jika dan hanya jika T adalah salah satu dari graf berikut ini:

- (1) $T \cong P_n$, untuk $n = 7, 8, 9$,
- (2) $T \cong K_{1,3}$,
- (3) $T \cong K_{1,3}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)$ untuk $k = 1, 2$ dan $m_i = 1, 2, 3, i \in [1, k]$.
- (4) $T \cong K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)$ untuk $m_1, m_2 = 1, 2$.

Bukti. Misalkan T adalah suatu pohon. Jika $T \cong P_n$, untuk $n = 7, 8, 9$, maka berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh $\gamma_M(T) = 3$. Jika $T \cong K_{1,3}$ atau $T \cong K_{1,3}(k; m_1, m_2, \dots, m_k)$ untuk $k = 1, 2$ dan $m_i = 1, 2, \dots, k$, atau $T \cong K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)$ untuk $m_1, m_2 = 1, 2$, berdasarkan Lema 3.3 diperoleh $\gamma_M(T) = 3$.

Selanjutnya dibuktikan arah sebaliknya. Misalkan $\gamma_M(T) = 3$. Andaikan T mempunyai titik penda lebih dari 3. Maka berdasarkan Lema 3.1 diperoleh $\gamma_M(T) > 3$, kontradiksi dengan $\gamma_M(T) = 3$. Jadi T mempunyai titik penda maksimal 3. Kemudian, karena T adalah pohon, T memiliki titik penda minimal 2. Dengan demikian titik penda dari T adalah sebanyak 2 atau 3.

Jika titik penda T sebanyak 2 maka $T \cong P_n$. Berdasarkan Teorema 2.2 diketahui $\gamma_M(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Dengan demikian, $\gamma_M(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil = 3$ hanya dipenuhi oleh $n = 7, 8, 9$. Jadi $T \cong P_n$ dengan $n = 7, 8, 9$.

Jika titik penda dari T sebanyak 3 maka berdasarkan Lema 3.2, T adalah $K_{1,3}$ atau subdivisi dari $K_{1,3}$. Perhatikan bahwa $K_{1,3}$ dan subdivisi dari $K_{1,3}$ memiliki satu titik mayor ekterior dan total derajat terminal dari titik mayor ekterior tersebut adalah 3. Berdasarkan Teorema 2.1 maka diperoleh $\beta(T) = 2$. Karena $\max\{\gamma(T), \beta(T)\} \leq \gamma_M(T) \leq \beta(T) + \gamma(T)$, terdapat tiga kemungkinan dari bilangan dominasi dari T .

Kasus 1 $\gamma(T) = 1$.

Ini terjadi jika T mempunyai suatu titik berderajat penuh dan karena T memiliki tiga titik penda, diperoleh $T \cong K_{1,3}$.

Kasus 2. $\gamma(T) = 2$.

Ini terjadi jika ada himpunan dominasi minimum D dari T dengan kardinalitas 2. Misalkan $D = \{v_1, v_2\}$. Pandang ketetanggaan dari v_1 dan v_2 , jika $v_1 \sim v_2$ dan dengan memperhatikan bahwa T memiliki tiga titik penda maka $T \cong K_{1,3}(1; 1)$. Jika $v_1 \not\sim v_2$ maka $2 \leq d(v_1, v_2) \leq 3$, untuk $d(v_1, v_2) = 2$ diperoleh $T \cong K_{1,3}(1; 2)$ dan untuk $d(v_1, v_2) = 3$ diperoleh $T \cong K_{1,3}(1; 3)$. Dengan demikian, $T \cong K_{1,3}(1; m_1)$, $m_1 = 1, 2, 3$.

Kasus 3. $\gamma(T) = 3$.

Ini terjadi jika ada himpunan dominasi minimum D dari T dengan kardinalitas 3. Misalkan $D = \{v_1, v_2, v_3\}$. Pandang ketetanggaan dari v_1, v_2 dan v_3 . Perhatikan bahwa T adalah pohon, akibatnya $T[\{v_1, v_2, v_3\}]$ tidak membentuk klik. Selanjutnya, karena $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah himpunan dominasi minimum dari T , untuk setiap $v_i \in D$ terdapat $v_j \in D$ sedemikian sehingga $d(v_i, v_j) \leq 3$. Jika terdapat $d(v_i, v_j) = 1$ maka diperoleh $T \cong K_{1,3}(2; 1, 1)$, $T \cong K_{1,3}(1, 2)$ dan $T \cong K_{1,3}(2; 1, 3)$. Jika tidak ada $d(v_i, v_j) = 1$ maka diperoleh $T \cong K_{1,3}(2; 2, 2)$, $T \cong K_{1,3}(2; 2, 3)$, $T \cong K_{1,3}(2; 3, 3)$, $T \cong K_{1,3}(3; 1, 1, 1)$ dan $T \cong K_{1,3}(3; 1, 1, 2)$. Dengan demikian, $T \cong K_{1,3}(2; m_1, m_2)$, $m_1, m_2 = 1, 2, 3$ atau $T \cong K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)$, $m_1, m_2 = 1, 2$. $\square$

