

RAINFALL MODELING IN EAST JAVA USING A MODIFIED ORNSTEIN-UHLENBECK MODEL

ELISABETH YEYEN SETYORINI*, ENDAH R. M. PUTRI

*Departemen Matematika,
Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Indonesia
email : elisabethsetyorini30@gmail.com, endahrmp@matematika.its.ac.id*

Diterima 18 Juli 2024 Direvisi 15 September 2024 Dipublikasikan 31 Januari 2025

Abstrak. Salah satu isu global saat ini adalah perubahan iklim dan variabilitas cuaca. Fenomena ini berdampak nyata di berbagai daerah, termasuk Provinsi Jawa Timur. Jawa Timur mengalami peningkatan intensitas curah hujan sebagai salah satu dampak perubahan iklim. Intensitas curah hujan yang tinggi dan terus menerus dapat memicu bencana seperti banjir, yang berpotensi menimbulkan kerugian finansial yang signifikan bagi masyarakat. Oleh karena itu, manajemen risiko yang efektif menjadi sangat penting. Salah satu solusi yang mungkin untuk mengatasi risiko ini adalah melalui penggunaan derivatif keuangan. Langkah awal dalam manajemen risiko melibatkan pemodelan perilaku curah hujan. Diasumsikan bahwa pola curah hujan mengikuti proses pengembalian rata-rata, khususnya proses Ornstein-Uhlenbeck. Model Ornstein-Uhlenbeck yang ada kemudian dimodifikasi untuk memastikan bahwa model yang dihasilkan secara akurat mencerminkan kondisi curah hujan di Jawa Timur. Untuk memvalidasi model yang dimodifikasi, simulasi proses Ornstein-Uhlenbeck dilakukan dengan menggunakan nilai parameter perkiraan. Simulasi Ornstein-Uhlenbeck mencapai skor MSE minimum yang mendekati nol. Skor MSE ini menunjukkan bahwa model modifikasi Ornstein-Uhlenbeck yang diusulkan akurat dalam merepresentasikan pola curah hujan di Jawa Timur.

Kata Kunci: Ornstein-Uhlenbeck, Curah hujan, Weather Derivatives

Abstract. *One of the current global issues is climate change and weather variability. This phenomenon has real impacts on various regions, including East Java Province. East Java is experiencing increased rainfall intensity as one of the effects of climate change. High and continuous rainfall intensity can trigger disasters such as flooding, which has the potential to cause significant financial losses for the community. Therefore, effective risk management becomes crucial. One possible solution to address these risks is through the use of financial derivatives. The initial step in risk management involves modeling the behavior of rainfall. It is assumed that the rainfall pattern follows a mean-reverting process, specifically the Ornstein-Uhlenbeck process. The existing Ornstein-Uhlenbeck model is then modified to ensure that the resulting model accurately reflects the rainfall conditions in East Java. To validate the modified model, simulations of the Ornstein-Uhlenbeck process were conducted using estimated parameter values. The Ornstein-Uhlenbeck simulation achieved a minimum MSE score that approaches*

*penulis korespondensi

zero. This MSE score indicate that the proposed modified Ornstein-Uhlenbeck model is accurate in representing the rainfall patterns in East Java.

Keywords: Ornstein-Uhlenbeck, Rainfall, Weather Derivatives.

1. Pendahuluan

Perubahan iklim dan cuaca saat ini merupakan topik hangat yang dibahas secara global. Fenomena tersebut dapat diukur melalui beberapa indikator seperti suhu, curah hujan, kelembapan udara, kondisi awan, kecepatan angin, dan radiasi matahari. Indikator-indikator seperti suhu dan curah hujan memiliki dampak yang paling signifikan [1]. Indonesia, sebagai negara beriklim tropis, mengalami dua musim utama yaitu kemarau dan penghujan. Pada daerah tropis, kenaikan suhu sering diikuti oleh peningkatan intensitas curah hujan karena tingginya tingkat penguapan di laut [2]. Peningkatan suhu dan curah hujan yang berkepanjangan dapat meningkatkan risiko bencana alam. Fenomena seperti kebakaran hutan dan banjir adalah contohnya. Fenomena tersebut dapat mempengaruhi hasil pertanian yang cenderung mengalami penurunan. Terlihat bahwa perubahan iklim memiliki efek negatif yang berkelanjutan. Menurut data dari Badan Nasional Penanggulangan Bencana (BNPB), pada tahun 2023, sekitar 99,35% dari total 5.400 kejadian bencana di Indonesia terkait dengan bencana hidrometeorologi [3]. Persentase tersebut menunjukkan betapa besarnya pengaruh perubahan iklim terhadap Indonesia.

Kondisi cuaca seperti yang telah dijelaskan sebelumnya dapat menyebabkan kerugian finansial yang cukup besar dan menjadi risiko yang tidak dapat dihindari. Oleh sebab itu diperlukan suatu lindung nilai. Produk keuangan yang mampu memberikan perlindungan terhadap risiko cuaca adalah derivatif cuaca. Derivatif cuaca dirancang untuk memberikan kompensasi ketika terjadi cuaca yang buruk dalam artian berfungsi sebagai lindung nilai terhadap risiko cuaca nonbencana [4]. Jawa Timur sendiri tidak luput dari risiko perubahan iklim, termasuk tingginya curah hujan. Dalam konteks keuangan, tingkat curah hujan dalam periode tertentu menjadi faktor penting dalam menilai kestabilan keuangan [5]. Untuk itu, penelitian ini mendalami derivatif cuaca dengan aset dasar berupa curah hujan.

