

## ON THE UPPERBOUND OF THE LOCATING CHROMATIC NUMBERS OF THE AMALGAMATION OF PATHS AND ITS BARBEL GRAPH

AKMAL, ASMIATI\*, AANG NURYAMAN

*Jurusan Matematika,  
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung,  
 Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 1, Bandar Lampung, 35145, Indonesia.  
 email : [akmaljamali12@gmail.com](mailto:akmaljamali12@gmail.com), [asmiati.1976@fmipa.unila.ac.id](mailto:asmiati.1976@fmipa.unila.ac.id),  
[aang.nuryaman@fmipa.unila.ac.id](mailto:aang.nuryaman@fmipa.unila.ac.id)*

Diajukan 26 September 2024    Direvisi 15 Juli 2025    Diterima 12 Agustus 2025  
 Diterbitkan 31 Oktober 2025

**Abstrak.** Bilangan kromatik lokasi suatu graf merupakan perpaduan dari pewarnaan titik dan dimensi partisi graf. Misalkan  $c$  suatu pewarnaan titik pada graf  $G$  dengan  $c(u) \neq c(v)$  untuk  $u$  dan  $v$  bertetangga di  $G$ . Misalkan  $C_i$  himpunan titik-titik yang diberi warna  $i$  dan  $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  merupakan himpunan partisi dari  $V(G)$ . Kode warna  $c_\Pi(v)$  dari  $v$  adalah  $k$ -pasangan terurut  $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$  dengan  $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$  untuk  $1 \leq i \leq k$ . Jika setiap titik di  $G$  mempunyai kode warna yang berbeda, maka  $c$  disebut pewarnaan lokasi dari  $G$ . Nilai terkecil  $k$  sedemikian sehingga  $G$  mempunyai pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi graf  $G$ . Amalgamasi dari  $n \geq 3$  buah graf lintasan  $(P_m, m \geq 3)$  dinotasikan dengan  ${}_nP_m$  diperoleh dengan cara menyatukan satu titik dari setiap graf lintasan  $P_m$ . Graf barbel dari amalgamasi lintasan diperoleh dengan menghubungkan dua jiplakan dari graf amalgamasi lintasan  ${}_nP_m$ , yang dihubungkan oleh sebuah sisi dinotasikan dengan  $B({}_nP_m)$ . Batas atas bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan untuk  $m, n \geq 3$  adalah  $\lceil \sqrt{n} \rceil + 1$  dan  $\lceil \sqrt{n} \rceil + 2$  untuk graf barbelnya.

**Kata Kunci:** Bilangan kromatik lokasi graf, graf amalgamasi lintasan, graf barbel amalgamasi lintasan

**Abstract.** The locating chromatic number of a graph is a combined concept between the coloring and partition dimension of a graph. Let  $c$  be a vertex coloring of a graph  $G$  with  $c(u) \neq c(v)$  for  $u$  and  $v$  adjacent in  $G$ . Let  $C_i$  be the set of all vertices colored by the color  $i$ , and  $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  is a partition set of  $V(G)$ . The color code  $c_\Pi(v)$  of a vertex  $v$  in  $G$  is defined as the  $k$ -ordinate  $d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)$  where  $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$  for  $1 \leq i \leq k$ . If each vertex in  $G$  has a different color code, then  $c$  is called the locating coloring of  $G$ . The smallest value of  $k$  so that  $G$  has a locating coloring is called the locating chromatic number of a graph  $G$ . The amalgamation  $n \geq 3$  of path graphs  $(P_m, m \geq 3)$  denoted by  ${}_nP_m$  is obtained by identifying one vertex from each path graph  $P_m$ . A barbell graph for amalgamation of paths is obtained by

\*Penulis korespondensi

connecting two copies of the amalgamation of path graphs  $nP_m$ , which are connected by an edge denoted by  $B(nP_m)$ . The upper bound of locating chromatic number for amalgamation of path graphs for  $m, n \geq 3$  is  $\lceil \sqrt{n} \rceil + 1$  and  $\lceil \sqrt{n} \rceil + 2$  for its barbell graph.

