

DYNAMICS OF THE LESLIE-GOWER PREDATOR-PREY MODEL WITH THE BEDDINGTON-DEANGELIS RESPONSE FUNCTION, INCLUDING THE PRESENCE OF INFECTED PREY AND THE FEAR FACTOR OF SUSCEPTIBLE PREY TOWARD PREDATORS

MISWANTO *, WINDARTO, ERIDANI

*Departemen Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga.
email : miswanto@fst.unair.ac.id, windarto@fst.unair.ac.id, eridani@fst.unair.ac.id*

Diterima 12 September 2024 Direvisi 29 September 2024 Dipublikasikan 31 Oktober 2024

Abstrak. Artikel ini menganalisis kestabilan model predator-prey Leslie-Gower yang mencakup infeksi pada mangsa, ketakutan mangsa terhadap predator, dan respons fungsional Beddington-DeAngelis. Tujuan penelitian ini adalah untuk memahami pengaruh parameter infeksi dan respons fungsional terhadap kestabilan titik ekuilibrium. Metode yang digunakan meliputi analisis kestabilan dan simulasi numerik untuk memverifikasi hasil. Diperoleh enam titik ekuilibrium: kepunahan populasi (E_0), kepunahan mangsa terinfeksi dan predator (E_1), kepunahan mangsa yang stabil asimptotik bersyarat (E_2), kepunahan predator (E_3), kepunahan mangsa terinfeksi (E_4), dan koeksistensi (E_5). Hasil simulasi menunjukkan bahwa infeksi pada mangsa dan respons fungsional secara signifikan mempengaruhi kestabilan model, terutama pada titik ekuilibrium koeksistensi yang dipengaruhi oleh variasi parameter.

Kata Kunci: Beddington-DeAngelis, Faktor Ketakutan, Leslie-Gower, Simulasi Numerik, Analisis Kestabilan

Abstract. This article analyzes the stability of the Leslie-Gower predator-prey model extended to account for infection in the prey population, prey fear of predators, and the Beddington-DeAngelis functional response. The aim of this study is to identify the effects of infection parameters and functional response on the stability of equilibrium points. The methods used include analytical stability analysis and numerical simulations to support and visualize the results. Six equilibrium points are obtained: population extinction (E_0), extinction of infected prey and predator (E_1), extinction of prey (E_2) which is conditionally stable asymptotically, extinction of predator (E_3), extinction of infected prey (E_4), and coexistence (E_5). Numerical simulations show that infection in prey and the functional response significantly influence the model's stability, particularly the stability of the coexistence equilibrium point, which is affected by variations in the parameters.

*Penulis korespondensi

Keywords: Beddington-DeAngelis, Fear Factor, Numerical Simulation, Leslie-Gower, Stability Analysis.

1. Pendahuluan

Model *predator-prey* telah menjadi topik penting dalam studi dinamika populasi ekologi selama beberapa dekade. Salah satu model yang sering digunakan dalam mengkaji populasi ekologi adalah model *predator-prey* Leslie-Gower, yang menggambarkan interaksi antara *predator* dan *prey* dengan asumsi bahwa pertumbuhan *predator* bergantung pada kepadatan populasi *prey*. Adapun peneliti telah mengkaji model *predator-prey* Leslie-Gower dengan dua populasi, yang berarti tidak ada populasi yang terinfeksi, yaitu [1] – [5]. Seiring dengan perkembangan kajian tentang model *predator prey*, beberapa peneliti melakukan modifikasi dengan menambahkan populasi *prey* dan populasi *predator*. Mereka juga melakukan modifikasi pada interaksi antara *prey* dan *predator* dengan memperhatikan kepadatan populasi *prey* dan *predator*.

Pada [6] dan [7] dikaji tentang model *predator-prey* dengan menambahkan *predator* terinfeksi dan fungsi respons yang digunakan adalah Holling tipe I dan Holling tipe II. Pada [8], populasi yang ditambahkan adalah *predator* kelas menengah dengan interaksi antara *prey* dengan *predator* kelas menengah menggunakan fungsi respons MonodHaldane. Sedangkan pada [9] – [12], model predator-prey dimodifikasi dengan menambahkan *prey* terinfeksi. Pada [9] – [11], interaksi antara *prey* sehat dengan *prey* terinfeksi menggunakan Holling tipe I, sedangkan interaksi antara *prey* terinfeksi dengan *predator* menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Bedanya, pada [10] ada perlindungan pada *prey* sehat dan terinfeksi sedangkan pada [11] ada faktor pemanenan pada *prey* sehat. Dalam [12], interaksi antara *prey* sehat dengan *prey* terinfeksi menggunakan Holling tipe I, sedangkan interaksi antara *prey* sehat dan terinfeksi dengan *predator* menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis, tetapi model *predator prey* yang dikaji bukan model *predator-prey* Leslie-Gower.

Peneliti juga melakukan perluasan populasi, terutama baik *prey* maupun *predator*. Pada artikel [13], dikaji model *predator-prey* dengan empat populasi, yaitu penambahan populasi *prey* terinfeksi dan *predator* belum dewasa. Interaksi antara *prey* dengan *predator* menggunakan fungsi Holling tipe II, dengan dimodifikasi adanya perlindungan *prey*, baik pada *prey* sehat maupun pada *prey* terinfeksi. Artikel [14] – [20] membahas model *predator-prey* Leslie-Gower dua populasi. Pada [14] ditambahkan faktor ketakutan *prey* pada *predator* dengan fungsi responsnya berbentuk ratio-dependent, sedangkan fungsi respons pada [16] berbentuk Holling tipe IV. Pada [15] dan [17] dilakukan modifikasi pada fungsi respons, [15] menggunakan fungsi respons berbentuk akar kuadrat, sedangkan [17] menggunakan fungsi respons Holling tipe II. Adapun pada artikel [18], fungsi responsnya menggunakan Holling tipe I, tetapi ada faktor pemanenan terhadap *prey* yang berbentuk fungsi nonlinier. Dalam [19] dikaji model *predator-prey* Leslie-Gower dua populasi dengan fungsional respons Beddington De-Angelis. Artikel [20] mengkaji model *predator-prey* Leslie-Gower dua populasi dengan menggabungkan efek Allee yang kuat dan faktor ketakutan pada *prey*. Berdasarkan kajian analitik, mereka mengungkapkan

bahwa kedua efek tersebut sangat penting dalam menentukan perilaku dinamis model.