Terdapat banyak penelitian yang membahas mengenai konstruksi model derivatif cuaca. Melanie Cao mengusulkan dan membandingkan tiga model curah hujan, yaitu distribusi Gamma, kombinasi eksponensial, dan kepadatan kernel [6]. Dari tiga model tersebut, diperoleh model terbaik yaitu model kombinasi eksponensial dan model kepadatan kernel. Gunther Leobacher mengonstruksi sebuah model Gamma Markov yang tepat untuk proses curah hujan, serta mempertimbangkan fluktuasi musiman dari presipitasi [7]. Penelitian berikutnya, yaitu oleh Shah dimana ia melakukan simulasi dari proses curah hujan harian dengan menggunakan model *generalized linear* (GLM) [8]. Penelitian lain, yaitu oleh Peng Li yang menggunakan persamaan diferensial proses Ornstein-Uhlenbeck untuk melakukan valuasi harga opsi dengan aset dasar berupa suhu [9].

Berdasarkan permasalahan yang diuraikan di atas, peneliti tertarik untuk melakukan modifikasi model matematis dari curah hujan. Curah hujan dimodelkan sebagai proses Ornstein-Uhlenbeck yang cenderung menuju rata-rata. Dari model

Ornstein-Uhlenbeck yang telah ada, dilakukan modifikasi dengan memperhatikan kondisi curah hujan di Jawa Timur. Penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi ilmiah, terutama untuk menggambarkan curah hujan di Jawa Timur secara tepat.

2. Landasan Teori

2.1. *Derivatif Cuaca Berbasis Curah Hujan*

Kontrak keuangan yang diperdagangkan di pasar derivatif untuk mengurangi risiko akibat kejadian cuaca adalah derivatif cuaca. Kontrak keuangan ini dirancang untuk memberikan ganti rugi, sehingga berfungsi sebagai "lindung nilai" terhadap risiko cuaca yang bersifat *non-catastrophic*. Cuaca *non-catastrophic* meliputi periode hangat atau dingin, periode hujan atau kemarau, dan sebagainya [10]. Derivatif cuaca berbeda dengan asuransi, perbedaan utamanya terletak pada cara kompensasi kerugian. Pada asuransi, pemegang kontrak harus membuktikan bahwa mereka mengalami kerugian finansial akibat cuaca, sedangkan pada derivatif cuaca, pembayaran hanya didasarkan pada hasil aktual cuaca.

Keberadaan derivatif cuaca dapat memberikan proteksi pada perusahaan-perusahaan yang keuntungannya bergantung pada cuaca. Penelitian ini membahas mengenai derivatif cuaca dengan aset dasar indeks curah hujan. Indeks curah hujan merupakan suatu indikator yang menilai intensitas curah hujan, misal untuk menunjukkan terjadinya hujan berlebih, atau kekeringan pada suatu wilayah. Sebagaimana diketahui bahwa curah hujan bukan suatu barang yang memiliki bentuk fisik karena merupakan pengukuran dari jumlah air yang jatuh dalam suatu waktu, sehingga tidak ada pasar fisik untuk indeks curah hujan. Beberapa atribut yang digunakan dalam mendefinisikan kontrak derivatif curah hujan, yaitu periode kontrak, stasiun pengukuran sebagai lokasi pengukuran yang disepakati dalam kontrak, variabel curah hujan, indeks curah hujan yang berupa *rainfall defice* dan *rainfall excess*, kemudian fungsi *pay-off* yang menentukan bagaimana pembayaran dilakukan berdasarkan nilai indeks curah pada akhir periode kontrak, dan atribut terakhir, yaitu premi [10].

2.2. *Pemodelan Indeks Curah Hujan*

Kondisi defisit curah hujan (*rainfall defice*) merupakan kondisi dimana jumlah milimeter curah hujan rata-rata (X_t) berada di bawah curah hujan dasar (X_{ref}). Persamaan matematikanya yaitu:

$$f(X_t) = \max\{X_{ref} - X_t, 0\}. \quad (2.1)$$

Kondisi lainnya, yaitu curah hujan berlebih (*rainfall excess*). Kondisi tersebut terjadi ketika jumlah milimeter curah hujan rata-rata berada di atas curah hujan dasar, yang dinyatakan sebagai berikut [12]:

$$f(X_t) = \max\{X_t - X_{ref}, 0\}. \quad (2.2)$$

Indeks kumulatif Y_t dari variabel cuaca dasar merupakan jumlah curah hujan

selama periode $[0, t]$. Nilai Y_t dinyatakan sebagai berikut [12]:

$$Y_t = \int_0^t f(X_s) ds, \quad (2.3)$$

dan

$$dY_t = f(X_t) dt. \quad (2.4)$$

Misal suatu aset berada dalam kondisi netral risiko Q yang ditandai dengan harga risiko pasar [11]. Selanjutnya, pandang X_t sebagai variabel acak yang menyatakan jumlah curah hujan dalam waktu t . Perubahan total curah hujan yang mungkin terjadi dalam suatu periode dapat diasumsikan mengikuti proses *mean-reverting* Ornstein-Uhlenbeck yang didefinisikan oleh [12]:

$$dX_t = [\alpha(\theta(t) - X_t) + \theta'(t) - \lambda\sigma] dt + \sigma dW_t^Q, \quad (2.5)$$

dengan:

- X_t : Curah hujan saat waktu t ,
- α : Kecepatan *mean-reversion*,
- λ : Harga risiko pasar,
- $\theta(t)$: Nilai rata-rata jangka panjang dari proses,
- σ : Volatilitas,
- W_t^Q : Proses Wiener dalam kondisi netral risiko Q .