**Keywords:** Locating chromatic number, amalgamation of path graph, barbell graph.

## 1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang berkembang sangat pesat, salah satunya topik tentang bilangan kromatik lokasi graf [1]. Bilangan kromatik lokasi graf merupakan perpaduan dari konsep pewarnaan titik dan dimensi partisi graf [2].

Penelitian terkait bilangan kromatik lokasi telah banyak dilakukan, diantaranya pada tahun 2011, Asmiati dkk.[3] mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang. Welyyanti dkk. [4] tahun 2013 memperoleh bilangan kromatik lokasi untuk pohon  $n$ -ary lengkap, kemudian Baskoro dan Asmiati [5] berhasil mengkaraktisasi semua pohon berbilangan kromatik lokasi tiga. Pada tahun 2015, Welyyanti dkk. [6] memberikan batas atas bilangan kromatik lokasi graf terhubung yang setiap komponennya memuat titik dominan. Pada tahun 2018, Asmiati dkk. [7] mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf barbel dari graf lengkap atau graf Petersen diperumum.

Pada tahun 2021, Irawan dkk. [8] berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf barbel origami. Pada tahun yang sama, Damayanti dkk.[9] berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari modifikasi graf lintasan dengan siklus, Prawinasti dkk. [10] untuk graf split lingkaran, Asmiati dkk. [11] untuk graf shadow lintasan dan graf barbelnya. Selanjutnya, pada tahun 2025, Irawan dkk. [12] berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari graf barbel pizza dan subdivisinya.

Graf lintasan adalah graf dengan himpunan titik  $V(P_m) = \{v_j; 1 \leq j \leq m\}$  dan himpunan sisi  $E(P_m) = \{v_j v_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$ . Graf lintasan dengan  $m$  buah titik dilambangkan dengan  $P_m$ . Pada Gambar 1 diberikan contoh graf lintasan.

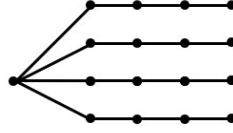
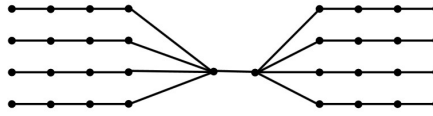


Gambar. 1. Graf lintasan  $P_4$

Amalgamasi dari  $n \geq 3$  graf lintasan  $P_m, m \geq 3$ , dinotasikan dengan  $nP_m$ , diperoleh dengan menyatukan satu titik dari setiap graf lintasan  $P_m$ . Titik penyatuan tersebut disebut titik pusat dan dinotasikan dengan  $u$ . Pada Gambar 2 diberikan contoh graf hasil amalgamasi empat buah graf lintasan  $P_5$ .

Graf barbel dari graf amalgamasi lintasan adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua jiplakan dari graf amalgamasi lintasan dengan suatu jembatan dan dinotasikan dengan  $B(nP_m)$ ,  $m, n \geq 3$ . Pada Gambar 3 diberikan contoh graf barbel dari graf amalgamasi lintasan  $4P_5$ .

Misalkan  $c$  adalah pewarnaan- $k$  titik dari graf terhubung  $G$  dan  $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  adalah partisi dari  $V(G)$  ke dalam kelas-kelas warna yang di-

Gambar. 2. Graf amalgamasi lintasan  $4P_5$ .Gambar. 3. Graf barbel dari graf amalgamasi lintasan  $B(4P_5)$ .

hasilkan. Untuk setiap  $v \in V(G)$ , kode warna dari  $v$  terhadap  $\Pi$  didefinisikan sebagai  $k$ -ordinat:

$$c_{\Pi}(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$$

dengan  $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) : x \in C_i\}$  untuk  $1 \leq i \leq k$ . Jika setiap titik di  $G$  mempunyai kode warna yang berbeda terhadap  $\Pi$ , maka  $c$  disebut pewarnaan lokasi dari  $G$ . Bilangan kromatik lokasi dari  $G$ , dinotasikan dengan  $\chi_L(G)$  adalah banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari  $G$  [6].