Teorema 3.5. *Tidak ada pohon T dengan orde $n \geq 3$ yang memenuhi $\gamma_M(T) = \beta(T)$.*

Bukti. Andaikan terdapat pohon T dengan $\gamma_M(T) = \beta(T)$. Dari Teorema 2.5, diperoleh $\gamma(T) = k$, dimana $k = |D \cap R|$ dimana D dan R berturut-turut adalah himpunan dominasi dan himpunan pembeda minimum dari T . Akibatnya $D \subseteq R$. Jika T mempunyai titik pendukung kuat u , maka $u \in D$ tetapi $u \notin R$. Hal ini kontradiksi dengan $D \subseteq R$. Jika T tidak mempunyai titik pendukung kuat, maka setiap *stem* dari T mempunyai paling banyak satu lintasan cabang dengan panjang 1. Perhatikan bahwa salah satu titik dari $\{a, b\}$ dengan $d(a) = 1$ dan $a \sim b$ termuat pada setiap himpunan dominasi minimum dari T . Akan tetapi terdapat satu lintasan cabang dari setiap *stem* dari T dengan semua titik tidak berada di himpunan pembeda minimum dari T . Dengan demikian terdapat $u \in D$ tetapi $u \notin R$. Hal ini kontradiksi dengan $D \subseteq R$. $\square$

Daftar Pustaka

- [1] Brigham, R.C., Chartrand, G., Dutton, R.D. dan Zhang, P., 2003. Resolving domination in graphs. *Mathematica Bohemica*, Vol. **128**(1): 25 – 36
- [2] Susilowati, L., Saadah, I., Fauziyyah, R. Z., Erfanian, A., 2020: The dominant metric dimension of graphs, *Heliyon*, Vol. **6**(3): e03633
- [3] Wangguway, Y., Wardani, D., Alfarisi, R., 2020, On resolving domination number of special family of graphs, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. **1465**: 012015, IOP Publishing
- [4] Kurniawati, S., Wardani, D., Albirri, E., 2020, On resolving domination number of friendship graph and its operation, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. **1465**: 012019, IOP Publishing
- [5] Adirasari, R. P., Suprajitno, H. dan Susilowati, L., 2021, The dominant metric dimension of corona product graphs, *Baghdad Science Journal* Vol. **18**(2): 349 - 356
- [6] Henning, M.A. dan Oellermann, O.R., 2004, Metric-locating-dominating sets in graphs. *Ars Combinatoria* Vol. **73**: 129 – 141
- [7] Zulfaneti, Assiyatun, H. dan Baskoro, E. T., 2022, On metric-location-domination number of graphs, *International Journal of Mathematics and Computer Science*, Vol. **17**(4): 1721 - 1733
- [8] González, A., Hernando, C., Mora, M., 2018, Metric-locating-dominating sets of graphs for constructing related subsets of vertices, *Applied mathematics and computation* Vol. **332**: 449 – 456
- [9] Cáceres, J., Pelayo, I.M., 2023, Metric Location in Pseudotrees: A survey and new results, *arXiv preprint arXiv:2307.13403*
- [10] Zulfaneti, 2024, *Penentuan dan Karakterisasi Bilangan Dominasi-Lokasi-Metrik Beberapa Kelas Graf. Disertasi*, Tidak diterbitkan, Program Studi S3 Matematika Institut Teknologi Bandung
- [11] Slater, P. J., 1975, Leaves of trees, *Proc. 6th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Congr. Numer.* Vol. **14**: 549 – 559
- [12] Zulfaneti, Baskoro, E.T., 2021, The Metric-Location-Domination Number of k-Paths, *Journal of Physics: Conference Series* Vol. **1722**(1): 012054, IOP Publishing