2.3. Estimasi Parameter

Komponen musiman $\theta(t)$ dapat diestimasi menggunakan deret Fourier *truncated* dengan persamaan berikut.

$$\theta_n(t) = p + \sum_{m=1}^n a_m \sin\left(\frac{2m\pi}{12}(t - v)\right) + \sum_{m=1}^n b_m \cos\left(\frac{2m\pi}{12}(t - v)\right), \quad (2.6)$$

dengan t dalam skala bulanan. Parameter p, a_m, b_m, v diestimasi dengan menggunakan algoritma Gauss-Newton. Persamaan (2.6) dapat divariasikan guna mendapatkan nilai komponen musiman terbaik kemudian dibandingkan dengan rata-rata curah hujan bulanan $D(j)$ berikut [14]:

$$D(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R(j, i), \quad (2.7)$$

dengan N adalah jumlah periode (tahun) yang diamati dan $R(j, i)$ adalah jumlah curah hujan dalam bulan j di tahun i .

Parameter berikutnya yang perlu diestimasi ialah volatilitas. Nilai estimator volatilitas (σ) diperoleh dari data yang dikumpulkan setiap bulan. Diberikan tahun tertentu μ dengan N_μ bulan dan curah hujan yang diamati dalam tahun μ dinyatakan oleh X_j dengan $j = 1, 2, \dots, N_\mu$. Estimator didasarkan pada variasi kuadrat dari X_j [12], yaitu:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{N_\mu} \sum_{j=0}^{N_\mu-1} (X_{j+1} - X_j)^2. \quad (2.8)$$

Parameter selanjutnya adalah kecepatan *mean-reversion*. Estimasi kecepatan *mean-reversion* dilakukan menggunakan metode fungsi estimasi Martingle [13], yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\alpha = -\log \left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_{i-1}(X_i - \theta_i)}{\sum_{i=1}^n Z_{i-1}(X_{i-1} - \theta_{i-1})} \right), \quad (2.9)$$

dengan:

$$Z_{i-1} = \frac{\theta_{i-1} - X_{i-1}}{\sigma^2}, \quad (2.10)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

2.4. Algoritma Gauss-Newton

Algoritma Gauss-Newton merupakan metode untuk meminimalkan permasalahan kuadrat terkecil (*least-squares*) [14]. Perhatikan Persamaan (2.6), misal ambil salah satu variasi menggunakan fungsi sin:

$$\theta_n(t) = p + \sum_{m=1}^n a_m \sin \left(\frac{2m\pi}{12} (t - v) \right). \quad (2.11)$$

Metode Gauss-Newton diimplementasikan untuk mendapatkan kombinasi parameter, sehingga dapat menyelesaikan:

$$\min_{p, i, v} \|f(\cdot, p, a_1, \dots, a_n, v) - D(\cdot)\|_2^2,$$

dengan

$$f(t, p, a_1, \dots, a_n, v) = p + a_1 \sin \left(\frac{2\pi}{12} (t - v) \right) + \dots + a_n \sin \left(\frac{2n\pi}{12} (t - v) \right).$$

Formula dari metode Gauss-Newton dinyatakan sebagai berikut:

$$[J]^{jT} [J]^j \{\Delta a\} = [J]^{jT} \{d\}^j, \quad (2.12)$$

dengan J merupakan matriks Jacobian yang memuat turunan parsial suatu fungsi, j mewakili iterasi, d merupakan suatu vektor yang memuat pengurangan dari fungsi, dan Δa adalah selisih dari parameter yang dicari. Kemudian hasil akhir didapat dengan:

$$\{a\}^{j+1} = \{a\}^j + \{\Delta a\}. \quad (2.13)$$

2.5. Interpolasi Spline Linear

Interpolasi merupakan salah satu metode untuk memperoleh data yang hilang tanpa menghilangkan karakteristik dari data asli [15]. Metode tersebut penting diterapkan karena seringkali terdapat situasi dimana tidak tersedia data yang lengkap. Data yang tidak lengkap dapat mempersulit penelitian karena data tersebut digunakan dalam proses analisis.

Interpolasi spline linear merupakan metode pendekatan yang sederhana, yaitu dengan garis lurus untuk menghubungkan titik-titik data. Spline orde pertama didefinisikan sebagai fungsi linear sebagai berikut [15]:

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}), \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \quad (2.14)$$

dengan m_i adalah gradien dari garis lurus yang menghubungkan titik-titik:

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}. \quad (2.15)$$

3. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan data curah hujan bulanan di provinsi Jawa Timur periode Januari 2014 hingga Desember 2023 (120 bulan). Data diperoleh dari *website* data *online* Badan Meteorologi, Klimatologi, dan Geofisika (BMKG) berbentuk *time series* dan masih dalam skala harian. Secara spesifik, beberapa wilayah yang dipilih meliputi Kabupaten Malang (Stasiun Klimatologi Jawa Timur), Kabupaten Banyuwangi (Stasiun Meteorologi Banyuwangi), dan Kota Surabaya (Stasiun Meteorologi Perak I), Kabupaten Pasuruan (Stasiun Geofisika Pasuruan), dan Kabupaten Sumenep (Stasiun Meteorologi Trunojoyo). Pemilihan wilayah-wilayah tersebut didasarkan pada kelengkapan data. Kelima wilayah tersebut memang masih mengandung nilai yang hilang (*missing value*), akan tetapi tidak terlalu parah dibandingkan wilayah lain di Jawa Timur.

Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu:

- (1) Menangani data yang hilang dengan interpolasi *spline linear*.
- (2) Melakukan modifikasi model stokastik curah hujan. Modifikasi yang dilakukan adalah memberikan nilai nol pada harga risiko pasar ($\lambda = 0$).
- (3) Melakukan estimasi parameter dalam model stokastik curah hujan sebagai berikut:
 - (a) Mengestimasi nilai parameter dalam deret Fourier *truncated* menggunakan algoritma Gauss-Newton yang akhirnya digunakan untuk mendapatkan nilai komponen musiman $\theta_n(t)$.
 - (b) Melakukan *fitting* nilai $\theta_n(t)$ terhadap nilai rata-rata bulanan curah hujan, hingga diperoleh nilai komponen musiman terbaik dengan indikator MSE terkecil.
 - (c) Mengestimasi nilai parameter volatilitas (σ).
 - (d) Mengestimasi nilai parameter *mean-reversion* (α).
- (4) Melakukan validasi model stokastik curah hujan yang telah dimodifikasi.

4. Hasil dan Pembahasan

4.1. Modifikasi Model Stokastik Ornstein-Uhlenbeck

Model stokastik Ornstein-Uhlenbeck pada dasarnya digunakan untuk menggambarkan pola cuaca yang mengalami *mean-reverting*. *Mean-reverting* merupakan karakteristik untuk kembali ke nilai rata-rata jangka panjang setelah mengalami

penyimpangan. Model Ornstein-Uhlenbeck yang ada pada penelitian sebelumnya ditunjukkan oleh Persamaan (2.5).

Modifikasi dilakukan dengan membuat parameter harga risiko pasar menjadi sama dengan nol ($\lambda = 0$). Hal tersebut dilakukan dengan alasan penelitian ini tidak melangkah ke arah valuasi. Selain itu, di Indonesia sendiri belum terdapat produk derivatif cuaca yang diperdagangkan, sehingga tidak dapat diperkirakan nilai risiko pasar yang tepat. Model stokastik Ornstein-Uhlenbeck yang telah dimodifikasi adalah sebagai berikut:

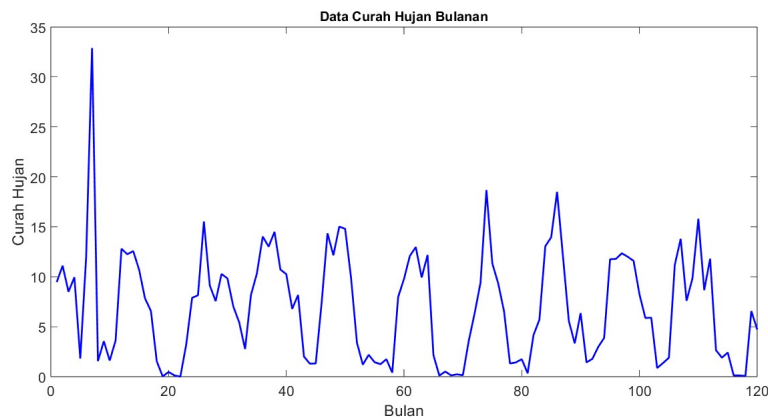
$$dX_t = [\alpha(\theta(t) - X_t) + \theta'(t)]dt + \sigma dW_t^Q. \quad (4.1)$$

Pada tahap berikutnya, model yang ditunjukkan oleh Persamaan (4.1) digunakan dalam penelitian ini.

4.2. *Interpolasi Data*

Bagian ini bertujuan untuk menentukan data curah hujan yang digunakan serta melakukan penanganan terhadap adanya data yang hilang. Data yang digunakan telah disebutkan pada metode penelitian. Penanganan data yang hilang adalah dengan melakukan pendekatan menggunakan interpolasi spline linear.

Data harian yang telah diinterpolasi kemudian dicari nilai rata-ratanya untuk setiap bulan, sehingga kini terdapat 120 data curah hujan. Pertimbangan diambil skala bulanan, yaitu karena tidak setiap hari terjadi hujan dan dengan skala bulanan dapat lebih mudah dilihat kapan musim hujan terjadi. Gambar 1 menunjukkan hasil interpolasi data curah hujan serta telah dirubah menjadi skala bulanan.



Gambar 1. Data Curah Hujan di Jawa Timur (2014-2023) Setelah Interpolasi dan dirubah ke Skala Bulanan.

4.3. *Estimasi Komponen Musiman*

Komponen musiman merupakan rata-rata jangka panjang dari curah hujan dan disimbolkan dengan $\theta_n(t)$. Selain itu, komponen musiman dapat memuat gambaran

secara umum mengenai pola curah hujan. Mulanya terdapat 120 data curah hujan, lalu dicari nilai rata-rata curah hujan dari tiap bulan yang sama selama 10 tahun yang menghasilkan 12 nilai. Kedua belas nilai rata-rata bulanan tersebut dijadikan pembandingan bagi nilai rata-rata jangka panjang.

4.3.1. *Estimasi Komponen Musiman dengan Deret Fourier Truncated Fungsi sin*

Estimasi komponen musiman dengan menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi *sin* dilakukan dalam kondisi $b_m = 0$, seperti yang ditunjukkan oleh Persamaan (2.11). Persamaan tersebut dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\theta_n(t) = p + \sum_{m=1}^n a_m \sin\left(\frac{2m\pi}{12}(t - v)\right),$$

dengan parameter p, a_m dan v diperoleh melalui penerapan algoritma Gauss-Newton.

