Jurnal Matematika UNAND
Vol. **15** No. **2** Hal. 249 – 258
Edisi April 2026
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410
©Departemen Matematika dan Sains Data FMIPA UNAND
https://doi.org/10.25077/jmua.15.2.249-258.2026

WIENER INDEX ON PRIME COPRIME GRAPHS OF THE MODULO GROUP OF INTEGERS (INDEKS WIENER PADA GRAF PRIMA-KOPRIMA DARI GRUP MODULO BILANGAN BULAT)

ABDURAHIM*, LIA FITTA PRATIWI, GUSTI YOGANANDA KARANG, I GEDE ADHITYA WISNU WARDHANA, MAMIKA UJIANITA ROMDHINI

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram,
email : abdurahim@staff.unram.ac.id, liafitta04@gmail.com, yogakarang123@gmail.com, adhit@unram.ac.id, mamika@unram.ac.id

Diajukan 15 Agustus 2024 Direvisi 3 Desember 2025
Diterima 21 Januari 2026 Diterbitkan 30 April 2026

Abstrak. Graf Koprima Prima merupakan graf yang mana sebarang dua simpul berbeda dikatakan bertetangga jika dan hanya jika Faktor Persekutuan terbesar (FPB) dari order kedua simpul sama dengan 1 atau prima. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji subgraf serta rumus umum dari indeks Wiener dan Hyper-Wiener pada graf koprima prima dari grup bilangan bulat. Dari penelitian ini didapatkan bahwa subgraf yang terbentuk adalah graf lengkap dan bipartit. Selain itu, diperoleh juga rumus umum indeks Wiener dan Hyper-Wiener untuk graf koprima prima. Lebih jauh, nilai dari indeks Hyper-Wiener kurang dari dua kali indeks Wiener untuk graf koprima prima.

Kata Kunci: Graf bipartit, graf lengkap, subgraf

Abstract. *Prime Coprime Graph is a graph in which any two distinct vertices are said to be adjacent if and only if the Greatest Common Divisor (GCD) of the orders of both vertices is either 1 or a prime number. This study aims to examine subgraphs and derive the general formulas for the Wiener and Hyper-Wiener indices on the prime coprime graph of the integer group. This research found that the subgraph is a complete and bipartite graph. Additionally, a general formula for the Wiener and Hyper-Wiener indices is obtained for prime coprime graph. Furthermore, the value of the Hyper-Wiener index is less than twice the Wiener index for prime coprime graph.*

Keywords: Bipartite graph, complete graph, subgraph

1. Pendahuluan

Graf merupakan topik yang mengkaji tentang simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*). Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, graf dapat dikombinasikan dengan

*Penulis korespondensi

struktur aljabar. Hal ini dikenal sebagai representasi graf pada struktur aljabar. Representasi graf pada struktur aljabar ini juga merupakan salah satu topik menarik yang dikaji beberapa tahun terakhir. Hal ini terlihat dari beberapa penelitian yang pernah dilakukan. Misalnya indeks Wiener, Zagreb Pertama, dan Zagreb Kedua pada graf order hasil perkalian prima (*order product prime graph*) [1]. Selain itu, terdapat sifat-sifat graf koprima yang telah diobservasi oleh Ma et al. [2]. Selanjutnya pada penelitian tentang graf koprima dari grup dihedral mengkaji tentang indeks Hyper-Wiener dan Indeks Padmakar-Ivan [3] serta indeks Zagreb Pertama dan Zagreb Kedua dari graf koprima bilangan bulat [4]. Kajian terkait indeks topologi (indeks Harmonik, Harary, Zagreb Pertama, Gutman, dan Wiener) ini juga pernah dikaji [5] pada graf koprima dari grup dihedral dengan orde pangkat prima. Indeks topologi serupa juga pernah dikaji pada graf pangkat dari grup dihedral [6].

Dari definsi graf prima [7] dan graf koprima [2], maka diperoleh graf koprima prima yang telah dijelaskan oleh Adhikari and Banerjee [8]. Graf koprima prima merupakan graf yang simpulnya terdiri dari semua elemen dari G di mana dua simpul berbeda bertetangga jika FPB order kedua simpul sama dengan 1 atau prima [8].