Sejauh penelusuran literatur belum terdapat kajian tentang bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan dan barbelnya, maka pada penelitian ini akan didiskusikan tentang hal tersebut.

## 2. Pembahasan

### 2.1. Bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan $nP_m$ untuk $m, n \geq 3$

Batas atas bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan  $nP_m$  untuk  $m, n \geq 3$  dapat dilihat pada teorema berikut ini.

**Teorema 2.1.** *Batas atas bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan untuk  $m, n \geq 3$  adalah  $\lceil \sqrt{n} \rceil + 1$ .*

**Bukti.** Misalkan  $nP_m$  untuk  $m, n \geq 3$ , dengan himpunan titik  $V(nP_m) = \{u, v_j^i \mid i = 1, 2, \dots, n, j = 2, 3, \dots, m\}$ , dan himpunan sisi  $E(nP_m) = \{uv_j^1 \mid j = 2, 3, \dots, m\} \cup \{v_j^i v_{j+1}^i \mid i = 1, 2, \dots, n; j = 2, 3, \dots, m-1\}$ .

Misalkan  $c$  pewarnaan titik dengan menggunakan  $\lceil \sqrt{n} \rceil + 1$  warna untuk  $a \geq 1$  dan  $m, n \geq 3$  sebagai berikut.

$$c(u) = 1,$$

$$c(v_j^i) = \begin{cases} a+1; & (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil < i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ genap}, \\ \{1, 2, \dots, \lceil \sqrt{n} \rceil + 1\} \setminus \{a+1\}; & i = (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil + [1, \lceil \sqrt{n} \rceil]; i \leq n, j \text{ ganjil}. \end{cases}$$

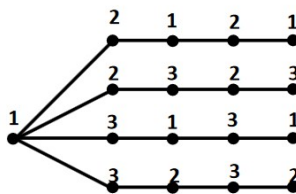
Kode warna dari amalgamasi titik graf lintasan  $_nP_m$  untuk  $a \geq 1$  dan  $m, n \geq 3$  sebagai berikut.

$$c_{\Pi}(u) = \begin{cases} 0; & \text{ordinat ke-1,} \\ 1; & \text{lainnya.} \end{cases}$$

$$c_{\Pi}(v_j^i) = \begin{cases} 0; & \text{ordinat ke-1, } i = 1 + (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ ganjil,} \\ 1; & \text{ordinat ke-1, } i = 1 + (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ genap,} \\ 0; & \text{ordinat ke-}(a+1), (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil < i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil; j \text{ genap,} \\ 1; & \text{ordinat ke-}(a+1), (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil < i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil; j \text{ ganjil,} \\ 0; & \text{ordinat ke-}(a+1), i = a\lceil \sqrt{n} \rceil + a + 1 + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ ganjil,} \\ 1; & \text{ordinat ke-}(a+1), i = a\lceil \sqrt{n} \rceil + a + 1 + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ genap,} \\ 0; & \text{ordinat ke-}(a+2), i = (a+1) + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil, j \text{ ganjil,} \\ 1; & \text{ordinat ke-}(a+2), i = (a+1) + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil, j \text{ genap,} \\ j-1; & \text{ordinat ke-1, } i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1 + (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil\}; i \leq n, j \geq 2, \\ j; & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa setiap titik di  $nP_m$  mempunyai kode warna berbeda. Jadi  $c$  adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya, diperoleh  $\chi_L(nP_m) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$ .  $\square$

Berikut diberikan graf  ${}_4P_5$  dengan bilangan kromatik lokasinya adalah 3.



Gambar. 4. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada  ${}_4P_5$

2.2. *Bilangan kromatik lokasi graf barbel dari graf amalgamasi lintasan  $B(nP_m)$  untuk  $m, n > 3$*

Batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel dari graf amalgamasi lintasan  $B(nP_m)$  untuk  $m, n \geq 3$  dapat dilihat pada teorema berikut ini.

