

## ANALISIS KESTABILAN MODEL DINAMIKA PERCERAIAN *MVQEDR*

SUSILA BAHRI\*, MIYA QARLINA HUTAGALUNG, EFENDI, MUHAFFAN

*Departemen Matematika dan Sains Data,  
FMIPA Universitas Andalas,  
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163  
email : susilabahri@sci.unand.ac.id, 2010431012\_miya@student.unand.ac.id,  
efendi@sci.unand.ac.id, muhafzan@sci.unand.ac.id*

Diterima 6 September 2024    Direvisi 5 Oktober 2024    Dipublikasikan 31 Oktober 2024

**Abstrak.** Tingkat perceraian di Indonesia terus meningkat. Oleh karena itu, perlu diketahui seberapa besar pengaruh program penyuluhan terhadap tiga kelompok rumah tangga yang merupakan penyumbang terbesar peningkatan tersebut. Penelitian yang bertujuan untuk menganalisis dinamika perceraian akibat masalah ekonomi, pertengkaran terus menerus, dan kekerasan dalam rumah tangga ini, dilakukan dengan mengkonstruksi model *MVQEDR*. Analisis kestabilan titik ekuilibrium sebagai solusi dari model, dilakukan dengan menentukan nilai eigen dan matriks Jacobian. Titik ekuilibrium bebas perceraian diperoleh stabil asimtotik jika  $R_0 = 0,003111368984 < 1$  sedangkan titik ekuilibrium endemik perceraian tidak stabi asimtotik jika  $R_0 = 1,065035325 > 1$ . Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan perangkat lunak MAPLE.

**Kata Kunci:** Bilangan Reproduksi Dasar, Model Matematika, Perceraian, Simulasi Numerik, Titik Ekuilibrium

**Abstract.** The divorce rate in Indonesia continues to increase. Therefore, it is necessary to know how much influence the extension program has on the three household groups that are the biggest contributors to the increase. This research, which aims to analyze the dynamics of divorce due to economic problems, continuous quarrels, and domestic violence, is carried out by constructing the *MVQEDR* model. Analysis of the stability of the equilibrium point as a solution to the model is carried out by determining the eigenvalues and Jacobian matrix. The divorce-free equilibrium point is asymptotically stable if  $R_0 = 0,003111368984 < 1$  while the divorce endemic equilibrium point is not asymptotically stable if  $R_0 = 1,065035325 > 1$ . Numerical simulations were carried out using MAPLE software.

**Keywords:** Base Reproduction Number, Mathematical Model, Divorce, Numerical Simulation, Equilibrium Point

\*penulis korespondensi

## 1. Pendahuluan

Peningkatan perceraian atau putusnya perkawinan antara dua orang [1] di Indonesia didominasi oleh tiga faktor yaitu masalah ekonomi, pertengkaran terus menerus, dan Kekerasan Dalam Rumah Tangga (KDRT) [2]. Dengan kata lain, kelompok rumah tangga dengan ketiga faktor tersebut dapat dianggap sebagai penyumbang terbesar terhadap peningkatan perceraian yang terjadi di negara ini.

Banyak usaha atau program yang telah dilakukan pemerintah demi menekan angka perceraian, antara lain membatasi perkawinan dini, kampanye tentang pentingnya keharmonisan rumah tangga, dan kewajiban mengikuti sesi konseling (*counseling*) saat proses perceraian. Bagaimanapun juga di antara usaha tersebut, konseling menjadi hal yang sangat penting dan menentukan karena konseling berhubungan dengan usaha penanganan atau penyelesaian langsung terhadap masalah rumah tangga pada saat proses perceraian [3]. Meskipun demikian, usaha konseling yang telah dilaksanakan pemerintah terlihat belum dapat menekan angka perceraian. Karenanya, perlu dikaji seberapa besar pengaruh konseling dan intensitas konseling yang telah dilakukan pemerintah selama ini, khususnya terhadap tiga kelompok rumah tangga penyumbang terbesar kasus perceraian tersebut. Hal ini penting diketahui agar konseling dapat menjadi program yang lebih efektif dalam mencegah perceraian sehingga jumlah kasus perceraian dapat diminimumkan. Pada penelitian ini juga dikaji, seberapa besar pengaruh individu rumah tangga yang tidak melakukan konseling terhadap peningkatan jumlah kasus perceraian di Indonesia.

Penelitian tentang perceraian yang menganalogikan perceraian sebagai penyakit menular telah dilakukan oleh beberapa peneliti. Gambrah dkk. [4] menguji pengaruh konseling terhadap kesehatan kelompok individu yang mengalami perceraian. Penelitiannya menunjukkan bahwa konseling dapat meningkatkan kesehatan sub-populasi penderita perceraian. Gweryina dkk. [1] mengkonstruksi model epidemi perceraian dengan menggunakan fungsi insidensi standar. Hasil numerik menyatakan bahwa mediasi dan rekonsiliasi dapat menstabilkan perkawinan. Tessema dkk. [5] mendapatkan penularan perceraian disebarkan oleh perempuan atau laki-laki yang bercerai setelah menikah. Peneliti berhasil menentukan nilai parameter penularan perceraian di Etiopia. Berbeda dengan yang dilakukan para peneliti tersebut, pada tulisan ini dikonstruksi model *MVQEDR* yang digunakan untuk menganalisis peningkatan dan dinamika perceraian yang disebabkan oleh ketiga faktor utama penyebab perceraian itu.

## 2. Metode

Pertama, model matematika dinamika perceraian *MVQEDR* dibangun dengan mengelompokkan populasi ke dalam enam kompartemen, yaitu **M** adalah kelompok individu yang sudah menikah, **V** adalah kelompok individu yang mengalami KDRT, **Q** adalah kelompok individu yang mengalami perselisihan dan pertengkaran terus-menerus, **E** adalah kelompok individu yang mengalami masalah ekonomi rumah tangga, **D** adalah kelompok individu yang bercerai, dan **R** adalah kelompok individu yang sembuh/sadar.