Pada artikel [8], struktur grup yang dikaji masih menggunakan grup secara umum. Hal ini tentu akan menghasilkan sesuatu yang baru jika mengkaji grup yang lebih khusus, yaitu grup bilangan bulat $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = p^k$ dan bilangan bulat $k \geq 2$. Selain itu, akan dikaji juga subgrup yang terbentuk dari graf koprima prima $\mathbb{Z}_n$. Lebih jauh, belum ada penelitian yang mengkaji indeks topologi pada graf koprima prima. Oleh karena itu, akan dikaji beberapa indeks topologi dari graf koprima prima, yaitu Indeks Wiener dan Indeks Hyper-Wiener.

2. Landasan Teori

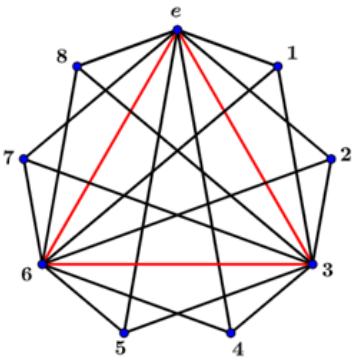
Graf koprima prima, dinotasikan Γ_G, merupakan graf yang simpulnya terdiri dari semua elemen dari G di mana dua simpul berbeda, u dan v, bertetangga jika order kedua simpul sama dengan 1 atau prima. Order dari grup G dinotasikan dengan $|G|$, sementara $|u|$ merepresentasikan order dari simpul u. Berikut diberikan definisi graf koprima prima.

Definisi 2.1. *[8] Diberikan G grup berhingga sedemikian hingga $|G| > 2$. Graf koprima prima $\Gamma_G = (V, E)$ didefinisikan sebagai graf dengan himpunan simpul V yang merupakan semua elemen grup G dan sebarang dua simpul berbeda, x dan y, disebut bertetangga jika dan hanya jika FPB dari $|x|$ dan $|y|$ sama dengan 1 atau bilangan prima, atau dapat ditulis dengan $(|x|, |y|) = 1$ atau $(|x|, |y|) = p$.*

Untuk pembahasan selanjutnya, Γ_G difokuskan pada grup bilangan bulat modulo n sebagai himpunan simpulnya, atau ditulis dengan $\mathbb{Z}_n$, yang disimbolkan dengan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$. Dinotasikan pula $V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ dan $E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ berturut-turut sebagai himpunan simpul dan sisi dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$. Contoh berikut menggambarkan pengkonstruksian graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$.

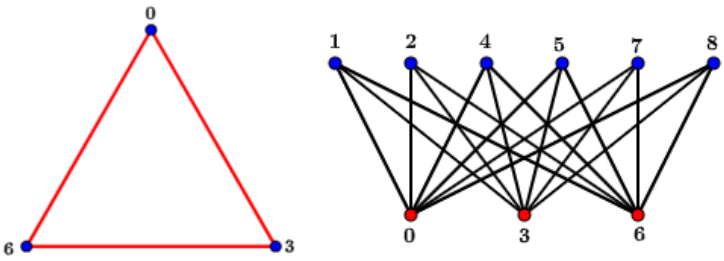
Contoh 2.2. Misal diberikan $n = 3^2$. Berdasarkan informasi dari FPB dari $|x|$ dan $|y|$, untuk setiap pasang simpul $x, y \in \mathbb{Z}_9$, maka graf koprima prima dari grup $\mathbb{Z}_9$

seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf koprima prima $\mathbb{Z}_9$.

Sebagaimana terlihat pada Gambar 1, graf tersebut dapat direpresentasikan sebagai dua subgraf, yaitu sebuah graf lengkap dan sebuah graf lengkap bipartit, seperti diilustrasikan pada Gambar 2. Pemisahan ini dilakukan untuk menghasilkan suatu teorema yang akan mempermudah proses pembuktian indeks topologi.



Gambar 2. Subgraf lengkap dan bipartit dari $\mathbb{Z}_9$.

Indeks Wiener, dikenal juga sebagai bilangan Wiener, merupakan jumlahan dari panjang lintasan terpendek antar dua simpul berbeda. Berikut diberikan definisi indeks Wiener.