Artikel ini membahas analisis kestabilan titik setimbang model *predator-prey* Leslie-Gower dengan memperhatikan adanya *prey* yang sakit dan faktor ketakutan, dengan fungsi respons Beddington De-Angelis. Selama ini, pada artikel yang sejenis, interaksi antar *prey* sehat dan *prey* terinfeksi menggunakan Holling tipe I atau II. Dalam artikel ini digunakan fungsi respons Beddington De-Angelis. Hal ini lebih logis, karena dalam penyebaran penyakit tergantung pada populasi sehat dan populasi terinfeksi. Metode yang digunakan pada artikel ini adalah metode analitik dan metode simulasi numerik. Metode analitik digunakan untuk menentukan titik setimbang model, melakukan linierisasi model dan menganalisis kestabilan titik setimbang model. Sedangkan metode simulasi numerik untuk menunjukkan visualisasi secara grafik dari hasil analitik. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa model Leslie-Gower yang dimodifikasi, ketika dikombinasikan dengan fungsi respons Beddington-DeAngelis dan faktor ketakutan, dapat menghasilkan perilaku solusi model menjadi berubah dari stabil menjadi tidak stabil atau sebaliknya.

Artikel ini mengkaji model matematika *predator-prey* Leslie-Gower yang merujuk pada model yang ditulis oleh [10]. Pada [10] *predator* hanya memangsa *prey* terinfeksi, sedang pada penelitian ini *predator* memangsa *prey* sehat dan *prey* terinfeksi. Penelitian ini juga memodifikasi fungsi respons Holling I dan II menjadi fungsi respons Beddington-DeAngelis dan menambahkan adanya efek ketakutan pada populasi *prey* sehat terhadap *predator*.

Penelitian ini menganalisa kestabilan titik setimbang model *predator-prey* Leslie-Gower dengan memperhatikan populasi *prey* terinfeksi serta faktor ketakutan dan fungsi respons Beddington-DeAngelis. Pada subbab berikutnya disajikan model *predator-prey* Leslie-Gower dengan adanya *prey* terinfeksi dengan fungsi respons Beddington-DeAngelis, eksistensi titik setimbang dan analisis kestabilan. Hasil analisis diharapkan dapat memberikan kontribusi signifikan dalam memahami dampak interaksi model *predator-prey* yang kompleks terhadap kestabilan ekosistem. Pada bagian akhir disajikan simulasi numerik dan interpretasinya guna mendukung hasil analitik titik setimbang dan kestabilannya.

2. Metodologi Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan model matematika. Model yang diteliti pada artikel ini merupakan model predator-prey Leslie-Gower dengan fungsi respons Beddington-DeAngelis dan adanya *prey* terinfeksi serta faktor ketakutan *prey* terhadap predator. Penelitian ini dilakukan secara studi literatur, adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

- (1) Memodifikasi model pada rujukan artikel [10]. Modifikasi yang dilakukan adalah:
 - (a) menambahkan faktor ketakutan pada *prey* sehat,
 - (b) mengubah fungsi respons Holling I dan Holling II menjadi fungsi respons Beddington-DeAngelis,
 - (c) memodifikasi predator dapat memangsa *prey* sehat dan *prey* terinfeksi.

- (2) Menentukan titik setimbang model hasil modifikasi.
- (3) Melakukan linierisasi model dengan matrik Jacobian dan mensubstitusikan titik setimbang.
- (4) Menentukan nilai eigen hasil linierisasi, untuk menentukan kestabilan titik setimbang model.
- (5) Melakukan simulasi numerik dan interpretasi hasil simulasi.
- (6) Menarik kesimpulan dari hasil analitik dan simulasi numerik.

3. Model Matematika

Populasi pada model penelitian ini dibagi menjadi tiga populasi, yaitu populasi *prey* rentan (x_s), *prey* terinfeksi (x_i), dan *predator* (y). Pertumbuhan *prey* rentan secara logistik yang dipengaruhi oleh kepadatan *predator*. Adapun interaksi antara populasi *prey* rentan dan terinfeksi dengan *predator* menggunakan fungsi respons Beddington-DeAngelis, yang menggambarkan tingkat konsumsi oleh *predator* terhadap *prey* berubah sebagai fungsi dari kepadatan *prey*. Hal ini berarti jumlah *prey* yang dimangsa oleh *predator* berubah seiring dengan perubahan jumlah *prey* yang tersedia. Nilai awal ketiga populasi adalah $x_s(0), x_i(0), y(0) \geq 0$. Parameter model diasumsikan:

$$r, \beta, K_1, K_2, \sigma_1, \sigma_2, \theta_1, \theta_2, \mu, \omega, \gamma, \alpha, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0.$$

Penelitian ini mengkaji kestabilan titik setimbang model dengan memperhatikan pengaruh parameter model terhadap kestabilan titik setimbang model. Adapun model *predator-prey*-nya diformulasikan sebagai berikut:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{rx_s}{1 + \beta y} \left(1 - \frac{x_s}{K_1}\right) - \frac{\sigma_1 x_s x_i}{1 + a_1 x_s + b_1 x_i} - \frac{\theta_1 x_s y}{1 + a_2 x_s + b_2 y}, \quad (3.1)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\sigma_2 x_s x_i}{1 + a_1 x_s + b_1 x_i} - \frac{\theta_2 x_i y}{1 + a_3 x_i + b_3 y} - \mu x_i, \quad (3.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\gamma - \frac{\alpha y}{K_2 + \omega(x_s + x_i)}\right) y - \mu y. \quad (3.3)$$