Parameter yang digunakan pada model beserta maknanya dinyatakan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Parameter-parameter Model *MVQEDR*

| Parameter  | Deskripsi                                                                                                                                  |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\pi$      | Laju kelahiran alami                                                                                                                       |
| $\alpha$   | Laju kematian alami                                                                                                                        |
| $\beta$    | Laju individu menikah kontak dengan individu bercerai dan berpindah ke kelompok yang mengalami KDRT                                        |
| $\gamma$   | Laju individu menikah kontak dengan individu bercerai dan berpindah ke kelompok yang mengalami perselisihan dan pertengkaran terus-menerus |
| $\delta$   | Laju individu menikah kontak dengan individu bercerai dan berpindah ke kelompok yang mengalami masalah ekonomi rumah tangga                |
| $C$        | Laju individu yang melakukan konseling                                                                                                     |
| $\epsilon$ | Laju perpindahan individu yang mengalami KDRT ke kelompok sembuh/sadar                                                                     |
| $\zeta$    | Laju perpindahan individu yang mengalami KDRT ke kelompok bercerai                                                                         |
| $\theta$   | Laju perpindahan individu yang mengalami perselisihan dan pertengkaran terus-menerus ke kelompok sembuh/sadar                              |
| $\sigma$   | Laju perpindahan individu yang mengalami perselisihan dan pertengkaran terus-menerus ke kelompok bercerai                                  |
| $\rho$     | Laju perpindahan individu yang mengalami masalah ekonomi rumah tangga ke kelompok sembuh/sadar                                             |
| $\psi$     | Laju perpindahan individu yang mengalami masalah ekonomi rumah tangga ke kelompok bercerai                                                 |
| $\omega$   | Laju perpindahan individu sembuh/sadar ke kelompok menikah                                                                                 |

Hubungan antar kompartemen digambarkan pada Gambar 1. Titik ekuilibrium bebas perceraian ditentukan dengan membuat subpopulasi bercerai sama dengan nol ( $D = 0$ ). Titik ekuilibrium endemik diperoleh dengan mengasumsikan bahwa subpopulasi bercerai ( $D > 0$ ). Kemudian untuk menentukan bilangan reproduksi dasar digunakan metode *Next Generation Matrix* [6]. Selanjutnya, jenis kestabilan dari kedua titik ekuilibrium ditentukan dengan menggunakan nilai eigen dan matriks Jacobian [7]. Pada tahap akhir, dilakukan simulasi numerik yang menggambarkan dinamika masing-masing populasi dengan menggunakan *software* MAPLE.

### 3. Hasil dan Pembahasan

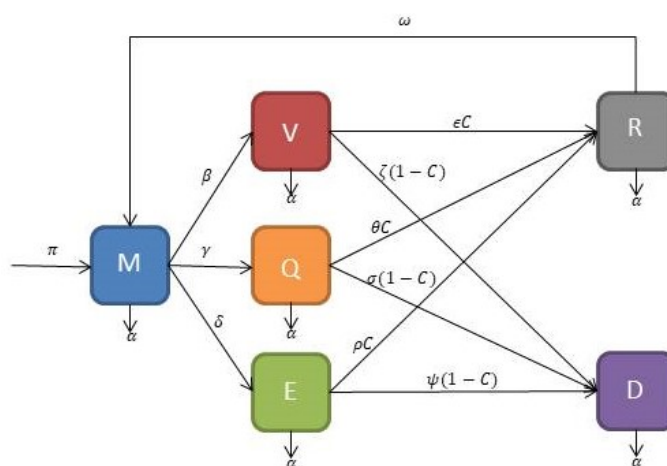
#### 3.1. Model Matematika

Populasi model dibagi menjadi enam kategori:

- (1) Individu menikah (*Susceptible*), dilambangkan dengan  $M$ .
- (2) Individu yang mengalami kekerasan dalam rumah tangga (*Exposed*), dilambangkan dengan  $V$ .
- (3) Individu yang mengalami perselisihan terus-menerus (*Exposed*), dilambangkan dengan  $Q$ .
- (4) Individu yang mengalami masalah ekonomi rumah tangga (*Exposed*), dilambangkan dengan  $E$ .
- (5) Individu bercerai (*Infected*), dilambangkan dengan  $D$ .
- (6) Individu sembuh/sadar (*Recovered*), dilambangkan dengan  $R$ .

Individu dari kelompok rentan dapat berpindah ke kelas terpapar jika mereka berinteraksi dengan kelas terinfeksi. Selanjutnya, kelas terpapar dapat berpindah ke kelas terinfeksi jika mereka tidak mengikuti konseling. Kelas terpapar dapat pindah ke kelas sembuh/sadar jika mereka melakukan konseling. Kelas sembuh/sadar dapat berpindah ke kelas rentan jika mereka kembali ke pernikahan mereka. Populasi dilambangkan dengan  $N$ .

Berdasarkan kasus tersebut, diagram model matematika perceraian diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Model MVQEDR

Diagram pada Gambar 1 dapat dikonstruksi ke dalam sistem persamaan diferensial nonlinier berikut ini:

$$\begin{aligned}
 \frac{dM}{dt} &= \pi + \omega R - M(\alpha + \beta D + \gamma D + \delta D), \\
 \frac{dV}{dt} &= \beta M D - V(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C)), \\
 \frac{dQ}{dt} &= \gamma M D - Q(\alpha + \theta C + \sigma(1-C)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \delta MD - E(\alpha + \rho C + \psi(1 - C)), \\
\frac{dD}{dt} &= \zeta(1 - C)V + \sigma(1 - C)Q + \psi(1 - C)E - \alpha D, \\
\frac{dR}{dt} &= \epsilon CV + \theta CQ + \rho CE - R(\alpha + \omega).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan kondisi awal pada  $t = 0$  adalah:  $M(0) \geq 0$ ,  $V(0) \geq 0$ ,  $Q(0) \geq 0$ ,  $E(0) \geq 0$ ,  $D(0) \geq 0$ ,  $R(0) \geq 0$ . Persamaan (3.1) menyatakan perubahan tiap kompartemen atau kelompok rumah tangga yang sekaligus juga merupakan faktor-faktor penyebab perceraian. Dalam hal ini, parameter-parameter  $\pi, \alpha, \beta, \gamma, \delta, C, \epsilon, \zeta, \theta, \sigma, \rho, \psi, \omega$  adalah konstanta positif. Nilai dari masing-masing parameter dapat dilihat pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Nilai Parameter Subpopulasi Perceraian Tahun 2019-2023

| Parameter  | Nilai    | Referensi | Parameter | Nilai    | Referensi |
|------------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| $\alpha$   | 0,00166  | [2]       | $\theta$  | 0,1      | Asumsi    |
| $\pi$      | 0,0033   | [2]       | $\rho$    | 0,1      | Asumsi    |
| $\beta$    | 0,000592 | [2]       | $\zeta$   | 0,000001 | Asumsi    |
| $\gamma$   | 0,0278   | [2]       | $\sigma$  | 0,000001 | Asumsi    |
| $\delta$   | 0,01194  | [2]       | $\psi$    | 0,000001 | Asumsi    |
| $C$        | 0,12     | Asumsi    | $\omega$  | 0,2      | Asumsi    |
| $\epsilon$ | 0,1      | Asumsi    |           |          |           |