Definisi 2.3. *[9] Indeks Wiener dari graf* $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$*, dinotasikan dengan* $W(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$*, didefinisikan sebagai:*

$$W(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u,v),$$

dengan $d(u,v)$ *adalah jarak antar simpul* u *dan* v*.*

Indeks Hyper–Wiener didefinisikan sebagai setengah dari jumlah jarak lintasan terpendek antara setiap pasangan simpul yang berbeda, ditambah jumlah kuadrat dari jarak tersebut. Berikut disajikan definisi formal dari indeks Hyper–Wiener.

Definisi 2.4. *[10] Indeks Hyper-Wiener dari graf* $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$*, dinotasikan dengan* $WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$*, didefinisikan sebagai:*

$$WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u,v) + d^2(u,v),$$

dengan $d(u,v)$ *adalah jarak antar simpul* u *dan* v*.*

Contoh 2.5. Misal akan dihitung indeks Wiener dan Hyper dari Contoh 2.2, yaitu $\Gamma_{\mathbb{Z}_9}$. Perhatikan bahwa diperoleh Indeks Wiener sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
W(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}) &= d(0,1) + d(0,2) + d(0,3) + d(0,4) + d(0,5) + d(0,6) + d(0,7) + d(0,8) \\
&\quad + d(1,2) + d(1,3) + d(1,4) + d(1,5) + d(1,6) + d(1,7) + d(1,8) + d(2,3) \\
&\quad + d(2,4) + d(2,5) + d(2,6) + d(2,7) + d(2,8) + d(3,4) + d(3,5) + d(3,6) \\
&\quad + d(3,7) + d(3,8) + d(4,5) + d(4,6) + d(4,7) + d(4,8) + d(5,6) + d(5,7) \\
&\quad + d(5,8) + d(6,7) + d(6,8) + d(7,8), \\
&= 1+1+1+1+1+1+1+1+2+1+2+2+1+2+2+1+2+2+1, \\
&\quad + 2+2+1+1+1+1+1+2+1+2+2+1+2+2+1+1+2, \\
W(\Gamma_{\mathbb{Z}_9}) &= 51.
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh indeks Hyper-Wiener dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_9}$ adalah $WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_9}) = 66$.

3. Pembahasan

3.1. *Subgraf*

Berdasarkan Contoh 2.2 didapat subgraf dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_9}$ adalah graf lengkap K_5 dan bipartit lengkap $K_{3,6}$ (lihat Gambar 2). Hal ini dapat diperumum untuk graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ yang tertuang pada teorema berikut.

Teorema 3.1. *Misal diberikan* $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ *graf koprima prima dari grup* $\mathbb{Z}_n$*. Jika* $n = p^k$ *dengan* p *prima dan* $k \geq 2$ *bilangan bulat, maka subgraf dari graf* $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ *adalah graf lengkap* K_p *dan bipartit* K_{p,p^k-p}*.*

Bukti. Diketahui $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat. Diperoleh bahwa $V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \{0, 1, \cdots, p^k - 1\}$ dan $|v| = mp$ di mana m adalah bilangan asli ≥ 1 serta sebarang $v \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \setminus \{0\}$. Lebih jauh, jika $v \in \{p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\}$ maka $|v| = p$ dan $|v| = 1$ untuk $v = 0$. Oleh karena itu $(|u|, |v|) = 1$ untuk $u = 0$ dan $v \in \{p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\}$ serta $(|u|, |v|) = 1$ untuk $u, v \in \{p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\}$ dan $u \neq v$. Hal ini berakibat bahwa sebarang $u, v \in \{p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\} \cup \{0\}$ dengan $u \neq v$ bertetangga. Dengan kata lain, graf yang terbentuk adalah graf lengkap. Karena $\{p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\} \cup \{0\} \subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ maka graf tersebut merupakan subgraf dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$. Selanjutnya banyak simpul dari himpunan $\{p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\} \cup \{0\}$ adalah p maka subgraf yang terbentuk adalah graf lengkap K_p.