**Teorema 2.2.** *Batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel dari graf amalgamasi lintasan untuk  $m, n \geq 3$  adalah  $\lceil \sqrt{n} \rceil + 2$ .*

**Bukti.** Misalkan  $B(nP_m)$  untuk  $m, n \geq 3$ , dengan himpunan titik  $V(B(nP_m)) = \{u, u', v_j^i, v_{j+1}^{i'} | i = 1, 2, \dots, n; j = 2, 3, \dots, m\}$  dan himpunan sisi  $E(B(nP_m)) = \{uv_j^1, u'v_{j+1}^{1'} | j = 2, 3, \dots, m\} \cup \{v_j^i v_{j+1}^{i'} | i = 1, 2, \dots, n; j = 2, 3, \dots, m-1\} \cup \{uu'\}$ .

Misalkan  $c$  pewarnaan titik menggunakan  $\lceil \sqrt{n} \rceil + 2$  warna untuk  $a \geq 1$  dan  $m, n \geq 3$  sebagai berikut:

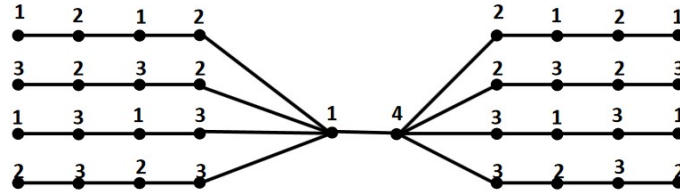
$$\begin{aligned} c(u) &= 1, \\ c(u') &= \lceil \sqrt{n} \rceil + 2, \\ c(v_j^i) &= c(v_j^{i'}) = \begin{cases} a+1; & (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil < i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ genap}, \\ \{1, 2, \dots, \lceil \sqrt{n} \rceil + 1\} \setminus \{a+1\}; & i = (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil + [1, \lceil \sqrt{n} \rceil]; i \leq n, j \text{ ganjil}. \end{cases} \end{aligned}$$

Kode warna dari setiap titik di  $B(nP_m)$  untuk  $a \geq 1$  dan  $m, n \geq 3$  adalah:

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(u) &= \begin{cases} 0; & \text{ordinat ke-1,} \\ 1; & \text{lainnya,} \end{cases} \\ c_{\Pi}(u') &= \begin{cases} 0; & \text{ordinat ke-}\lceil \sqrt{n} \rceil + 2, \\ 1; & \text{lainnya.} \end{cases} \\ c_{\Pi}(v_j^i) &= \begin{cases} 0; & \text{ordinat ke-1, } i = 1 + (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ ganjil,} \\ 1; & \text{ordinat ke-1, } i = 1 + (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ genap,} \\ 0; & \text{ordinat ke-}(a+1), (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil < i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil, j \text{ genap,} \\ 1; & \text{ordinat ke-}(a+1), (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil < i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil, j \text{ ganjil,} \\ 0; & \text{ordinat ke-}(a+1), i = a\lceil \sqrt{n} \rceil + a + 1 + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ ganjil,} \\ 1; & \text{ordinat ke-}(a+1), i = a\lceil \sqrt{n} \rceil + a + 1 + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ genap,} \\ 0; & \text{ordinat ke-}(a+2), i = (a+1) + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil, j \text{ ganjil,} \\ 1; & \text{ordinat ke-}(a+2), i = (a+1) + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil, j \text{ genap,} \\ j-1; & \text{ordinat ke-1, } i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1 + (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil\}; i \leq n, j \geq 2, \\ j; & \text{lainnya.} \end{cases} \\ c_{\Pi}(v_j^{i'}) &= \begin{cases} 0; & \text{ordinat ke-1, } i = 1 + (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ ganjil,} \\ 1; & \text{ordinat ke-1, } i = 1 + (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ genap,} \\ 0; & \text{ordinat ke-}(a+1), (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil < i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil, j \text{ genap,} \\ 1; & \text{ordinat ke-}(a+1), (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil < i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil, j \text{ ganjil,} \\ 0; & \text{ordinat ke-}(a+1), i = a\lceil \sqrt{n} \rceil + a + 1 + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ ganjil,} \\ 1; & \text{ordinat ke-}(a+1), i = a\lceil \sqrt{n} \rceil + a + 1 + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq n, j \text{ genap,} \\ 0; & \text{ordinat ke-}(a+2), i = (a+1) + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil, j \text{ ganjil,} \\ 1; & \text{ordinat ke-}(a+2), i = (a+1) + \sum_{l=0}^n \lceil \sqrt{n} \rceil; i \leq a\lceil \sqrt{n} \rceil, j \text{ genap,} \\ j-1; & \text{ordinat ke-1, } i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1 + (a-1)\lceil \sqrt{n} \rceil\}; i \leq n, j \geq 2, \\ j-1; & \text{ordinat ke-}\lceil \sqrt{n} \rceil + 2, i \in \{1, 2, \dots, n\}; i \leq n, j \geq 2, \\ j; & \text{lainnya.} \end{cases} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa setiap titik di  $B(nP_m)$  mempunyai kode warna berbeda, maka  $c$  merupakan pewarnaan lokasi. Akibatnya,  $\chi_L(B(nP_m)) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil + 2$ .  $\square$