### 3.2. Analisis Model

#### 3.2.1. Titik Ekuilibrium

Titik-titik ekuilibrium dari sistem (3.1) dapat diperoleh dengan mengatur setiap persamaan menjadi nol [8] [9]:

$$\begin{aligned}
0 &= \pi + \omega R - M(\alpha + \beta D + \gamma D + \delta D), \\
0 &= \beta MD - V(\alpha + \epsilon C + \zeta(1 - C)), \\
0 &= \gamma MD - Q(\alpha + \theta C + \sigma(1 - C)), \\
0 &= \delta MD - E(\alpha + \rho C + \psi(1 - C)), \\
0 &= \zeta(1 - C)V + \sigma(1 - C)Q + \psi(1 - C)E - \alpha D, \\
0 &= \epsilon CV + \theta CQ + \rho CE - R(\alpha + \omega).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas perceraian dan titik ekuilibrium endemik perceraian untuk sistem (3.2) adalah:

#### (1) Titik Ekuilibrium Bebas Perceraian

Titik ekuilibrium ini diperoleh dengan mengasumsikan  $D = 0$  sehingga  $E_T^0 = (M^0, V^0, Q^0, E^0, D^0, R^0) = (\frac{\pi}{\alpha}, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

(2) Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik yang mengasumsikan adanya kasus perceraian  $D > 0$  adalah  $E_T^* = (M^*, V^*, Q^*, E^*, D^*, R^*)$  dengan:

$$\begin{aligned} M^* &= \frac{a}{b}, \\ V^* &= k_1 \left( \frac{\left( \frac{\pi}{\alpha} - \frac{a}{b} \right)}{1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4} \right), \\ Q^* &= k_2 \left( \frac{\left( \frac{\pi}{\alpha} - \frac{a}{b} \right)}{1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4} \right), \\ E^* &= k_3 \left( \frac{\left( \frac{\pi}{\alpha} - \frac{a}{b} \right)}{1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4} \right), \\ D^* &= \frac{\left( \frac{\pi}{\alpha} - \frac{a}{b} \right)}{1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4}, \\ R^* &= k_4 \left( \frac{\left( \frac{\pi}{\alpha} - \frac{a}{b} \right)}{1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4} \right), \text{ dimana} \\ a &= \alpha, \\ b &= \frac{\zeta(1-C)\beta}{\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C)} + \frac{\sigma(1-C)\gamma}{\alpha + \theta C + \sigma(1-C)} + \frac{\psi(1-C)\delta}{\alpha + \rho C + \psi(1-C)}, \\ k_1 &= \frac{a\beta}{b(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C))}, \\ k_2 &= \frac{a\gamma}{b(\alpha + \theta C + \sigma(1-C))}, \\ k_3 &= \frac{a\delta}{b(\alpha + \rho C + \psi(1-C))}, \\ k_4 &= \frac{1}{\alpha + \omega} \left( \frac{a\epsilon C\beta}{b(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C))} + \frac{a\theta C\gamma}{b(\alpha + \theta C + \sigma(1-C))} + \frac{a\rho C\delta}{b(\alpha + \rho C + \psi(1-C))} \right). \end{aligned}$$

3.2.2. Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Bilangan Reproduksi Dasar dapat ditentukan dengan mengaplikasikan metode *Next Generation Matrix* pada persamaan kompartemen terinfeksi berikut [10].

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \beta MD - V(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C)), \\ \frac{dQ}{dt} &= \gamma MD - Q(\alpha + \theta C + \sigma(1-C)), \\ \frac{dE}{dt} &= \delta MD - E(\alpha + \rho C + \psi(1-C)), \\ \frac{dD}{dt} &= \zeta(1-C)V + \sigma(1-C)Q + \psi(1-C)E - \alpha D. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Langkah pertama adalah menentukan matriks transmisi  $F$  dan matriks transisi  $V$ , dan radius spektral  $K = FV^{-1}$  sehingga diperoleh [12]:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\beta\pi}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\pi}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta\pi}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian,

$$V = \begin{bmatrix} \alpha + \epsilon C + \zeta(1-C) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \theta C + \sigma(1-C) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \rho C + \psi(1-C) & 0 \\ -\zeta(1-C) & -\sigma(1-C) & -\psi(1-C) & \alpha \end{bmatrix}.$$

Sehingga, *Next Generation Matrix*  $K = FV^{-1}$  adalah:

$$\begin{aligned} K &= FV^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\beta\pi}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\pi}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta\pi}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha + \theta C + \sigma(1-C)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\alpha + \rho C + \psi(1-C)} & 0 \\ \frac{\zeta(1-C)}{\alpha(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C))} & \frac{\sigma(1-C)}{\alpha(\alpha + \theta C + \sigma(1-C))} & \frac{\psi(1-C)}{\alpha(\alpha + \rho C + \psi(1-C))} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta\pi\zeta(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C))} & \frac{\beta\pi\sigma(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \theta C + \sigma(1-C))} & \frac{\beta\pi\psi(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \rho C + \psi(1-C))} & \frac{\beta\pi}{\alpha^2} \\ \frac{\gamma\pi\zeta(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C))} & \frac{\gamma\pi\sigma(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \theta C + \sigma(1-C))} & \frac{\gamma\pi\psi(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \rho C + \psi(1-C))} & \frac{\gamma\pi}{\alpha^2} \\ \frac{\delta\pi\zeta(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C))} & \frac{\delta\pi\sigma(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \theta C + \sigma(1-C))} & \frac{\delta\pi\psi(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \rho C + \psi(1-C))} & \frac{\delta\pi}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) adalah radius spektral atau nilai absolut maksimum dari nilai eigen *Next Generation Matrix*  $K$ , sedemikian rupa sehingga:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(K - \lambda I), \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\beta\pi\zeta(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C))} - \lambda & \frac{\beta\pi\sigma(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \theta C + \sigma(1-C))} & \frac{\beta\pi\psi(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \rho C + \psi(1-C))} & \frac{\beta\pi}{\alpha^2} \\ \frac{\gamma\pi\zeta(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C))} & \frac{\gamma\pi\sigma(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \theta C + \sigma(1-C))} - \lambda & \frac{\gamma\pi\psi(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \rho C + \psi(1-C))} & \frac{\gamma\pi}{\alpha^2} \\ \frac{\delta\pi\zeta(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \epsilon C + \zeta(1-C))} & \frac{\delta\pi\sigma(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \theta C + \sigma(1-C))} & \frac{\delta\pi\psi(1-C)}{\alpha^2(\alpha + \rho C + \psi(1-C))} - \lambda & \frac{\delta\pi}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tuliskan:

$$\lambda_1 = \frac{A + B + C + D}{E + F + G}, \text{ dan } \lambda_{2,3,4} = 0, \text{ dengan}$$