Pada subgraf yang kedua, akan dikonstruksi sisinya. Simpul pada subgraf ini adalah semua simpul pada graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ tapi sebarang dua simpul di $\{0, p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\}$ dikondisisikan tidak saling bertetangga. Oleh karena itu, himpunan simpulnya dapat dipartisi menjadi $V_1 = \{0, p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\}$ dan $V_2 = \{0, 1, 2, 3, \cdots, p^k - 1\} \setminus V_1$ dengan $|v_1| = p, |v_2| = rp$, dan $|v_3| = sp$ untuk sebarang $v_1 \in V_1$, dan $v_2, v_3 \in V_2$, serta bilangan asli $r, s \geq 2$. Oleh karena itu diperoleh bahwa $(|v_1|, |v_2|) = 1$ atau $(|v_1|, |v_2|) = p$ dan $(|v_2|, |v_3|) \neq 1$ atau $(|v_2|, |v_3|) \neq p$ untuk $v_2 \neq v_3$. Hal ini berakibat bahwa $e = v_1v_2$ dan $e \neq v_2v_3$. Dengan kata lain, sebarang simpul di V_1 bertetangga dengan simpul di V_2 dan dua sebarang simpul yang berbeda pada V_2 tidak bertetangga. Jadi, terbentuk subgraf bipartit lengkap dengan himpunan simpul V_1 dan V_2. Lebih jauh, karena $|V_1| = p$ dan $|V_2| = |\{0, 1, 2, 3, \cdots, p^k - 1\} \setminus V_1| = |\{0, 1, 2, 3, \cdots, p^k - 1\}| - |V_1| = p^k - p$ maka terbentuk subgraf bipartit lengkap K_{p,p^k-p}. □

Ditinjau dari derajat suatu simpul v, yaitu banyaknya simpul yang bertetangga dengan v dan dinotasikan dengan $\deg(v)$, maka dari Contoh 2.2 terlihat juga bahwa ada dua jenis simpul. Jenis yang pertama adalah simpul berderajat $p^k - 1$, dan yang kedua adalah simpul berderajat p. Oleh karena itu diperoleh teorema sebagai berikut.

Teorema 3.2. *Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka derajat simpul dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ terdiri dari dua, yaitu:*

$$\deg(v) = \begin{cases} p^k - 1 & , v \in V_1, \\ p & , v \in V_2, \end{cases}$$

dengan:

$$V_1 = \{0, p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\},$$
$$V_2 = \{0, 1, 2, 3, \cdots, p^k - 1\} \setminus V_1.$$

Bukti. Dari pembuktian Teorema 3.1, dikonstruksi dua himpunan simpul yaitu $V_1 = \{0, p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\}$ dan $V_2 = \{0, 1, 2, 3, \cdots, p^k - 1\} \setminus V_1$. Karena himpunan V_1 membentuk graf lengkap dengan $|V_1| = p$ maka $\deg_1(v_1) = p-1$ untuk setiap $v_1 \in V_1$. Selanjutnya, karena v_1 juga bertetangga dengan sebarang $v_2 \in V_2$ maka $\deg_2(v_1) = p^k - p$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa $\deg(v_1) = \deg_1(v_1) + \deg_2(v_1) = p^k - 1$.

Perhatikan bahwa sebarang simpul $v_2 \in V_2$ hanya bertetangga dengan semua simpul di V_1 dan $|V_1| = p$ maka $\deg(v_2) = p$. Jadi terbukti bahwa $\deg(v) = p^k - 1$ untuk $v \in V_1$ dan $\deg(v) = p$ untuk $v \in V_2$. □

Selanjutnya dari Contoh 2.2 juga terlihat bahwa ada dua jenis jarak antar dua simpul u dan v, yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Jarak jenis pertama bernilai 2, $d(u, v) = 2$, sementara jarak jenis kedua bernilai 1, $d(u, v) = 1$ dengan $v \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ dan $n = p^k$. Hal ini dituangkan pada teorema berikut.