Pada Gambar 5 diberikan contoh pemberian empat warna lokasi pada graf  $B(4P_5)$ .



Gambar. 5. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada  $B(4P_5)$

### 3. Kesimpulan

Batas atas bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan,  $_nP_m$  untuk  $m, n \geq 3$  adalah  $\lceil \sqrt{n} \rceil + 1$ . Selanjutnya, untuk graf barbelnya  $B(_nP_m)$  diperoleh bahwa batas atas bilangan kromatik lokasi adalah  $\lceil \sqrt{n} \rceil + 2$ .

#### 4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Direktorat Riset, Teknologi, dan, Pengabdian kepada Masyarakat (DRTPM) yang telah memberikan Hibah Penelitian Tesis Magister dengan No. Kontrak 057/E5/PG.02.00.PL/2024.

## Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., and Zhang, P., 2002, The Locating Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl*, **59**: 45 – 54
- [2] Chatrand, G., Salehi, E., and Zhang, P., 1998, On partition dimension of graph, *Congr. Numer*, **130**: 157 – 168
- [3] Asmiati, Assiyatun, H., and Bakoro, E.T., 2011, The Locating–Chromatic Number of Amalgamation of Stars, *ITB J. Sci*, **43A(1)**: 89 – 101
- [4] Welyyanti, D., Baskoro, E.T., Simanjutak, R. dan Uttunggadewa, S., 2013, On the locating chromatic number of complete n-ary tree, *AKCE Int. J. Graphs Comb*, **10(3)**: 309 – 315
- [5] Baskoro, E.T., dan Asmiati, 2013, Characterizing all trees with locating-chromatic number 3, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications I*, **2**: 109 – 117
- [6] Welyyanti, D., Baskoro, E.T., Simanjutak, R., dan Uttunggadewa, S., 2015, On locating chromatic number for graphs with dominant vertices, *Procedia Comput. Sci.*, **74**: 89 – 92
- [7] Asmiati, Yana I.K.S.G., and Yulianti, L., 2018, On locating-chromatic number of certain barbel graphs, *International Journal of Mathematical Sciences*, **100(8)**: 1 – 5
- [8] Irawan, A., Asmiati, Zakaria, L., and Muludi, K., 2021, The locating-chromatic number of origami graphs, *Indonesian Journal of Combinatorics*, **14(167)**: 1 – 15
- [9] Damayanti, M., Asmiati, Fitriani, Ansori, and Faradila, A., 2021, The locating chromatic number of some modified path with cycle having locating number four, *Journal of Physics: Conference Series*, **1751**: 1 – 5

- [10] Prawinasti, K., Ansori, M., Asmiati, Notiragayu, and Rofi, A.R.G.N., 2021, The locating chromatic number for split graph of cycle, *Journal of Physics: Conference Series*, **1751**: 1 – 5
- [11] Asmiati, Damayanti, M., and Yulianti, L., 2021, On the locating chromatic number of barbell shadow path graphs, *Indonesian Journal of Combinatorics*, **5(2)**: 82 – 93
- [12] Irawan, A., and Asmiati. 2025, The locating-chromatic number for certain barbell operation on pizza graph and its subdivision, *J. Mat. UNAND*, **14(3)**: 293 – 303