- (i) Persamaan (3.1) merupakan laju pertumbuhan *prey* sehat terhadap waktu, yang berbentuk eksponensial dengan pengaruh kepadatan predator (β), yang berkurang karena berinteraksi dengan *prey* terinfeksi, yang berbentuk fungsi respons Beddington-DeAngelis, dan berkurang karena dimangsa oleh predator dengan proses pemangsaannya berbentuk Beddington-DeAngelis.
- (ii) Persamaan (3.2) merupakan laju pertumbuhan *prey* terinfeksi terhadap waktu, yang bertambah karena adanya penyebaran penyakit ke *prey* sehat, dan berkurang karena dimangsa oleh predator dengan proses pemangsaannya berbentuk Beddington-DeAngelis, dan berkurang karena kematian alami.
- (iii) Persamaan (3.3) merupakan laju pertumbuhan predator terhadap waktu, yang bertambah secara eksponensial sebesar γ dan berkurang karena terjadinya persaingan antar predator dalam memangsa *prey* baik sehat maupun terinfeksi dan berkurang karena kematian alami.

4. Analisis Model

Pada bagian ini dibahas tentang keterbatasan solusi, eksistensi titik setimbang dan analisis kestabilan lokal. Berikut dijelaskan tentang keterbatasan solusi dari model (3.1) – (3.3).

4.1. Keterbatasan Solusi

Sebuah model dapat dianalisa dengan baik dan populasi model dapat setimbang maka diperlukan adanya keterbatasan solusi model. Teorema berikut ini menunjukkan keterbatasan solusi model (3.1) – (3.3).

Teorema 4.1. *Keterbatasan solusi*

Semua solusi model (3.1) – (3.3) dengan nilai awal $x_s(0), x_i(0), y(0) \in R_+^3$, adalah terbatas. Lebih lanjut solusi tersebut akan konvergen ke suatu daerah terbatas:

$$\Omega = \left\{ (x_s, x_i, y) \in R_+^3 : 0 \leq N \leq \frac{2K_1}{\rho} \right\},$$

untuk $t \rightarrow \infty$ dengan $N = x_s + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_i + y$.

Bukti. Misalkan $x_s(t), x_i(t), y(t)$ adalah solusi model (2.1) dengan semua parameter model bernilai positif, maka berdasarkan persamaan pertama model (2.1) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= \frac{rx_s}{1 + \beta y} \left(1 - \frac{x_s}{K_1} \right) - \frac{\sigma_1 x_s x_i}{1 + a_1 x_s + b_1 x_i} - \frac{\theta_1 x_s y}{1 + a_2 x_s + b_2 y}, \\ &\leq \frac{rx_s}{1 + \beta y} \left(1 - \frac{x_s}{K_1} \right) \leq rx_s \left(1 - \frac{x_s}{K_1} \right). \end{aligned}$$

Hal ini berarti:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup x_s(t) = K_1 .$$

Misalkan: $N = x_s + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_i + y$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \dot{x}_s + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \dot{x}_i + \dot{y}, \\ &= \frac{rx_s}{1 + \beta y} \left(1 - \frac{x_s}{K_1} \right) - \frac{\sigma_1 x_s x_i}{1 + a_1 x_s + b_1 x_i} - \frac{\theta_1 x_s y}{1 + a_2 x_s + b_2 y} \\ &\quad + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(\frac{\sigma_2 x_s x_i}{1 + a_1 x_s + b_1 x_i} - \frac{\theta_2 x_i y}{1 + a_3 x_i + b_3 y} - \mu x_i \right), \\ &\quad + \left(\gamma - \frac{\alpha y}{K_2 + \omega(x_s + x_i)} \right) y - \mu y, \\ &\leq rx_s \left(2 - \frac{x_s}{K_1} \right) - rx_s - \frac{\sigma_1 \mu x_i}{\sigma_2} - (\mu - \gamma) y, \end{aligned}$$

dengan $\mu < \gamma$. Ambil $\rho = \min(r, \mu, \mu - \gamma)$, maka diperoleh:

$$\frac{dN}{dt} + \rho N \leq 2K_1.$$

Diperoleh bahwa:

$$0 \leq N \leq \frac{2K_1}{\rho} + N(0)e^{-\rho t}.$$

Hal ini berakibat untuk $t \rightarrow \infty$, diperoleh:

$$0 \leq N \leq \frac{2K_1}{\rho}. \quad \square$$

4.2. Eksistensi Titik Setimbang

Model yang dikaji dalam artikel ini berbentuk sistem nonlinier, sehingga secara analitik sulit ditentukan solusinya. Oleh karena itu, diperlukan kajian sifat-sifat model nonlinier dengan pendekatan linierisasi di sekitar titik setimbang. Adapun model (3.1) – (3.3) mempunyai titik setimbang, jika $\frac{dx_s}{dt} = \frac{dx_i}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$. Berdasarkan kondisi ini, maka ada enam titik setimbang dari model (3.1) – (3.3), yaitu:

- (1) Titik setimbang kepunahan populasi ($E_0 = (0, 0, 0)$).
- (2) Titik setimbang kepunahan *prey* terinfeksi dan *predator* ($E_1 = (K_1, 0, 0)$)
- (3) Titik setimbang kepunahan populasi *prey* ($E_2 = (0, 0, \frac{K_2(\gamma - \mu)}{\alpha})$), titik setimbang ini ada jika $\gamma > \mu$.
- (4) Titik setimbang kepunahan populasi *predator* ($E_3 = (x_s^*, x_i^*, 0)$), dengan:

$$x_i = \frac{(\sigma_2 - a_1\mu)x_s^* - \mu}{b_1\mu}, \text{ dan}$$

$$\frac{-b_1r\sigma_2x_s^{*2} + (K_1a_1\mu\sigma_1 + K_1\sigma_2(b_1 - \sigma_1))x_s^* + K_1\mu\sigma_1}{K_1b_1\sigma_2} = 0.$$