Teorema 3.3. *Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka jarak antar dua simpul dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ terdiri dari dua nilai, yaitu:*

$$d(u,v) = \begin{cases} 1 & , u \in V_1, v \in V, \\ 2 & , u, v \in V_2, \end{cases}$$

dengan:

$$\begin{aligned} V &= \{0, 1, 2, \cdots, p^k - 1\}, \\ V_1 &= \{0, p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\}, \\ V_2 &= V \setminus V_1. \end{aligned}$$

Bukti. Dari pembuktian Teorema 3 didapat bahwa $\deg(u) = p^k - 1$ untuk sebarang $u \in V_1$, artinya bahwa simpul u bertetangga dengan sebarang $v \in V$ untuk $u \neq v$. Hal ini berarti bahwa $d(u,v) = 1$. Selanjutnya karena u dan v tidak bertetangga untuk $u, v \in V_2$ dan $u \neq v$ maka $d(u,v) = 2$. Jadi, terbukti bahwa:

$$d(u,v) = \begin{cases} 1 & , u \in V_1, v \in V, \\ 2 & , u, v \in V_2. \end{cases}$$ □

3.2. *Index Wiener dan Hyper-Wiener*

Pada bagian ini akan dibahas rumus umum dari indeks Wiener dan Hyper-Wiener beserta hubungan kedua indeks tersebut. Rumus umum untuk indeks Wiener dituangkan pada teorema berikut.

Teorema 3.4. *Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Wiener dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah:*

$$W\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = p^{2k} - (p+1)\left(p^k - \frac{1}{2}p\right).$$

Bukti. Diketahui graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ di mana $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat. Berdasarkan Teorema 3.1 sebelumnya, maka $V\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right)$ dipartisi menjadi $V_1 = \{0, p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \cdots, (p-1)p^{k-1}\}$ dan $V_2 = V\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) \setminus V_1$. Pada pembuktian ini juga akan memanfaatkan jumlahan barisan artimetika, yaitu $S_p = \frac{p}{2}(2a + (p-1)b$ dengan a dan b berturut-turut adalah suku pertama dan beda antar suku. Perhatikan:

(a) Jarak $u_1, v_1 \in V_1$.
Berdasarkan Teorema 3.1 didapat bahwa graf yang terbentuk dari himpunan V_1 adalah graf lengkap K_p. Selanjutnya berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh $d(u_1, v_1) = 1$. Lebih jauh, banyaknya lintasan terpendek yang terbentuk dari

dua simpul berbeda, yaitu (u_1, v_1), sejumlah $C(p, 2)$. Oleh karena itu, diperoleh:

$$\begin{aligned}\sum_{\{u_1,v_1\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_1, v_1) &= 1 \cdot C(p, 2),\\ &= \frac{p!}{(p-2)! \cdot 2!},\\ &= \frac{1}{2}(p(p-1)),\\ \sum_{\{u_1,v_1\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_1, v_1) &= \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p.\end{aligned}$$

(b) Jarak $u_1 \in V_1$ ke $v_2 \in V_2$.
Berdasarkan Teorema 3.3 didapat bahwa $d(u_1, v_2) = 1$. Jumlah sisi yang menghubungkan simpul-simpul di V_1 ke V_2 sama dengan jumahh p suku pertama dari suatu deret aritmetika, yaitu S_p, dikalikan dengan banyaknya simpul V_2 yang terletak di antara dua simpul di V_1 yaitu $p^{k-1} - 1$. Dengan demikian, terdapat sebanyak $(p^{k-1} - 1)S_p$ sisi yang menghubungkan simpul-simpul di V_1 dan simpul-simpul di V_2. Oleh karena itu, diperoleh:

$$\begin{aligned}\sum_{\{u_1,v_2\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_1, v_2) &= 1 \cdot (p^{k-1} - 1)S_p,\\ &= (p^{k-1} - 1)\left(\frac{p}{2}(2 \cdot 1 + (p-1)\cdot)\right)\\ &= \frac{1}{2}(p^{k-1} - 1)(p^2 + p),\\ \sum_{\{u_1,v_2\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_1, v_1) &= \frac{1}{2}p^{k+1} + \frac{1}{2}p^k - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p.\end{aligned}$$