Uji pertama dilakukan ketika jumlah harmonik $n = 2$, sehingga fungsi pada Persamaan (2.11) menjadi:

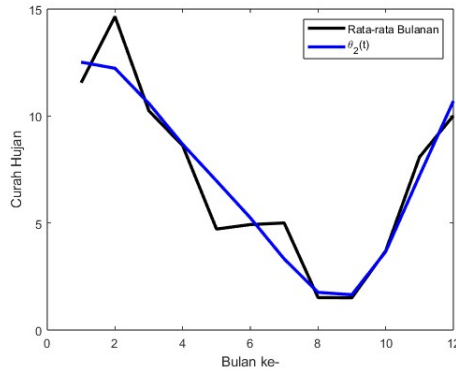
$$\theta_2(t) = p + a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{12}(t - v)\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi}{12}(t - v)\right). \tag{4.2}$$

Algoritma Gauss-Newton diimplementasikan langsung dengan bantuan MATLAB dan diperoleh nilai p, a_1, a_2 , dan v secara berturut-turut: 7,0433; -5,2381; 1,0402; dan 4,9534. Keempat nilai parameter tersebut disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.2) dan memberikan nilai $\theta_2(t)$ seperti yang dimuat oleh Tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_2(t)$ Fungsi sin.

t	Rata-rata Bulanan	$\theta_2(t)$
1	11,55492473	12,5165718122570
2	14,64527543	12,2290998402582
3	10,24555376	10,5892419771173
4	8,61185719	8,67649963613975
5	4,715533749	6,96624559475477
6	4,925585714	5,23949323086399
7	5,000612903	3,31882162272546
8	1,513487931	1,75601816482980
9	1,504608796	1,64708259298827
10	3,700823833	3,66130692887783
11	8,08554127	7,22183640015725
12	10,01584719	10,6973821990305

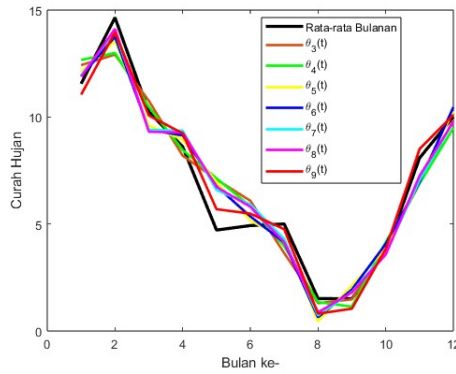
Visualisasi perbandingan hasil estimasi komponen musiman $\theta_2(t)$ terhadap nilai rata-rata curah hujan bulanan ditunjukkan oleh Gambar 2. Berdasarkan nilai komponen musiman yang diperoleh dengan jumlah harmonik $n = 2$, didapat skor



Gambar 2. Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Komponen Musiman pada Data Jawa Timur (2014-2023) menggunakan Fungsi *sin* untuk $n = 2$.

MSE sebesar 1,3474. Skor MSE yang dihasilkan sebenarnya sudah minim, tetapi *fitting* dengan deret Fourier *truncated* fungsi sin tetap dilanjutkan dengan harapan memberikan nilai MSE yang lebih kecil.

Estimasi komponen musiman dengan deret Fourier *truncated* fungsi sin dilanjutkan dengan penambahan jumlah harmonik $n = 3, 4, \dots, 10$. Plot nilai $\theta_n(t)$ dengan $n = 3, 4, 5, \dots, 9$ terhadap nilai rata-rata curah hujan bulanan ditunjukkan oleh Gambar 3.



Gambar 3. Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Komponen Musiman pada Data Jawa Timur (2014-2023) menggunakan Fungsi *sin* untuk $n = 3, 4, 5, \dots, 9$.

Berdasarkan hasil estimasi sesuai variasi jumlah harmonik yang diberikan, dihitung masing-masing skor MSEnya dan dipilih yang paling minimum. Tabel 2 memuat nilai MSE untuk masing-masing variasi jumlah harmonik. Terlihat bahwa skor MSE terkecil terjadi pada $n = 10$, yaitu sebesar $1,9611 \times 10^{-8}$. Skor tersebut sangat minim dan mendekati nol, sehingga tidak dilakukan penambahan jumlah harmonik kembali. Artinya estimasi komponen musiman dengan deret Fourier

Tabel 2. Nilai MSE $\theta_n(t)$ untuk Fungsi sin.

n	MSE
2	1,3474
3	1,21
4	1,1534
5	0,83638
6	0,79945
7	0,72235
8	0,71029
9	0,28271
10	$1,9611 \times 10^{-8}$

truncated fungsi sin dapat dihentikan. Nilai $\theta_{10}(t)$ serta visualisasi perbandingannya terhadap nilai rata-rata curah hujan bulanan secara berturut-turut ditunjukkan oleh Tabel 3 dan Gambar 4.

Tabel 3. Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_{10}(t)$ Fungsi sin.