Hal ini berarti bahwa terdapat akar real $x_s^* > 0$, sehingga E_3 ada jika:

$$(\sigma_2 - a_1\mu)x_s^* > \mu.$$

- (5) Titik setimbang kepunahan *prey* terinfeksi, yaitu $x_i = 0$. Hal ini berarti:

$$E_4 = (x_s^*, 0, y^*), \text{ dengan } y^* = \frac{(\gamma - \mu)\omega x_s^* + K_2(\gamma - \mu)}{\alpha}.$$

Adapun hasil analitik untuk x_s^* berbentuk pecahan polynomial, yaitu: $\frac{A}{B} = 0$ dengan:

$$A = \left(\frac{rb_2(\mu - \gamma)\omega - (\theta_1 K_1 \beta \omega^2 (\mu - \gamma)^2}{\alpha} + r\alpha a_2) \right) x_s^{*3},$$

$$+ \left(K_2 b_2 (\mu - \gamma) (1 - \omega) r - \frac{2\theta_1 K_1 \beta (\mu - \gamma)^2 \omega K_2}{\alpha} + r\alpha (K_1 a_2 - 1) + \theta_1 K_1 (\mu - \gamma) \omega \right) x_s^{*2},$$

$$+ \left(r\alpha K_1 - \frac{\theta_1 K_1 \beta K_2^2 (\mu - \gamma)^2}{\alpha} + K_1 K_2 (\mu - \gamma) (\theta_1 - b_2 r) \right) x_s^*, \text{ dan}$$

$$\begin{aligned}
 B = & \frac{K_1\omega\beta(\gamma-\mu)}{\alpha} (b_2(\gamma-\mu)\omega + a_2\alpha) x_s^{*2}, \\
 & + \left(K_1(\gamma-\mu)\omega(b_2+\beta) + K_1a_2\alpha + \frac{2K_1K_2b_2(\gamma-\mu)^2\omega\beta}{\alpha} + K_1K_2a_2\beta(\gamma-\mu) \right) x_s^*, \\
 & + \alpha K_1 + \frac{K_1b_2K_2^2(\gamma-\mu)^2\beta}{\alpha} + K_1K_2(b_2+\beta)(\gamma-\mu).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil analitik di atas, maka analisis kestabilan dari titik setimbang kepunahan prey terinfeksi menggunakan bidang phase.

- (6) Titik setimbang koeksistensi, yaitu $x_s, x_i, y \neq 0$. Hal ini berarti titik setimbang ini ada, yaitu:

$$(E_5 = (x_s^*, x_i^*, y^*)).$$

Secara analitik titik setimbang koeksistensi sulit ditentukan secara analitik. Oleh karena itu, analisis kestabilannya menggunakan bidang phase.

4.3. Analisis Kestabilan Lokal

Seperti yang telah dijelaskan pada bagian (4), yaitu model yang dikaji dalam artikel ini merupakan model nonlinier yang sulit ditentukan solusinya. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan linier di sekitar titik setimbang. Hal ini berakibat bahwa analisis kestabilan yang dibahas pada penelitian ini merupakan kestabilan lokal karena kestabilannya merupakan hasil linierisasi di sekitar titik setimbang. Berdasarkan hal tersebut, pertama-tama dilakukan linierisasi model (3.1) – (3.3) dengan matrik Jacobian disekitar titik setimbang.

Model (3.1) – (3.3) dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_s}{dt} &= f_1(x_s, x_i, y), \\
 \frac{dx_i}{dt} &= f_2(x_s, x_i, y), \\
 \frac{dy}{dt} &= f_3(x_s, x_i, y).
 \end{aligned}$$

Adapun linierisasi model (3.1) – (3.3) dengan matrik Jacobian adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_s} & \frac{\partial f_2}{\partial x_i} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_s} & \frac{\partial f_3}{\partial x_i} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix},$$

dengan:

$$\begin{aligned}
 J_{11} = & \frac{r\left(1 - \frac{x_s}{K_1}\right)}{1 + \beta z} - \frac{rx_s}{K_1(1 + \beta z)} - \frac{\sigma_1 x_i}{1 + a_1 x_s + b_1 x_i} + \frac{\sigma_1 a_1 x_s x_i}{(1 + a_1 x_s + b_1 x_i)^2} \\
 & - \frac{\theta_1 y}{1 + a_2 x_s + b_2 y} + \frac{\theta_1 a_2 x_s y}{(1 + a_2 x_s + b_2 y)^2}, \\
 J_{12} = & -\frac{\sigma_1 x_s}{1 + a_1 x_s + b_1 x_i} + \frac{\sigma_1 b_1 x_s x_i}{(1 + a_1 x_s + b_1 x_i)^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{13} &= -\frac{\beta r x_s \left(1 - \frac{x_s}{K_1}\right)}{(1 + \beta z)^2} - \frac{\theta_1 x_s}{1 + a_2 x_s + b_2 y} + \frac{\theta_1 b_2 x_s y}{(1 + a_2 x_s + b_2 y)^2}, \\
J_{21} &= \frac{\sigma_2 x_i}{1 + a_1 x_s + b_1 x_i} - \frac{\sigma_2 a_1 x_s x_i}{(1 + a_1 x_s + b_1 x_i)^2}, \\
J_{22} &= \frac{\sigma_2 x_s}{1 + a_1 x_s + b_1 x_i} - \frac{\sigma_2 b_1 x_s x_i}{(1 + a_1 x_s + b_1 x_i)^2} - \frac{\theta_2 y}{1 + a_3 x_i + b_3 y} + \frac{\theta_2 a_3 x_i y}{(1 + a_3 x_i + b_3 y)^2} - \mu, \\
J_{23} &= -\frac{\theta_2 x_i}{1 + a_3 x_i + b_3 y} + \frac{\theta_2 b_3 x_i y}{(1 + a_3 x_i + b_3 y)^2}, \\
J_{31} &= \frac{\alpha \omega y^2}{(K_2 + \omega(x_s + x_i))^2}, \\
J_{32} &= \frac{\alpha \omega y^2}{(K_2 + \omega(x_s + x_i))^2}, \\
J_{33} &= -\frac{2\alpha y}{K_2 + \omega(x_s + x_i)} + \gamma - \mu.
\end{aligned}$$

Teorema berikut ini menjelaskan kestabilan titik setimbang E_0 , E_1 dan E_2 . Uji kestabilan dari titik setimbang model (3.1) – (3.3) dengan menentukan nilai eigen dari hasil linierisasi di sekitar titik setimbang.