$$\begin{aligned}
 A &= C^3 (\zeta \beta (\psi \theta - \rho \theta) + \delta (\psi \theta - \psi \sigma) + \gamma (\rho \sigma - \psi \sigma) + \delta \epsilon (\psi \sigma - \psi \theta) + \epsilon \gamma (\psi \sigma - \rho \sigma)), \\
 B &= C^2 (\zeta \alpha (\beta (\sigma - \theta) + \delta \psi + \gamma \sigma) + \beta (3 \psi \sigma - 2 \psi \theta - 2 \rho \sigma + \rho \theta) + \delta (3 \psi \sigma - 2 \psi \theta) \\
 &\quad + \gamma (3 \psi \sigma - 2 \rho \sigma) - \alpha (\delta \epsilon (\psi - \sigma) + \epsilon \gamma \sigma - 2 \delta \psi \sigma + \gamma (\psi \sigma - \rho \sigma))), \\
 C &= C (-\zeta \alpha^2 \beta - 2 \zeta \alpha (\beta \psi + \delta \psi + \gamma \sigma) - 3 \zeta (\psi \sigma + \delta \psi + \gamma \psi \sigma) + \alpha (\delta \epsilon \psi - \epsilon (\psi \sigma - \rho \sigma))), \\
 D &= \zeta (\alpha^2 \beta + \alpha (\beta \psi + \sigma) + \delta \psi + \gamma \sigma) + \alpha (\delta \psi \sigma + \gamma \psi \sigma), \\
 E &= C^3 (\zeta (\psi \theta - \psi \sigma) + \epsilon (\psi \sigma - \rho \sigma)) + C^2 (\zeta (\alpha (\sigma - \theta) + 3 \psi \sigma - 2 \psi \theta - 2 \rho \sigma + \rho \theta) \\
 &\quad - \alpha (\epsilon (\sigma - \theta) + 2 \psi \sigma - \psi \theta - \rho \sigma)), \\
 F &= C (-\zeta \alpha^2 - 2 \zeta (\alpha \psi + \beta \sigma) - 3 (\psi \sigma + \delta \psi \sigma + \gamma \psi \sigma) + \alpha (\epsilon \psi - \psi \sigma + \rho \sigma)), \\
 G &= \zeta (\alpha^2 + \alpha (\psi + \sigma) + \psi \sigma) + \alpha (\psi \sigma + \sigma).
 \end{aligned}$$

Menurut [9] dan [10], nilai eigen terbesar dari matriks  $FV^{-1}$  adalah bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ), sehingga:

$$R_0 = \frac{A + B + C + D}{E + F + G}.$$

### 3.3. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

#### 3.3.1. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Perceraian

Titik ekuilibrium bebas perceraian dari model (3.1) stabil asimtotik jika nilai eigen matriks Jacobian negatif. Matriks Jacobian dari model (3.1) pada titik ekuilibrium bebas perceraian ( $J_{E^0}$ ) diberikan oleh:

$$J_{E^0} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_3 \\ 0 & g_4 & 0 & 0 & g_5 & 0 \\ 0 & 0 & g_6 & 0 & g_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_8 & g_9 & 0 \\ 0 & g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_1 & 0 \\ 0 & g_{13} & g_{14} & g_{15} & 0 & g_{16} \end{bmatrix}.$$

Formula elemen matriks Jacobian titik ekuilibrium bebas perceraian disajikan dalam Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Formula Elemen Matriks Jacobian Titik Ekuilibrium Bebas Perceraian

| Variabel | Formula                                        | Variabel | Formula                     |
|----------|------------------------------------------------|----------|-----------------------------|
| $g_1$    | $-\alpha$                                      | $g_9$    | $\frac{\delta \pi}{\alpha}$ |
| $g_2$    | $-\frac{\pi}{\alpha}(\beta + \gamma + \delta)$ | $g_{10}$ | $\zeta(1 - C)$              |
| $g_3$    | $\omega$                                       | $g_{11}$ | $\sigma(1 - C)$             |
| $g_4$    | $-(\alpha + \epsilon C + \zeta(1 - C))$        | $g_{12}$ | $\psi(1 - C)$               |
| $g_5$    | $\frac{\beta \pi}{\alpha}$                     | $g_{13}$ | $\epsilon C$                |
| $g_6$    | $-(\alpha + \theta C + \sigma(1 - C))$         | $g_{14}$ | $\theta C$                  |
| $g_7$    | $\frac{\gamma \pi}{\alpha}$                    | $g_{15}$ | $\rho C$                    |
| $g_8$    | $-(\alpha + \rho C + \psi(1 - C))$             | $g_{16}$ | $-(\alpha + \omega)$        |

Persamaan karakteristik dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $\det(J_{E_T^0} - \lambda I) = 0$  yaitu:

$$0 = \begin{vmatrix} g_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_3 \\ 0 & g_4 - \lambda & 0 & 0 & g_5 & 0 \\ 0 & 0 & g_6 - \lambda & 0 & g_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_8 - \lambda & g_9 & 0 \\ 0 & g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_1 - \lambda & 0 \\ 0 & g_{13} & g_{14} & g_{15} & 0 & g_{16} - \lambda \end{vmatrix},$$

sehingga persamaan karakteristik yang sesuai adalah:

$$0 = (g_1 - \lambda)(g_{16} - \lambda)(\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4), \quad (3.4)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= -(g_1 + g_4 + g_6 + g_8), \\ a_2 &= g_1g_4 + g_1g_6 + g_1g_8 - g_{10}g_5 - g_{11}g_7 - g_{12}g_9 + g_4g_6 + g_4g_8 + g_6g_8, \\ a_3 &= -g_1g_4g_6 - g_1g_4g_8 - g_1g_6g_8 + g_{10}g_5g_6 + g_{10}g_5g_8 + g_{11}g_4g_7 + g_{11}g_7g_8 \\ &\quad + g_{12}g_4g_9 + g_{12}g_6g_9 - g_4g_6g_8, \\ a_4 &= g_1g_4g_6g_8 - g_{10}g_5g_6g_8 - g_{11}g_4g_7g_8 - g_{12}g_4g_6g_9. \end{aligned}$$

Titik ekuilibrium dikatakan stabil asimtotik jika  $\lambda_i < 0$ . Dari persamaan (3.4), diperoleh dua nilai eigen, yaitu:  $\lambda_1 = g_1 = -\alpha < 0$  dan  $\lambda_2 = g_{16} = -(\alpha + \omega) < 0$ .

Dengan menggunakan kriteria RouthHurwitz, dapat dilihat bahwa bagian riil dari semua akar polinomial adalah negatif jika dan hanya jika  $a_1 > 0$ ,  $\frac{a_1a_2}{a_3} > 1$ ,  $\frac{a_3(a_1a_2 - a_3)}{a_1^2a_4} > 1$ , dan  $a_4 > 0$ .