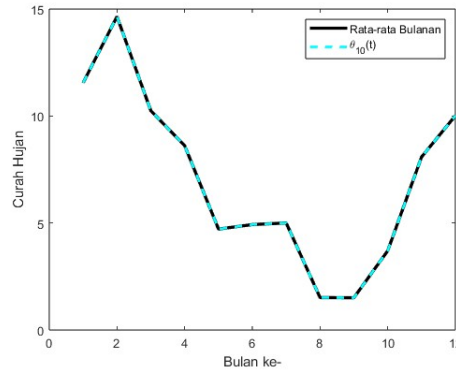
t	Rata-rata Bulanan	$\theta_{10}(t)$
1	11,55492473	11,5550565347698
2	14,64527543	14,6451077577723
3	10,24555376	10,2454203288118
4	8,61185719	8,61181002546867
5	4,715533749	4,71588204792374
6	4,925585714	4,92567112625033
7	5,000612903	5,00057396290689
8	1,513487931	1,51339322844131
9	1,504608796	1,50469375144058
10	3,700823833	3,70078805828865
11	8,08554127	8,08539831887615
12	10,01584719	10,0158048590499

4.3.2. *Estimasi Komponen Musiman dengan Deret Fourier Truncated Fungsi cos*

Fitting dengan fungsi cos dilakukan dalam kondisi $a_m = 0$. Persamaan (2.6) dapat dituliskan menjadi berikut ini:

$$\theta_n(t) = p + \sum_{m=1}^n b_m \cos\left(\frac{2m\pi}{12}(t - v)\right). \tag{4.3}$$

Simulasi dengan fungsi cos dilakukan untuk $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Estimasi parameter p, b_m , dan v juga dilakukan menggunakan algoritma Gauss-Newton. Estimasi



Gambar 4. Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Komponen Musiman pada Data Jawa Timur (2014-2023) menggunakan Fungsi *sin* untuk $n = 10$.

pertama menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi cos dengan $n = 2$ terdefinisi sebagai berikut:

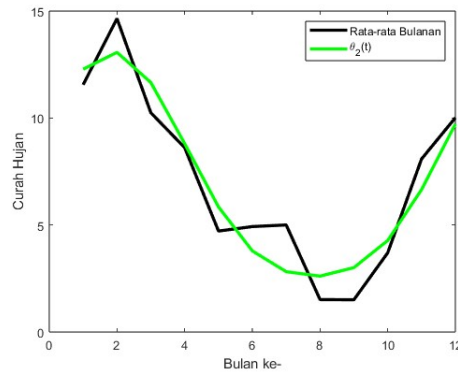
$$\theta_2(t) = p + b_1 \cos\left(\frac{2\pi}{12}(t - v)\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi}{12}(t - v)\right). \quad (4.4)$$

Berikutnya dengan implementasi Gauss-Newton, diperoleh: $p = 7,0433$, $b_1 = 5,2454$, $b_2 = 0,8048$, dan $v = 1,8523$. Keempat parameter tersebut disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.4) dan memberikan nilai $\theta_2(t)$ yang dimuat dalam Tabel 4.

Tabel 4. Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_2(t)$ Fungsi *cos*.

t	Rata-rata Bulanan	$\theta_2(t)$
1	11,55492473	12,2799670756542
2	14,64527543	13,0682145136545
3	10,24555376	11,6599696586294
4	8,61185719	8,80223366348046
5	4,715533749	5,84285589491423
6	4,925585714	3,78725746948948
7	5,000612903	2,81657124400923
8	1,513487931	2,60877049406991
9	1,504608796	3,00707702943152
10	3,700823833	4,27442801685607
11	8,08554127	6,65335909736139
12	10,01584719	9,71889584244963

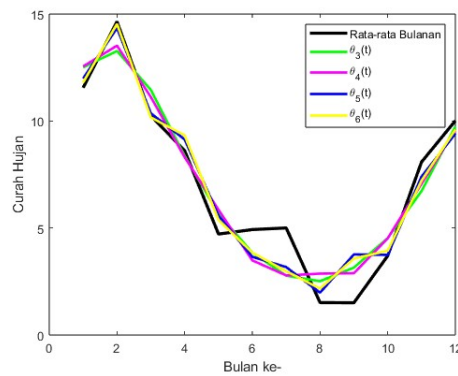
Berdasarkan perbandingan hasil simulasi terhadap nilai rata-rata bulanan, diperoleh skor MSE sebesar 1,526. Nilai tersebut masih lebih besar dibandingkan dengan hasil estimasi menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi sin walaupun berada dalam kondisi yang sama $n = 2$. Plot estimasi $\theta_2(t)$ dengan menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi cos ditunjukkan oleh Gambar 5.



Gambar 5. Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Komponen Musiman pada Data Jawa Timur (2014-2023) menggunakan Fungsi cos untuk $n = 2$.

Estimasi komponen musiman dilanjutkan untuk $n = 3, 4, 5, 6$. Visualisasi hasil estimasi ditunjukkan oleh Gambar 6. Terlihat bahwa plot $\theta_n(t)$ semakin mendekati pola rata-rata bulanan. Kondisi *fitting* terbaik deret Fourier *truncated* fungsi cos terjadi saat $n = 7$. Fungsi $\theta_7(t)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\theta_7(t) = p + b_1 \cos\left(\frac{2\pi}{12}(t - v)\right) + \dots + b_7 \cos\left(\frac{14\pi}{12}(t - v)\right). \quad (4.5)$$

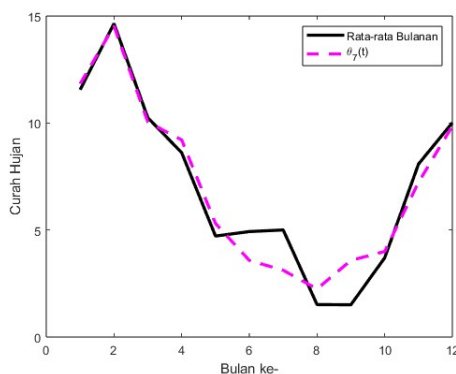


Gambar 6. Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Komponen Musiman pada Data Jawa Timur (2014-2023) menggunakan Fungsi cos untuk $n = 3, 4, 5, 6$.