Teorema 4.2. *Kestabilan lokal titik setimbang:*

- (1) *Titik setimbang E_0 tidak stabil.*
- (2) *Titik setimbang E_1 stabil bersyarat, yaitu:*

$$\gamma - \mu < 0 \text{ dan } K_1 a_1 \mu + \mu - \sigma_2 K_1 > 0.$$

- (3) *Titik setimbang E_2 stabil bersyarat, yaitu:*

$$\gamma > \mu \text{ dan } K_2^2 \theta_1 \beta (\gamma - \mu)^2 - K_2 \alpha b_2 r (\gamma - \mu) + K_2 \theta_1 \alpha (\gamma - \mu) > \alpha^2 r.$$

Bukti.

- (1) Hasil linierisasi dengan matrik Jacobian di sekitar titik setimbang E_0 , diperoleh matrik:

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - \mu \end{pmatrix},$$

dari matrik J_{E_0} maka nilai eigennya adalah $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = -\mu$ dan $\lambda_3 = \gamma - \mu$. Hal ini berarti bahwa titik setimbang $E_0 = (0, 0, 0)$ tidak stabil.

- (2) Linierisasi dengan matrik Jacobian di sekitar titik setimbang E_1 adalah:

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -r & -\frac{\sigma_1 K_1}{K_1 a_1 + 1} & -\frac{\theta_1 K_1}{K_1 a_2 + 1} \\ 0 & \frac{\sigma_2 K_1}{K_1 a_1 + 1} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - \mu \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan matrik J_{E_1} maka nilai eigennya adalah:

$$\lambda_1 = -r, \lambda_2 = \gamma - \mu, \lambda_3 = -\frac{K_1 a_1 \mu + \mu - \sigma_2 K_1}{K_1 a_1 + 1}.$$

Hal ini berakibat titik setimbang E_1 stabil asimtotis jika:

$$\gamma - \mu < 0 \text{ dan } K_1 a_1 \mu + \mu - \sigma_2 K_1 > 0.$$

(3) Linierisasi dengan matrik Jacobian di sekitar titik setimbang E_2 adalah:

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} \frac{r\alpha}{\alpha + \beta K_2(\gamma - \mu)} - \frac{\theta_1 K_2(\gamma - \mu)}{\alpha + b_2 K_2(\gamma - \mu)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\theta_2 K_2(\gamma - \mu)}{\alpha + b_3 K_2(\gamma - \mu)} - \mu & 0 \\ \frac{(\gamma - \mu)^2 \omega}{\alpha} & \frac{(\gamma - \mu)^2 \omega}{\alpha} & -\gamma + \mu \end{pmatrix}.$$

Diperoleh nilai eigen dari J_{E_2} adalah:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma + \mu, \\ \lambda_2 &= -\frac{K_2 b_3 \mu (\gamma - \mu) + K_2 \theta_2 (\gamma - \mu) + \alpha \mu}{K_2 b_3 (\gamma - \mu) + \alpha}, \\ \lambda_3 &= -\frac{K_2^2 \theta_1 \beta (\gamma - \mu)^2 - K_2 \alpha b_2 r (\gamma - \mu) + K_2 \theta_1 \alpha (\gamma - \mu) - \alpha^2 r}{K_2^2 b_2 \beta (\gamma - \mu)^2 + K_2 \alpha (b_2 + \beta) (\gamma - \mu) + \alpha^2}. \end{aligned}$$

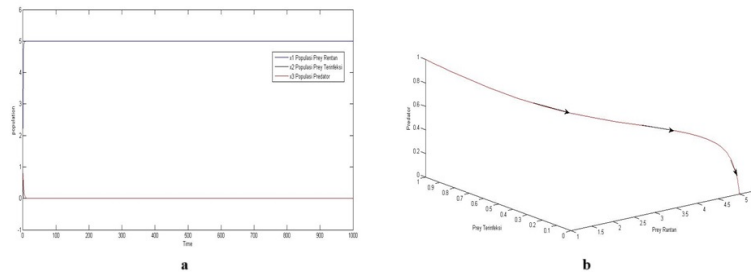
Hal ini berarti, titik setimbang E_2 stabil asimtotis lokal jika:

$$\gamma > \mu \text{ dan } K_2^2 \theta_1 \beta (\gamma - \mu)^2 + K_2 \alpha (\gamma - \mu) (\theta_1 - b_2 r) > \alpha^2 r. \quad \square$$

5. Simulasi Numerik

Pada bagian ini disajikan beberapa simulasi numerik yang dilakukan dengan program MATLAB untuk mengevaluasi dan mendukung hasil analitik. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi numerik diasumsikan agar titik setimbang model menjadi stabil. Nilai-nilai parameternya adalah sebagai berikut: $r = 5$, $K_1 = 10$, $K_2 = 4$, $\beta = 0.9$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.5$, $b_1 = 0.5$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = 0.5$, $\sigma_1 = 1.5$, $\sigma_2 = 1$, $\theta_1 = 0.5$, $\theta_2 = 0.4$, $\gamma = 0.5$, $\mu = 0.3$, $\alpha = 0.5$, dan $\omega = 0.8$, dengan kondisi awal $x_s = 1$, $x_i = 1$, dan $y = 1$.

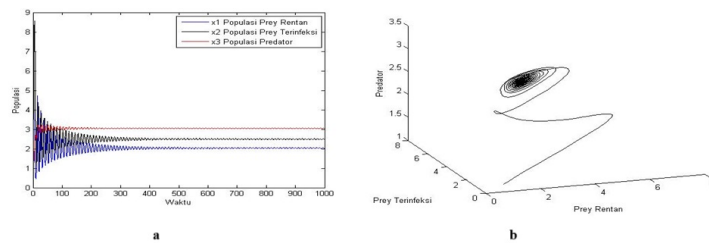
Berdasarkan nilai-nilai tersebut diharapkan titik setimbang E_1 stabil. Untuk analisis lebih lanjut dilihat pengaruh perubahan parameter β , σ_1 , σ_2 , θ_1 , dan θ_2 , terhadap kestabilan titik setimbang koeksistensi. Pada Gambar 1 diberikan simulasi numerik untuk titik setimbang kepunahan *prey* terinfeksi dan kepunahan *predator*.