### 3.3.2. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik Perceraian

Titik ekuilibrium endemik dari model (3.1) stabil asimtotik jika nilai eigen matriks Jacobian negatif. Matriks jacobian model (3.1) pada titik ekuilibrium endemik ( $J_{E^*}$ ) diberikan oleh:

$$J_{E^*} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & 0 & 0 & h_6 & 0 \\ h_7 & 0 & h_8 & 0 & h_9 & 0 \\ h_{10} & 0 & 0 & h_{11} & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} & 0 \\ 0 & h_{17} & h_{18} & h_{19} & 0 & h_{20} \end{bmatrix}.$$

Formula elemen matriks Jacobian titik ekuilibrium endemik perceraian disajikan dalam Tabel 4.

Persamaan karakteristik dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

Tabel 4. Formula Elemen Matriks Jacobian Titik Ekuilibrium Endemik Perceraian

| Variabel | Formula                                                                                     | Variabel | Formula                            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------|------------------------------------|
| $h_1$    | $-\alpha - \frac{(\beta+\gamma+\delta)(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{a}{b})}{1+k_1+k_2+k_3+k_4}$ | $h_{11}$ | $-(\alpha + \rho C + \psi(1 - C))$ |
| $h_2$    | $-\frac{a(\beta+\gamma+\delta)}{b}$                                                         | $h_{12}$ | $\frac{\delta a}{b}$               |
| $h_3$    | $\omega$                                                                                    | $h_{13}$ | $\zeta(1 - C)$                     |
| $h_4$    | $\frac{\beta(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{a}{b})}{1+k_1+k_2+k_3+k_4}$                           | $h_{14}$ | $\sigma(1 - C)$                    |
| $h_5$    | $-(\alpha + \epsilon C + \zeta(1 - C))$                                                     | $h_{15}$ | $\psi(1 - C)$                      |
| $h_6$    | $\frac{\beta a}{b}$                                                                         | $h_{16}$ | $-\alpha$                          |
| $h_7$    | $\frac{\gamma(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{a}{b})}{1+k_1+k_2+k_3+k_4}$                          | $h_{17}$ | $\epsilon C$                       |
| $h_8$    | $-(\alpha + \theta C + \sigma(1 - C))$                                                      | $h_{18}$ | $\theta C$                         |
| $h_9$    | $\frac{\gamma a}{b}$                                                                        | $h_{19}$ | $\rho C$                           |
| $h_{10}$ | $\frac{\delta(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{a}{b})}{1+k_1+k_2+k_3+k_4}$                          | $h_{20}$ | $-(\alpha + \omega)$               |

$\det(J_{E_T^*} - \lambda I) = 0$ , yaitu:

$$0 = \begin{vmatrix} h_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 - \lambda & 0 & 0 & h_6 & 0 \\ h_7 & 0 & h_8 - \lambda & 0 & h_9 & 0 \\ h_{10} & 0 & 0 & h_{11} - \lambda & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} - \lambda & 0 \\ 0 & h_{17} & h_{18} & h_{19} & 0 & h_{20} - \lambda \end{vmatrix}$$

sehingga persamaan karakteristik untuk kestabilan titik ekuilibrium ini adalah:

$$0 = \lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6, \quad (3.5)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= -h_1 - h_{16} - h_{20} - h_5 - h_{11} - h_8, \\ a_2 &= h_1(h_{11} + h_{16} + h_{20} + h_5 + h_8) + h_{11}(h_{16} + h_{20} + h_5 + h_8) - h_{12}h_{15} - h_{13}h_6 \\ &\quad - h_{14}h_9 + h_{16}(h_{20} + h_5 + h_8) + h_{20}(h_5 + h_8) + h_5h_8, \\ a_3 &= -h_1(h_{16}h_{20} + h_{16}h_5 + h_{11}h_{16} + h_{20}h_5 + h_{11}h_{20} + h_{11}h_5) - h_{10}h_{15}h_2 \\ &\quad - h_{16}(h_{20} + h_5)h_5 - h_{11}(h_{16}h_{20} + h_{16}h_5 + h_{20}h_5) + h_{12}(h_{15}h_{20} + h_{15}h_5 + h_1h_{15}) \\ &\quad - h_{10}h_{19}h_3 - h_1(h_{16} + h_{20} + h_5 + h_{11})h_8 + h_{13}(h_6h_8 + h_1h_6 + h_{20}h_6 + h_{11}h_6) \\ &\quad - h_{17}h_3h_4 - h_{13}h_2h_4, \\ a_4 &= h_{10}h_{16}h_{19}h_3 + h_{10}h_{19}h_3h_5 + h_1h_{16}(h_{20}h_5 + h_5h_8 + h_{11}h_{16}) + h_{13}(h_2h_{20}h_4 + h_{11}h_{13}h_2h_4) \\ &\quad + h_{11}(h_2h_{14}h_7 - h_{14}h_{20}h_9 - h_{14}h_5h_9) - h_{12}(h_{15}h_{20}h_8 + h_{15}h_5h_8) + \\ &\quad + h_{17}h_3h_4 - h_{11}h_{13}h_6 - h_{13}(h_{20} + h_6)h_6h_8 - h_{11}(h_{13}h_6h_8 + h_{20}h_{13}h_6) + h_{10}h_{19}h_3h_8 \\ &\quad + h_1h_{11}(h_{16}h_{20} + h_{16}h_5 + h_{20}h_5) + h_{10}h_{15}(h_2h_{20} + h_2h_5) - h_{12}(h_{15}h_{20} + h_{15}h_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 &= h_{12}h_{15}h_{18}h_3h_7 - h_{14}h_{17}h_3h_6h_7 - h_{16}h_{18}h_3(h_5 + h_7) - h_1h_{11}(h_{16}h_{20} + h_{16}h_5 + h_{20}h_5) \\
&\quad - h_{10}(h_{15}h_2h_{20}h_5 + h_{15}h_2h_{20}h_8) - h_{11}(h_{16}h_{20}h_5h_8 + h_{16}h_{20}h_8) + h_{12}(h_{15}h_{20}h_5 + h_{15}h_{20}h_8) \\
&\quad + h_{10}(h_{15}h_{18}h_3h_9 + h_{14}h_{19}h_3h_9) - h_{11}h_{16}h_{18}h_3h_7 - h_{12}(h_{13}h_{19}h_3h_4 + h_{13}h_{18}h_3h_4) \\
&\quad - h_1h_{11}h_{13}h_6h_8 - h_{13}h_{20}h_6h_8 + h_{11}(h_{13}h_{20}h_6h_8 + h_{13}h_6h_8) - h_{11}h_{16}h_{17}h_3h_4 \\
&\quad - h_{16}h_{17}h_3h_4h_8 - h_{11}h_{17}h_3h_4h_8, \\
a_6 &= -h_{12}h_{15}h_{18}h_3h_5h_7 + h_{10}h_{15}(h_2h_{20}h_5h_8 - h_{15}h_{17}h_3h_6) - h_1h_{12}h_{15}h_{20}h_5h_8 \\
&\quad + h_{10}h_{15}(h_2h_{20}h_5h_8 + h_{15}h_{17}h_3h_6) - h_{11}(h_{13}h_{20}h_6h_8 + h_{13}h_{18}h_3h_6h_7) \\
&\quad - h_{10}h_{15}(h_{17}h_3h_6 + h_{19}h_3h_5h_8) - h_{10}(h_{19}h_3h_8 - h_{16}h_{19}h_3h_8 + h_{11}h_{16}h_{20}h_5h_8).
\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan syarat dan jenis kestabilan dari sistem, maka digunakan kriteria RouthHurwitz.