(c) Jarak $u_2 \in V_2$ ke $v_1 \in V_1$.
Dengan alasan yang sama dengan poin b., maka $d(u_2, v_1) = 1$. Jumlah sisi yang menghubungkan simpul-simpul di V_2 ke V_1 sama dengan jumlah $p - 1$ suku pertama dari suatu deret aritmetika, yaitu S_{p-1}, dikalikan dengan banyaknya simpul V_2 yang terletak di antara dua simpul di V_1 yaitu $p^{k-1} - 1$. Dengan demikian, terdapat sebanyak $(p^{k-1} - 1)S_{p-1}$ sisi yang menghubungkan simpul-simpul di V_2 dan simpul-simpul di V_1. Oleh karena itu, diperoleh:

$$\begin{aligned}\sum_{\{u_2,v_1\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_2, v_1) &= 1 \cdot (p^{k-1} - 1)S_{p-1},\\ &= (p^{k-1} - 1)\left(\frac{p-1}{2}(2 \cdot 1 + ((p-1)-1)\cdot 1\cdot)\right),\\ &= \frac{1}{2}(p^{k-1} - 1)(p-1)p,\\ \sum_{\{u_2,v_1\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_1, v_1) &= \frac{1}{2}p^{k+1} - \frac{1}{2}p^k - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p.\end{aligned}$$

(d) Jarak V_2, $u_2 \neq v_2 \in V_2$.
Berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh $d(u_2, v_2) = 2$. Lebih jauh, banyaknya lintasan terpendek yang terbentuk dari u_2 dan v_2 sama dengan jumlah $p^k - p - 1$

(jumlah simpul di V_2) suku pertama, yaitu S_{p^k-p-1}. Oleh karena itu, diperoleh:

$$\begin{aligned}\sum_{\{u_2,v_2\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_2,v_2) &= 2\cdot S_{p^k-p-1},\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}(p^k-p-1)\left(2\cdot 1+\left((p^k-p-1)-1\right)\cdot 1\right),\\ &= (p^k-p-1)(p^k-p),\\ \sum_{\{u_2,v_2\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_2,v_2) &= p^{2k}-2p^{k+1}-p^k+p^2+p.\end{aligned}$$

Dengan menjumlah bagian (a), (b), (c), dan (d) diperoleh

$$W\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = p^{2k}-(p+1)\left(p^k-\frac{1}{2}p\right). \qquad \square$$

Selanjutnya diberikan rumus umum untuk indeks Hyper-Wiener pada teorema berikut.

Teorema 3.5. *Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup $\mathbb{Z}_n$. Jika $n=p^k$ dengan p prima dan $k\geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Wiener dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah*

$$WW\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \frac{1}{2}\left(3p^{2k}-p^k(4p+3)+2p(p+1)\right).$$

Bukti. Dengan asumsi yang sama di pembuktian Teorema 3.4, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}WW\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\{u_1,v_1\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_1,v_1)+d^2(u_1,v_1)+\sum_{\{u_1,v_2\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_1,v_2)+d^2(u_1,v_2)\right.\\ &\quad\left.+\sum_{\{u_2,v_1\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_2,v_1)+d^2(u_2,v_1)+\sum_{\{u_2,v_2\}\subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} d(u_2,v_2)+d^2(u_2,v_2)\right),\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p\right)+\left(\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p\right)^2+\left(\frac{1}{2}p^{k+1}+\frac{1}{2}p^k-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p\right)\right.\\ &\quad+\left(\frac{1}{2}p^{k+1}+\frac{1}{2}p^k-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p\right)^2+\left(\frac{1}{2}p^{k+1}-\frac{1}{2}p^k-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p\right),\\ &\quad+\left(\frac{1}{2}p^{k+1}-\frac{1}{2}p^k-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p\right)^2+\left(p^{2k}-2p^{k+1}-p^k+p^2+p\right),\\ &\quad\left.+\left(p^{2k}-2p^{k+1}-p^k+p^2+p\right)^2\right),\\ &= \frac{1}{2}\left(3p^{2k}-p^k(4p+3)+2p(p+1)\right).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa indeks Hyper-Wiener dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah

$$WW\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \frac{1}{2}\left(3p^{2k}-p^k(4p+3)+2p(p+1)\right).$$

□

Selanjutnya akan dikaji hubungan antara Indeks Wiener dan Hyper-Wiener sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
WW\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) &= \frac{1}{2}\left(3p^{2k} - p^k(4p+3) + 2p(p+1)\right), \\
&= \frac{3}{2}p^{2k} - 2p^{k+1} - \frac{3}{2}p^k + p^2 + p, \\
&= 2p^{2k} - 2p^{k+1} - 2p^k + p^2 + p - \frac{1}{2}p^{2k} + \frac{1}{2}p^k, \\
&= 2(p^{2k} - p^{k+1} - \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^2 + p) - \frac{1}{2}p^{2k} + \frac{1}{2}p^k, \\
&= 2 \cdot W\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) - \frac{1}{2}p^{2k} + \frac{1}{2}p^k, \\
&= 2 \cdot W\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) - \frac{1}{2}p^k(p^k - 1), \\
WW\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) &< 2 \cdot W\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right).
\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari indeks Hyper-Wiener kurang dari 2 kali indeks Wiener.