Gambar 1: (a) Gambar pertumbuhan populasi terhadap waktu, sedangkan (b) Kestabilan titik setimbang E_1 .

Pada Gambar (1a) terlihat bahwa prey rentan bertumbuh seiring waktu, sedangkan prey terinfeksi dan predator mengalami kemusnahan. Adapun Gambar (1b) menunjukkan perilaku solusi model menuju ke titik setimbang E_1 .

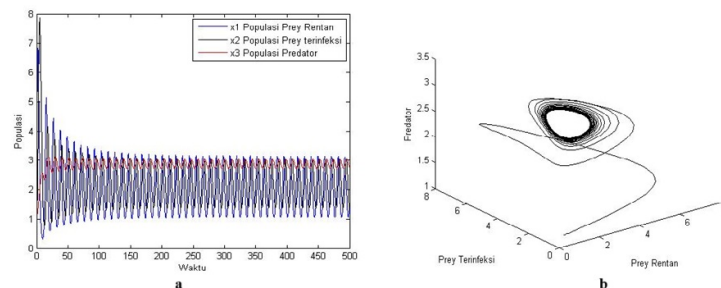
Selanjutnya, untuk melihat pengaruh parameter $\beta, \sigma_1, \sigma_2, \theta_1$ dan θ_2 terhadap kestabilan titik setimbang model, maka nilai parameter tersebut dibuat bervariasi selama simulasi numerik. Pertama-tama, dilihat pengaruh nilai parameter β terhadap kestabilan titik setimbang koeksistensi (E_5). Nilai parameter yang digunakan adalah $\beta = 0 - 0.6$, sedangkan parameter yang lain tetap. Pada Gambar 2 diberikan simulasi numeriknya sebagai berikut.



Gambar 2: Titik setimbang koeksistensi pada model (3.1) – (3.3) dengan $0 < \beta \leq 0.5$. (a) Gambar pertumbuhan populasi terhadap waktu, sedangkan (b) Bidang phase titik setimbang E_5 .

Pada Gambar (2a) terlihat bahwa pertumbuhan predator lebih banyak dibandingkan dengan pertumbuhan prey. Hal ini disebabkan dengan kecilnya pengaruh ketakutan maka populasi prey dapat tumbuh dengan baik, sehingga predator mempunyai kesediaan makan yang cukup. Sedangkan Gambar (2b) menunjukkan kestabilan titik setimbang E_5 .

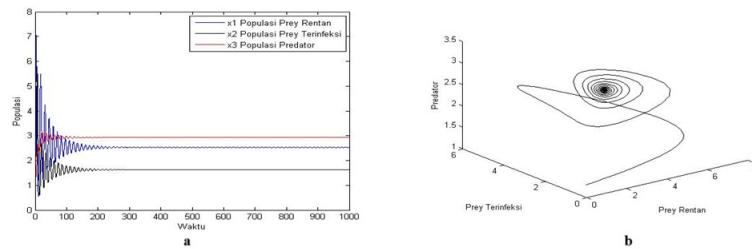
Selanjutnya nilai β diperbesar untuk melihat perubahan kestabilan titik setimbang E_5 . Gambar 3 memperbesar nilai parameter β , yaitu sebesar 0.6.



Gambar 3: Titik setimbang koeksistensi pada model (3.1) – (3.3) dengan $\beta \geq 0.6$. (a) Gambar pertumbuhan populasi terhadap waktu dan (b) Bidang phase titik setimbang E_5 .

Berdasarkan Gambar 3 terjadi perubahan kestabilan titik setimbang koeksistensi yang menjadi tidak stabil. Hal ini disebabkan pengaruh parameter β yang diperbesar, ini berarti ketakutan prey rentan terhadap predator mempengaruhi kestabilan titik setimbang koeksistensi (E_5).

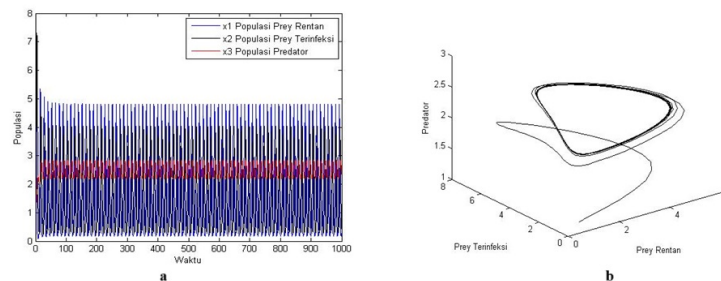
Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk analisis pengaruh nilai parameter σ_1 dan σ_2 . Pertama-tama ditentukan nilai parameter σ_1 dan σ_2 , yaitu 1.2 dan 0.8, kemudian nilainya dinaikkan $\sigma_1 = 1.5$ dan $\sigma_2 = 1.2$. Pada Gambar 4 diberikan simulasi numeriknya.



Gambar 4: Titik setimbang koeksistensi pada model (3.1) – (3.3) dengan σ adalah $\sigma_1 = 1.2$ dan $\sigma_2 = 0.8$. (a) Gambar pertumbuhan populasi terhadap waktu, sedangkan (b) Bidang phase titik setimbang E_5 .

Berdasarkan Gambar (4b) terlihat bahwa dengan nilai parameter $\sigma_1 = 1.2$ dan $\sigma_2 = 0.8$, maka titik setimbang E_5 stabil asimtotis. Hal ini disebabkan interaksi antara prey sehat dengan prey terinfeksi yang kecil membuat prey sehat tetap ada atau prey terinfeksi tidak mendominasi sehingga sering kali lebih seimbang. Hal ini mengakibatkan titik setimbang E_5 cenderung stabil.