$$\begin{aligned}
a_1 &> 0, \\
a_1a_2 - a_3 &> 0, \\
a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4 + a_1a_5 &> 0, \\
a_1^2(a_2a_6 - a_4^2) - a_1r + a_2a_3a_5 - a_3^2a_4 - a_5^2 &> 0, \\
-a_1^2s - a_1t + a_3u &> 0, \\
v(w + x + y) &> 0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

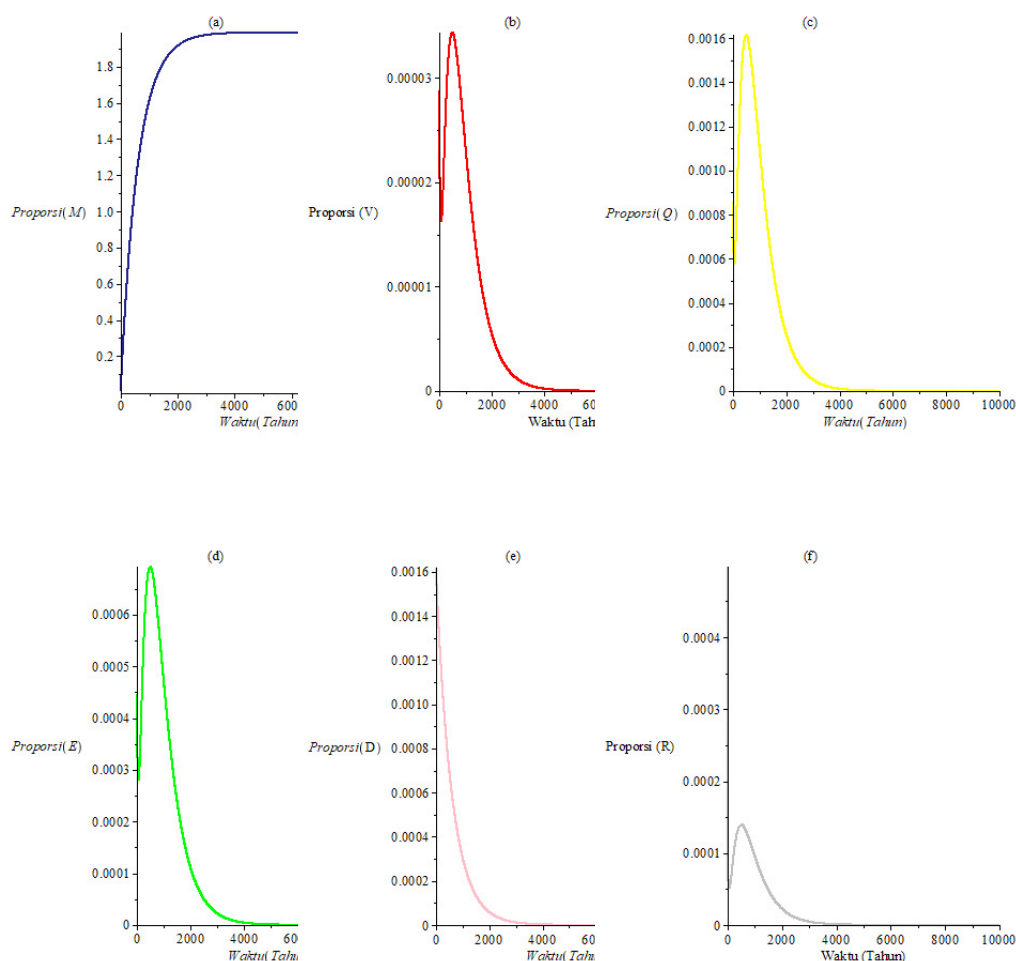
dengan

$$\begin{aligned}
r &= a_2^2a_5 - a_2a_3a_4 + a_3a_6 - 2a_4a_5, \\
s &= a_1a_6^2 - a_4^2a_5 - a_3a_4a_6 + 2a_2a_5a_6, \\
t &= a_2^2a_5^2 + a_2a_3^2a_6 - a_2a_3a_4a_5 + 3a_3a_5a_6 - 2a_4a_5^2, \\
u &= a_2a_5^2 + a_3^2a_6 - a_3a_4a_5 - a_5^2, \\
v &= a_6, \\
w &= -a_1^3a_6^2 + a_1^2(2a_2a_5a_6 + a_3a_4a_6 - a_4^2a_5), \\
x &= a_1a_2(-a_2a_5^2 + a_3a_4a_5 - a_3^2a_6) + a_1a_5(-3a_3a_6 + 2a_4a_5), \\
y &= a_2a_3a_5^2 + a_3^2(a_3a_6 - a_4a_5) - a_5^3.
\end{aligned}$$

### 3.4. Simulasi Numerik

Dengan menggunakan nilai untuk setiap parameter yang digunakan pada sistem (3.1). Dari nilai parameter pada Tabel 1, diperoleh  $R_0 = 0,003111368984 < 1$  dan titik ekuilibrium bebas perceraian  $E_T^0 = (1,987951807; 0; 0; 0; 0; 0)$ . Dalam simulasi titik ekuilibrium bebas perceraian, nilai awal digunakan  $M(0) = 0,0072594136$ ,  $V(0) = 0,000028809391$ ,  $Q(0) = 0,0008548875$ ,  $E(0) = 0,0004451261$ ,  $D(0) = 0,0016185539$ ,  $R(0) = 0,0004983096$ . Untuk menganalisis jenis kestabilan titik ekuilibrium bebas perceraian dari model (3.1), substitusi nilai setiap parameter pada Tabel 2 ke dalam persamaan (3.4) untuk mendapatkan  $\lambda_i < 0$  dengan  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Karena,  $-0,00166 < 0$ ,  $-0,20166 < 0$ ,  $0,04264264 > 0$ ,  $7,700091511 > 1$ ,  $10,55766496 > 1$ , dan  $4,218817709 \times 10^{-9} > 0$ , maka titik ekuilibrium tersebut stabil asimtotik ketika  $R_0 < 1$ . Berdasarkan nilai parameter

dan nilai awal itu, grafik untuk setiap subpopulasi terhadap waktu  $t$  diberikan pada Gambar 2 sebagai berikut.