Selanjutnya dengan implementasi algoritma Gauss-Newton didapat nilai: $p = 7,0433$, $b_1 = -5,2390$, $b_2 = 0,8958$, $b_3 = -0,1406$, $b_4 = 0,3245$, $b_5 = -0,8559$, $b_6 = 0,2653$, $b_7 = -0,1978$, dan $v = 7,7578$. Seluruh nilai parameter tersebut disubstitusikan dalam Persamaan (4.5) dan memberikan nilai $\theta_7(t)$ seperti pada Tabel 5, serta plot nilai $\theta_7(t)$ terhadap data rata-rata curah hujan bulanan yang ditunjukkan Gambar 7.

Tabel 5. Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_7(t)$ Fungsi cos.

t	Rata-rata Bulanan	$\theta_7(t)$
1	11,55492473	11,9902689817366
2	14,64527543	14,3441121236835
3	10,24555376	10,3582388981926
4	8,61185719	9,13619741033013
5	4,715533749	5,57108041153508
6	4,925585714	3,65032758334004
7	5,000612903	3,17182958051825
8	1,513487931	1,97651119633669
9	1,504608796	3,76411651339485
10	3,700823833	3,74253756659959
11	8,08554127	7,40426561462267
12	10,01584719	9,41011411971004

Gambar 7. Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Komponen Musiman pada Data Jawa Timur (2014-2023) menggunakan Fungsi cos untuk $n = 7$.

Fitting menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi cos dengan $n = 7$ dikatakan terbaik karena MSE yang dihasilkan paling minimum dibanding saat $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Perhatikan Tabel 6, jelas bahwa MSE $n = 7$ adalah yang terkecil. Meskipun skor MSE mengalami penurunan, tetapi dengan jumlah harmonik yang sama skornya tidak pernah kurang dari hasil milik fungsi sin pada Tabel 2. Oleh karena itu, estimasi rata-rata jangka panjang menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi cos dihentikan sampai $n = 7$ saja.

Tabel 6. Nilai MSE $\theta_n(t)$ untuk Fungsi cos.

n	2	3	4	5	6	7
MSE	1,526	1,4709	1,4197	1,0353	0,99833	0,98868

Berdasarkan tiga cara estimasi yang dilakukan untuk memperoleh nilai komponen musiman, *fitting* terbaik ditunjukkan oleh deret Fourier *truncated* fungsi *sin* dengan jumlah harmonik 10. Oleh sebab itu, hasil estimasi tersebutlah yang digunakan ke dalam validasi model Ornstein-Uhlenbeck yang telah dimodifikasi.

4.4. Estimasi Nilai Volatilitas dan Kecepatan Mean-reversion

Komponen lain yang diestimasi, yaitu volatilitas serta *mean-reversion*. Volatilitas diestimasi dengan mengikuti Persamaan (2.8) dengan $N_\mu = 12$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{11} (X_{j+1} - X_j)^2, \\ &= \frac{1}{12} ((14,6453 - 11,5549)^2 + \dots + (10,0158 - 8,0855)^2), \\ &= 7,2286.\end{aligned}$$

Berikutnya, untuk mendapatkan nilai *mean-reversion* digunakan Persamaan (2.9). Nilai komponen musiman dan data rata-rata curah hujan digunakan dalam penghitungan ini, sehingga diperoleh nilai *mean-reversion* sebesar 1,5834.

4.5. Validasi Model Ornstein-Uhlenbeck Modifikasi

Bagian ini memuat penjelasan bagaimana model Ornstein-Uhlenbeck yang telah dimodifikasi mampu menggambarkan perilaku curah hujan di Jawa Timur. Melalui beberapa simulasi sebelumnya, diperoleh nilai komponen musiman, volatilitas, serta *mean-reversion*. Model Ornstein-Uhlenbeck yang telah dimodifikasi dimuat oleh Persamaan (4.1) yang dituliskan kembali sebagai berikut:

$$dX_t = [\alpha(\theta(t) - X_t) + \theta'(t)]dt + \sigma dW_t^Q.$$

Parameter yang telah didapatkan kemudian disubstitusikan dalam dX_t . Simulasi dilakukan menggunakan MATLAB. Hasil simulasi dengan 100 iterasi ditunjukkan Gambar 8. Terlihat bahwa plot Ornstein-Uhlenbeck telah mengikuti pola data rata-rata curah hujan bulanan dengan MSE 1,4352.

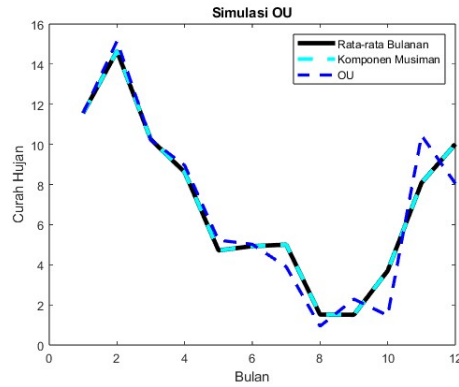
Iterasi ditingkatkan menjadi 1.000 seperti ditunjukkan Gambar 9. Skor MSE menjadi semakin baik yaitu 0,11374. Nilai MSE tersebut sudah sangat minim dengan visualisasi yang juga semakin serupa data asli. Hal tersebut menunjukkan bahwa model Ornstein-Uhlenbeck yang telah dimodifikasi merupakan model yang tepat untuk menggambarkan perilaku curah hujan di Jawa Timur.