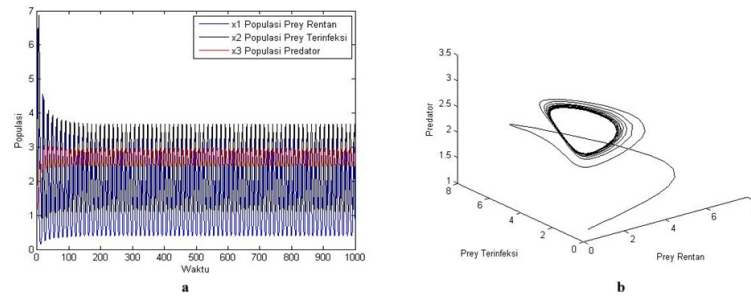
Selanjutnya nilai parameter diperbesar, yaitu $\sigma_1 = 1.5$ dan $\sigma_2 = 1.2$. Pada Gambar 5 diberikan hasil simulasi numerik dengan nilai parameter σ_1 dan σ_2 yang diperbesar.



Gambar 5: Titik setimbang koeksistensi pada model (3.1) – (3.3) dengan σ adalah $\sigma_1 = 1.5$ dan $\sigma_2 = 1.2$. (a) Gambar pertumbuhan populasi terhadap waktu, sedangkan (b) Kestabilan titik setimbang E_5 .

Berdasarkan Gambar 5, dengan pembesaran nilai σ_1 dan σ_2 terjadi perubahan kestabilan titik setimbang koeksistensi dari stabil menjadi tidak stabil. Hal ini membuat jumlah prey terinfeksi meningkat, sehingga mengurangi populasi prey sehat yang berarti interaksi ini dapat mengakibatkan ketidakseimbangan. Akibatnya, interaksi antara prey rentan dengan prey terinfeksi dapat mempengaruhi kestabilan titik setimbang koeksistensi (E_5).

Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik terhadap parameter θ_1 dan θ_2 , yaitu parameter yang berkaitan dengan laju pemangsaan prey (rentan dan terinfeksi) oleh predator. Pertama-tama ditentukan nilai parameter $\theta_1 = 0.1$ dan $\theta_2 = 0.1$, kemudian nilainya diperbesar, yaitu $\theta_1 = 0.4$ dan $\theta_2 = 0.4$. Pada Gambar 6 diberikan simulasi numeriknya.



Gambar 6: Titik setimbang koeksistensi pada model (3.1) – (3.3) dengan θ adalah $\theta_1 = 0.1$ dan $\theta_2 = 0.1$. (a) Gambar pertumbuhan populasi terhadap waktu, sedangkan (b) Kestabilan titik setimbang E_5 .

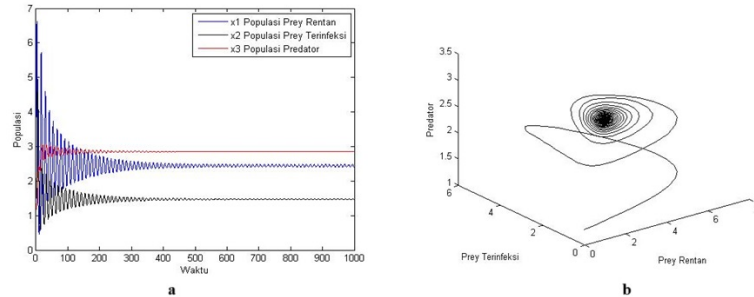
Berdasarkan Gambar 6, terlihat bahwa titik setimbang E_5 tidak stabil. Hal ini disebabkan parameter interaksi antara predator dengan prey kecil, sehingga respons predator terhadap perubahan populasi prey dapat menjadi lambat yang berarti interaksi ini membuat predator tidak dapat mengimbangi pertumbuhan populasi prey yang berdampak mengakibatkan ketidakseimbangan.

Selanjutnya nilai parameter θ diperbesar, yaitu $\theta_1 = 0.4$ dan $\theta_2 = 0.4$. Pada Gambar 7 diberikan hasil simulasi numeriknya.

Pada Gambar 7 dengan pembesaran nilai θ_1 dan θ_2 , terjadi perubahan kestabilan titik setimbang koeksistensi dari tidak stabil menjadi stabil asimtotis. Hal ini disebabkan parameter yang lebih besar membuat interaksi antara predator dan prey menjadi lebih kuat. Predator menjadi lebih efisien dalam mengendalikan populasi prey ini terlihat pada Gambar 7(a), sehingga mengurangi pertumbuhan populasi prey yang lebih besar. Akibatnya, solusi sistem dapat kembali ke titik setimbang lebih efisien atau titik setimbang berubah menjadi stabil asimtotis.

6. Kesimpulan

Penelitian ini menunjukkan bahwa faktor ketakutan prey terhadap predator serta interaksi antara prey yang sehat dan terinfeksi dapat menghasilkan dinamika



Gambar 7: Titik setimbang koeksistensi pada model (3.1) – (3.3) dengan θ adalah $\theta_1 = 0.4$ dan $\theta_2 = 0.4$. (a) Gambar pertumbuhan populasi terhadap waktu, sedangkan (b) Kestabilan titik setimbang E_5 .

populasi yang kompleks, yaitu dengan membesarnya nilai parameter β dan σ mempengaruhi kestabilan titik setimbang model. Selain kedua parameter tersebut, berdasarkan simulasi numerik juga diperoleh bahwa semakin besarnya nilai parameter interaksi antara predator dengan prey membuat ekosistem semakin seimbang. Hal ini disebabkan dengan membesarnya nilai parameter tersebut membuat predator menjadi lebih efisien dalam mengendalikan populasi prey. Sehingga populasinya menjadi seimbang dalam ekosistem.