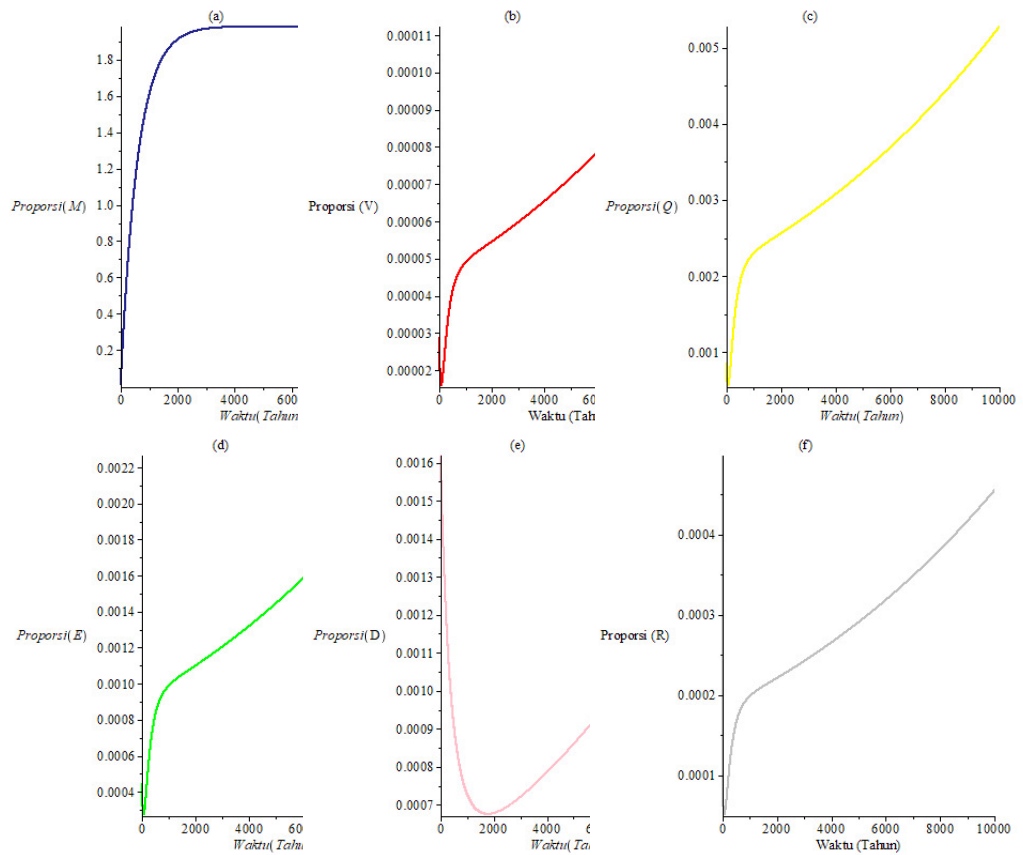


Gambar 2. (a) Grafik subpopulasi *Marriage*, (b) Grafik subpopulasi *Violence*, (c) Grafik subpopulasi *Quarrel*, (d) Grafik subpopulasi *Economy Problem*, (e) Grafik subpopulasi *Divorce*, (f) Grafik subpopulasi *Recovery*

Selanjutnya, disimulasikan pengaruh variasi  $\zeta$ ,  $\sigma$ , dan  $\psi$  dengan parameter lainnya tetap. Dengan mengambil  $\zeta = \sigma = \psi = 0,00035$ , diperoleh  $R_0 = 1,065035325 > 1$ . Karena  $R_0 > 1$  maka perceraian akan meningkat akibat pengaruh individu bercerai. Kemudian, diperoleh nilai titik ekuilibrium endemik  $E_T^* = (1,866559504; 0,001431122832; 0,06720475460; 0,02886420035; 0,01809037588; 0,005801849319)$ .

Untuk menganalisis jenis kestabilan titik ekuilibrium endemik dari model (3.1), agar  $\lambda_i < 0$  maka substitusi  $\zeta = \sigma = \psi = 0,00035$  ke persamaan (3.5) sedangkan parameter lainnya tetap sebagaimana pada Tabel 2 ke dalam persamaan (3.5).

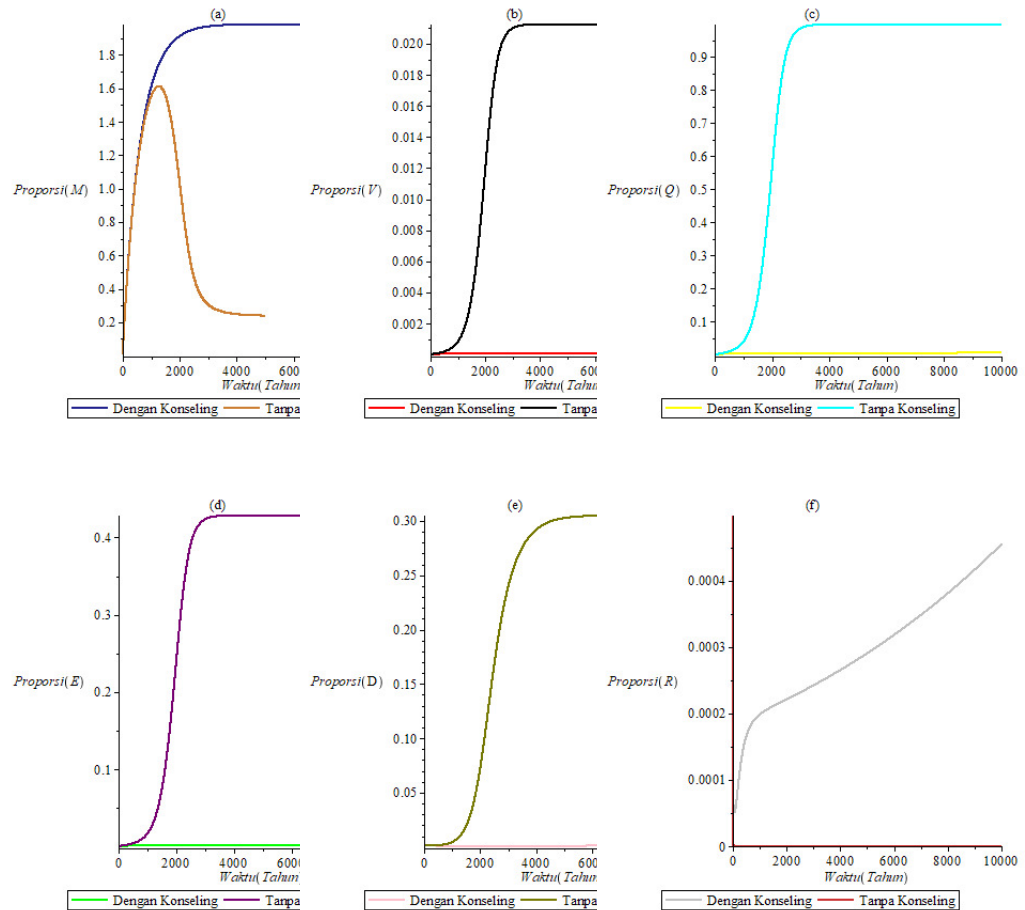
Karena,  $-1,672967372 \times 10^{-21} < 0$  dan  $-5,407273372 \times 10^{-32} < 0$  maka titik ekuilibrium endemik model (3.1)  $E_T^*$  tidak stabil asimtotik ketika  $R_0 > 1$ . Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal, grafik untuk setiap subpopulasi terhadap waktu  $t$  diperoleh pada Gambar 3 sebagai berikut.