5. Kesimpulan

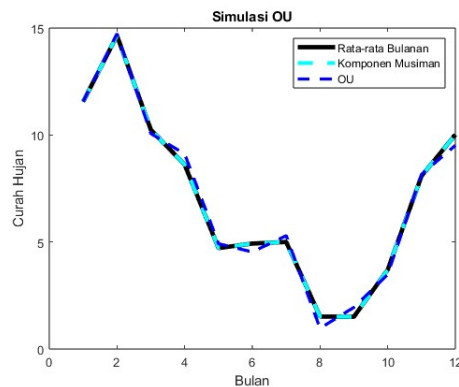
Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa model stokastik Ornstein-Uhlenbeck yang telah dimodifikasi, yaitu:

$$dX_t = [\alpha(\theta(t) - X_t) + \theta'(t)]dt + \sigma dW_t^Q.$$

merupakan model yang tepat untuk menggambarkan kondisi curah hujan di Jawa Timur. Simulasi model Ornstein-Uhlenbeck modifikasi terhadap data curah hujan



Gambar 8. Perbandingan Hasil Simulasi Ornstein-Uhlenbeck dengan Data Curah Hujan Jawa Timur (2014-2023) 100 Iterasi.



Gambar 9. Perbandingan Hasil Simulasi Ornstein-Uhlenbeck dengan Data Curah Hujan Jawa Timur (2014-2023) 1.000 Iterasi.

di Jawa Timur dengan 100 dan 1.000 iterasi secara berturut-turut memberikan MSE sebesar 1,4352 dan 0,11374. Model tersebut mengandung komponen musiman yang menggambarkan rata-rata jangka panjang dari curah hujan. *Fitting* terbaik dihasilkan melalui deret Fourier *truncated* fungsi sin dan memberikan MSE sebesar $1,9611 \times 10^{-8}$. Selain itu model stokastik Ornstein-Uhlenbeck tersebut juga mengandung parameter volatilitas dan kecepatan *mean-reversion* dengan nilai secara berturut-turut, yaitu 7,2286 dan 1,5834.

Daftar Pustaka

- [1] Susilokarti, D., Arif, S.S., Susanto, S., Sutiarto, L., 2015, Identifikasi Perubahan Iklim Berdasarkan Data Curah Hujan di Wilayah Selatan Jatiluhur Kabupaten Subang, Jawa Barat, *Agritech* Vol. **35**(1): 98 – 105
- [2] Chou, C., Neelin, J. D., Chen, C. A., Tu J. Y., 2009, Evaluating the “Rich-Get-

- Richer” Mechanism in Tropical Precipitation Change under Global Warming, *Journal of Climate*, Vol. **22**(8): 1982 – 2005
- [3] Rosyida, A., Aziz, M., Firmansyah, Y., Setiawan, T., Pangesti, K. P., Kakatur, F., 2024, *Buku Data Bencana Indonesia 2023*, Volume 3, Badan Nasional Penanggulangan Bencana (BNPB) Indonesia, Jakarta
- [4] Stulec, I., Petljak, K., Bakovic, T., 2016, Effectiveness of Weather Derivatives As a Hedge against the Weather Risk in Agriculture, *Agric. Econ.*, Vol. **62**(8): 356 – 362
- [5] Cramer, S., Kampouridis, M., Freitas, A. A., Alexandridis, A. K., 2017, An Extensive Evaluation of Seven Machine Learning Methods for Rainfall Prediction in Weather Derivatives, *Expert Systems With Applications*, Vol. **85**: 169 – 181
- [6] Cao, M., Li, A., Wei, J. Z., 2004, Precipitation Modeling and Contract Valuation: A Frontier in Weather Derivatives, *Journal of Alternative Investments*, Vol. **7**(2): 93 – 99
- [7] Leobacher, G., Ngare, P., 2011, On Modelling and Pricing Rainfall Derivatives with Seasonality, *Applied Mathematical Finance*, Vol. **18**(1): 71 – 91
- [8] Shah, A., 2017, Pricing of Rainfall Derivatives Using Generalized Linear Modelling of Daily Rainfall Process, *International Agricultural Risk, Finance and Insurance Conference (IARFIC) 2017 Paris Meetings Paper*, 1 – 22
- [9] Li, P., 2018, Pricing Weather Derivatives with Partial Differential Equations of the Ornstein–Uhlenbeck Process, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. **75**(3): 1044 – 1059
- [10] Jewson, S., Brix, A., Ziehmman, C., 2005, *Weather Derivative Valuation*, Cambridge University Press, United States of America
- [11] Øksendal, B., 1995, *Stochastic Differential Equations*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin
- [12] Nhangumbe, C., Sousa, E., 2024, Numerical Solutions of An Option Pricing Rainfall Weather Derivatives Model, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. **153**: 43 – 55
- [13] Bibby, B. M., Sørensen, M., 1995, Martingale Estimation Functions for Discretely Observed Diffusion Processes, *Bernoulli*, Vol. **1**(1/2): 17 – 39
- [14] Emmerich, C. V., 2005, *Modelling and Simulating of Rain Derivatives*, University of Wuppertal, Wuppertal
- [15] Chapra, S. C., Canale, R. P., 2010, *Numerical Methods for Engineers*, Edisi ke-6, McGraw-Hill, New York