Temuan utama mengindikasikan bahwa parameter kecil dalam interaksi dapat menyebabkan ketidakstabilan pada titik setimbang, sementara peningkatan parameter interaksi dapat menciptakan stabilitas yang lebih baik. Implikasi penelitian ini adalah bahwa pemahaman tentang interaksi spesies dapat membantu dalam pengelolaan ekosistem dan strategi konservasi. Namun, batasan penelitian ini mencakup model yang mungkin tidak sepenuhnya mencerminkan kompleksitas dunia nyata dan ketidakpastian dalam data parameter.

Penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengeksplorasi pengaruh faktor lingkungan dan sosial terhadap dinamika populasi ini, serta aplikasi model ini dalam konteks ekosistem yang lebih luas. Kontribusi penelitian ini kepada masyarakat umum terletak pada pemahaman yang lebih baik tentang interaksi ekosistem, yang dapat mendukung kebijakan pengelolaan sumber daya alam yang lebih efektif dan berkelanjutan.

Ucapan Terima kasih

Penulis menyampaikan terimakasih atas dukungan pendanaan penelitian melalui skema Penelitian Dasar Unggulan (PDU) Universitas Airlangga Tahun 2024 dengan kontrak penelitian Nomor: 1668/UN3.FST/PT.01.03/2024.

Daftar Pustaka

[1] Cao, J., Ma, L. dan Hao, P., 2023, Bifurcation Analysis in a Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Beddington-DeAngelis Functional Response, *Journal of Applied Analysis and Computation* Vol. **13**(5): 3026 – 3053

- [2] Chen, H. dan Zhang, C., 2022, Dynamic analysis of a Leslie-Gower-type predator-prey system with the fear effect and ratio-dependent Holling III functional response, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* Vol. **27**(5): 904 - 926
- [3] Chen, M., Takeuchi, Y. dan Zhang, Jia-Fang, 2023, Dynamic complexity of a modified Leslie-Gower predator-prey system with fear effect, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* Vol. **119**: 107109
- [4] Firdiansyah, A.L., 2021, Effect of Fear in Leslie-Gower Predator-Prey Model with Beddington-DeAngelis Functional Response Incorporating Prey Refuge, *Int. J. of Comp. Science and Applied mathematics* Vol.7(2): 56 – 62
- [5] Ibarra, C.A. dan Flores, J., 2021, Dynamics of a Leslie-Gower predator-prey model with Holling type II functional response, Allee effect and a generalist predator, *Math Comput Simul* Vol. **188**: 1 - 22
- [6] Ejaz, A., Nawaz, Y., Arif, M.S., Mashat, D. S. dand Abodayeh, K., 2022, Stability Analysis of Predator-Prey System with Consuming Resource and Disease in Predator Species, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. **131**(2): 489 – 506
- [7] Pal, A.K., 2020, Effect of Fear on A Modified Lesli-Gower Predator-Prey Eco-Epidemiological Model with Disease in Predator, *J. Appl. Math. and Informatics* Vol. **38**(5-6): 375 – 406
- [8] Mishra, P., Raw, S.N., Tiwari, B., 2019, Study of a Leslie-Gower predator-prey model with prey defense and mutual interference of predators, *Chaos, Solitons and Fractals* Vol. **120**; 1 - 16
- [9] Purnomo, A.S., Darti, I., Suryanto, A., Kusumawinahyu, W.M., 2023, Fear Effect on a Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Disease Transmission in Prey Population, *Engineering Letters* Vol. **31**(2): 764 – 773
- [10] Sharma, S. dan Samanta, G. P., 2015, A Leslie-Gower predator-prey model with disease in prey incorporating a prey refuge, *Chaos Solitons Fractals* Vol. **70**(1): 69 – 84
- [11] Suryanto, A. dan Darti, I., 2019, Dynamics of Leslie-Gower Pest-Predator Model with Disease in Pest Including Pest-Harvesting and Optimal Implementation of Pesticide, *Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* Vol. **2019**, Article ID 5079171, 9 pages
- [12] Shaikh, A.A., Das, H., Sarwardi, S., 2020, Dynamics of an eco-epidemiological system with disease in competitive prey species, *Journal of Applied Mathematics and Computing* Vol. **62**: 525 - 545
- [13] Kafi, E.M. dan Majeed, A.A., 2020, The Dynamics and Analysis of Stage-Structured Predator-Prey Model Involving Disease and Refuge in Prey Population, *Journal of Physics: Conference Series* Vol. **1530**: 012036
- [14] Kumar, G.R., Ramesh, K., Khan, A., Lakshminarayan, K., and Abdeljawad, T., 2024, Dynamical study of fractional order Leslie-Gower model of predator-prey with fear, Allee effect, and inter-species rivalry, *Results in Control and Optimization* Vol. **14**: 100403
- [15] M. He dan Z. Li, 2023, Global dynamics of a Leslie-Gower predator-prey model with square root response function, *Appl. Math. Lett.* Vol. **140**: 108561
- [16] Mukherjee, D., 2022, Fear induced dynamics on Leslie-Gower predator-prey system with Holling-type IV functional response, *Jambura Journal of Biomathematics* Vo. **3**(2): 49 - 57
- [17] Pal, S., Pal, N, Samanta, S. dand Chattopadhyay, J., 2019, Fear effect in prey

- and hunting cooperation among predators in a Leslie-Gower model, *Mathematical Biosciences and Engineering* Vol. **16**(5): 5146 - 5179
- [18] Wu, H., Li, Z. dan He, M., 2023, Dynamic analysis of a Leslie-Gower predator-prey model with the fear effect and nonlinear harvesting, *Math. Biosciences and Engineering* Vol. **20**(10): 18592 – 18629
- [19] Wu, Y. dan Ai, X., 2023, Analysis of a stochastic Leslie-Gower predator-prey system with Beddington-DeAngelis and Ornstein-Uhlenbeck process, *Electronic Research Archive* Vol. **32**(1): 370 - 385
- [20] Zhu, Z., Chen, Y., Li, Z. dan Chen, F., 2023, Dynamic behaviors of a Leslie-Gower model with strong Allee effect and fear effect in prey, *Math. Biosciences and Engineering* Vol. **20**(6): 10977 - 10999