4. Kesimpulan

Dari paparan di atas, diperoleh subgraf dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ dari grup bilangan bulat $\mathbb{Z}_n$ untuk $n = p^k$ di mana p adalah prima dan $k \geq 2$ adalah subgraf lengkap K_p dan bipartit K_{p,p^k-p}. Selain itu, terdapat rumus umum dari indeks Wiener dan Hyper-Wiener dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ berturut turut adalah $W\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = p^{2k} - p^{k+1} - \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^2 + p$ dan $WW\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \frac{1}{2}\left(3p^{2k} - p^k(4p+3) + 2p(p+1)\right)$. Lebih jauh pada graf koprima prima, diperoleh bahwa indeks Hyper-Wiener kurang dari dua kali indeks Wiener, $WW\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) < 2 \cdot W\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right)$.

Daftar Pustaka

[1] Bello, M., Muhainiah, N., Ali, M., dan Zulkifli, N. A., 2020), The Wiener And Zagreb Indices Of The The Wiener And Zagreb Indices, *Journal of Critical Reviews*, 7(16), 896—901. http://sersc.org/journals/index.php/IJAST/article/view/24274

[2] Ma, X., Wei, H., dan Yang, L., 2014, The coprime graph of a group, *International Journal of Group Theory*, 3(2), 13—23. https://doi.org/10.22108/ijgt.2014.4363

[3] Zainun Yatin, B., Gayatri, M. R., Wardhana, I. G. A. W., dan Prayanti, B. D., 2023, Indeks Hyper-Wiener Dan Indeks Padmakar-Ivan Dari Graf Koprima Dari Grup Dihedral, *Jurnal Riset Dan Aplikasi Matematika*, 07(02), 138—147, https://doi.org/10.26740/jram.v7n2.p138-147

[4] Abdurahim, A., Awanis, Z. Y., Syechah, B. N., dan Syaharuddin, S., 2024, The Topological Indices of Coprime Graph for Integer Module Group, *Jurnal Diferensial*, 6(2), 141—147, https://doi.org/10.35508/jd.v6i2.14816

[5] Gayatri, M. R., Fadhilah, R., Lestari, S. T., Pratiwi, L. F., Abdurahim, A., dan Wardhana, I. G. A. W., 2023, Topology Index of the Coprime Graph for Dihedral

Group of Prime Power Order, *Jurnal Diferensial*, 5(2), 126-–134, https://doi.org/10.35508/jd.v5i2.12462

[6] Asmarani, E. Y., Lestari, S. T., Purnamasari, D., Syarifudin, A. G., Salwa, S., dan Wardhana, I. G. A. W., 2023, The First Zagreb Index, The Wiener Index, and The Gutman Index of The Power of Dihedral Group. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi*, 7(4), 513-–520, http://dx.doi.org/10.18860/ca.v7i4.16991

[7] Ghorbani, M., Darafsheh, M. R., dan Yousefzadeh, P., 2021, On the Prime Graph of a Finite Group, *Miskolc Mathematical Notes*, 22(1), 201-–210, https://doi.org/10.18514/MMN.2021.1668

[8] Adhikari, A., dan Banerjee, S., 2022, Prime coprime graph of a finite group, *Journal of Mathematics*, 52(2), 41-–59. https://doi.org/10.30755/NSJOM.11151

[9] Cohen, N., Dimitrov, D., Krakovski, R., Skrekovski, R., dan Vukašinović, V., 2010, On Wiener index of graphs and their line graphs, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 64(3), 683—698. https://hal.science/hal-00531288

[10] Feng, L., Liu, W., Yu, G., dan Li, S., 2014, The hyper-Wiener index of graphs with given bipartition, *Utilitas Mathematica*, 95(December 2015), 23—32. https://utilitasmathematica.com/index.php/Index/article/view/1014