Gambar 3. (a) Grafik subpopulasi *Marriage*, (b) Grafik subpopulasi *Violence*, (c) Grafik subpopulasi *Quarrel*, (d) Grafik subpopulasi *Economy Problem*, (e) Grafik subpopulasi *Divorce*, (f) Grafik subpopulasi *Recovery*

Kemudian akan dibandingkan grafik solusi dari model (3.1) dengan asumsi adanya konseling dan tanpa konseling. Jika diasumsikan tidak ada konseling maka pada model (3.1) nilai parameter  $C = 0$ . Sebaliknya jika diasumsikan ada konseling maka nilai parameter  $C \neq 0$ .

Dengan menggunakan nilai awal dan nilai parameter yang diasumsikan  $\zeta = \sigma = \psi = 0,00035$  dengan parameter lainnya tetap, maka pada Gambar 4 diperoleh perbandingan grafik solusi dari model (3.1) dengan asumsi adanya konseling dan tanpa konseling.



Gambar 4. Perbandingan (a) Grafik subpopulasi *Marriage*, (b) Grafik subpopulasi *Violence*, (c) Grafik subpopulasi *Quarrel*, (d) Grafik subpopulasi *Economy Problem*, (e) Grafik subpopulasi *Divorce*, (f) Grafik subpopulasi *Recovery* dengan asumsi ada konseling dan tanpa konseling

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan analisis kestabilan sistem dapat disimpulkan bahwa jika  $R_0 < 1$ , model (3.1) adalah stabil asimtotik pada titik ekuilibrium bebas perceraian ( $E_T^0$ ). Akibatnya, pengaruh individu bercerai terhadap peningkatan perceraian perlahan-lahan menurun dan akan menghilang dari populasi seiring berjalannya waktu. Namun, jika  $R_0 > 1$ , model (3.1) adalah tidak stabil asimtotik pada titik ekuilibrium endemik ada perceraian ( $E_T^*$ ). Akibatnya, pengaruh individu bercerai terhadap peningkatan perceraian tidak akan stabil dan mungkin tidak bertambah seiring berjalannya waktu.

Hasil simulasi numerik memperlihatkan bahwa adanya pengaruh konseling pada subpopulasi *Divorce*, dimana jumlah individu yang bercerai lebih banyak saat tidak melakukan konseling. Dengan kata lain pada dasarnya konseling memiliki pengaruh terhadap intensitas penurunan jumlah kasus perceraian.

## 5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih disampaikan kepada Universitas Andalas yang telah mendanai penelitian ini melalui kontrak Penelitian Skripsi Sarjana (PSS) dengan Nomor kontrak: 258/UN16.19/PT.01.03/PSS/2024.

## Daftar Pustaka

- [1] Gweryina, R. I., Kaduna, F. S., dan Kura, M. Y, 2021, Qualitative Analysis of A Mathematical Model of Divorce Epidemic with Anti-Divorce Therapy, *Engineering and Applied Science Letters*, Vol. **4**(2): 1 – 11
- [2] Badan Pusat Statistik (2024), "Statistik Indonesia 2024". Tersedia: <https://www.bps.go.id/id/publication/2024/02/28/c1bacde03256343b2bf769b0/statistik-indonesia-2024.html>. Diakses pada tanggal 23 Mei 2024
- [3] Purnamasari, I. A, 2019, Layanan Bimbingan Konseling Keluarga untuk Meminimalisasi Angka Perceraian, *Irsyad: Jurnal Bimbingan, Penyuluhan, Konseling, dan Psikoterapi Islam*, Vol. **7**(1): 41 – 60
- [4] Gambrah, P. P., Abdul-Rahaman, A. S., dan Adu, A, 2018, Mathematical Model for Minimizing Divorce Through Counseling, *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*, Vol. **3**(3): 218 – 225
- [5] Tessema, H., Haruna, I., Osman, S., dan Kassa, E, 2022, A Mathematical Model Analysis of Marriage Divorce, *Commun. Math. Biol. Neurosci*, Vol. **2022**: 1 – 20
- [6] O. Diekmann, J. Heesterbeek, dan M. G. Roberts, 2010, The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models, *Journal of The Royal Society Interface*, Vol. **7**: 873 – 885
- [7] E. Hendricks, O. Jannerup, dan P. H. Srensen, 2008, Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods, *Springer*
- [8] Lynch, S, 2007, *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*, Boston, Birkhuser
- [9] Bahri S., Pratama E.A., 2023, Pemodelan Dinamika Pejudi Muda. *MES: Journal of Mathematics Education and Science*, Vol. **9**(1): 45 – 56
- [10] Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., dan Metz, J. A. J, 1990, On the Definition and the Computation of the Basic Reproduction Ratio  $R_0$  in Models for Infectious Diseases in Heterogeneous Populations, *Journal of Mathematical Biology*, Vol. **28**: 365 – 382
- [11] Bahri, S., Ningsih, S. A., dan Narwen, N, 2023, Kestabilan Model Penularan Penyakit Malaria di Indonesia, *Delta-Pi: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, Vol. **12**(2): 90 – 99
- [12] Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., dan Roberts, M. G, 2010, The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models, *Journal of The Royal Society Interface*, Vol. **7**(47): 873 – 885