

(STRONG) RAINBOW CONNECTION ON CORONA PRODUCT OF PATH AND COMPLETE GRAPH

ANDRY SULISTYANTO, IKHSANUL HALIKIN, KUSBUDIONO, KRISTIANA WIJAYA*
Graph and Algebra Research Group, Department of Mathematics, FMIPA Universitas Jember
email : andrytyan000@gmail.com, {ikhsan, kusbudiono, kristiana}.fmipa@unej.ac.id

Diajukan 3 Oktober 2024 Direvisi 15 Oktober 2025 Diterima 21 Oktober 2025
 Diterbitkan 31 Oktober 2025

Abstract. *Let G be an edge-colored graph, where adjacent edges may have the same color. A $u - v$ path in G is a rainbow $u - v$ path if no two edges of the $u - v$ path are colored the same. The graph G is called rainbow-connected if G contains a rainbow $u - v$ path for every two vertices u and v of G . The rainbow connection number of a rainbow-connected G is the minimum number of colors in G . A rainbow $u - v$ path is called a rainbow $u - v$ geodesic if it is a rainbow $u - v$ path of length equal to the distance from vertex u to v . The graph G is strongly rainbow-connected if G contains a rainbow $u - v$ geodesic for every two vertices u and v of G . The minimum number of colors of the edges of G such that G is strongly rainbow-connected is the strong rainbow connection number. In this paper, we discuss the (strong) rainbow connection number of the corona product of a path and a complete graph.*

Keywords: Rainbow coloring, rainbow path, (strong) rainbow connection

1. Pendahuluan

Semua graf yang dibahas pada paper ini adalah graf yang tidak memuat *loop* dan sisi ganda. Terlepas dari teori pewarnaan sisi pada graf yang mensyaratkan bahwa sisi yang bertetangga harus mendapatkan warna yang berbeda, topik tentang lintasan pelangi pada graf membebaskan dari aturan tersebut. Permasalahan terkait lintasan pelangi diperkenalkan oleh Chartrand et al. [1] pada tahun 2008. Misalkan G adalah graf terhubung tak-trivial dan sederhana. Pewarnaan pelangi pada G didefinisikan sebagai fungsi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ dengan $\{1, 2, \dots, p\}$ merupakan himpunan p warna untuk suatu bilangan bulat p . Lintasan dari titik u ke v di G dinamakan lintasan pelangi $u - v$ jika tidak ada dua sisi di lintasan $u - v$ memiliki warna yang sama. Graf G dikatakan *terhubung-pelangi* jika G memuat lintasan pelangi $u - v$ untuk setiap dua titik u dan v di G . Minimum warna pada graf terhubung-pelangi G disebut *bilangan terhubung-pelangi*, dinotasikan $rc(G)$ [1].

*Penulis Korespondensi

Lintasan pelangi $u - v$ geodesic adalah lintasan pelangi dengan panjang $d(u, v)$. Jarak dari titik u ke v , dinotasikan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v [2]. Graf G disebut *terhubung-pelangi kuat* jika G memuat lintasan pelangi $u - v$ geodesic untuk setiap dua titik u dan v di G . Minimum warna pada graf terhubung-pelangi kuat G dinamakan *bilangan terhubung-pelangi kuat*, dinotasikan $src(G)$ [1]. Untuk setiap graf terhubung G , berlaku $rc(G) \leq src(G)$ [1].

Chartrand et al. [1] membuktikan bahwa $src(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap K_n , $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$, $rc(G) = |E(G)|$ jika dan hanya jika G adalah pohon, $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil n/2 \rceil$, $rc(W_3) = 1$, $rc(W_n) = 2$ untuk $4 \leq n \leq 6$, dan $rc(W_n) = 3$ untuk $n \geq 7$, $src(W_n) = \lceil n/3 \rceil$. Estetikasari dan Sy [3] menunjukkan bahwa $rc(S_n) = \lceil n/2 \rceil + n$, $rc(F_2) = 1$, $rc(F_n) = 2$ untuk $3 \leq n \leq 6$, dan $rc(F_n) = 3$ untuk $n \geq 7$. Asmara et al. [4] memperoleh bilangan terhubung-pelangi (kuat) dari graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$, yang kemudian Welyyanti et al. [5] memberikan batas atas yang lebih kecil untuk $J_{2,7}$ dan $J_{2,8}$. Beberapa kelas graf yang juga telah dikaji bilangan terhubung-pelangnya, antara lain: graf buku segiempat B_n [6], graf kipas F_n [6], graf tribun $\mathfrak{T}_n$ [6], graf Buckminsterfullerene [7], graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ [8], graf berlian [9], graf $(3K_6 \star W_6, v)$ [10], graf tangga segitiga yang diperumum [11], graf dengan konektivitas 3 [12], amalgamasi graf lengkap dengan graf roda [13], graf $P_n \times K_{2,2}$ dan $P_3 \times C_n$ [14].

Bilangan terhubung-pelangi (kuat) pada beberapa kelas graf hasil operasi korona juga telah dikaji, diantaranya graf hasil operasi korona dua lintasan $P_m \odot P_n$ dan dua lingkaran $C_m \odot C_n$ oleh Maulani et al. [15]. Jagannatharao dan Murali [16] menunjukkan bahwa $rc(P_n \odot K_n) = src(P_n \odot K_n) = 2n - 1$ untuk $n \geq 2$. Selanjutnya, Septyanto [17] membuktikan bahwa $rc(P_n \odot P_2) = n + 2$ untuk $n \geq 3$, $rc(K_n \odot K_m) = src(K_n \odot K_m) = 3$ untuk $n \in \{2, 3\}$, sedangkan untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 2$, $rc(K_n \odot K_m) = 4$ dan $src(K_n \odot K_m) = n$. Adapun *operasi korona dari graf G dan H* , dinotasikan $G \odot H$, didefinisikan sebagai graf yang dibentuk dengan mengambil satu salinan dari G dan $|V(G)|$ salinan dari graf H serta menghubungkan titik ke- i dari G ke setiap titik di H_i untuk $i = 1, 2, \dots, |V(G)|$ [18].

Eksentrisitas titik v pada graf G , dinotasikan dengan $e(v)$, adalah jarak terjauh dari v ke setiap titik di G , yaitu $e(v) = \max\{d(u, v) : \forall u \in V(G)\}$. *Diameter dari graf G* , dinotasikan $diam(G)$, adalah eksentrisitas maksimum dari setiap titik di G , yaitu $diam(G) = \max\{e(v) : v \in V(G)\}$. Diameter graf $P_n \odot K_m$ adalah $n + 1$ (lihat Gambar 1). Lema berikut merupakan hubungan diameter suatu graf dengan bilangan terhubung-pelangi dan bilangan terhubung-pelangi kuat.

Lema 1.1. [1] *Jika G adalah graf terhubung non-trivial dengan m sisi, maka*

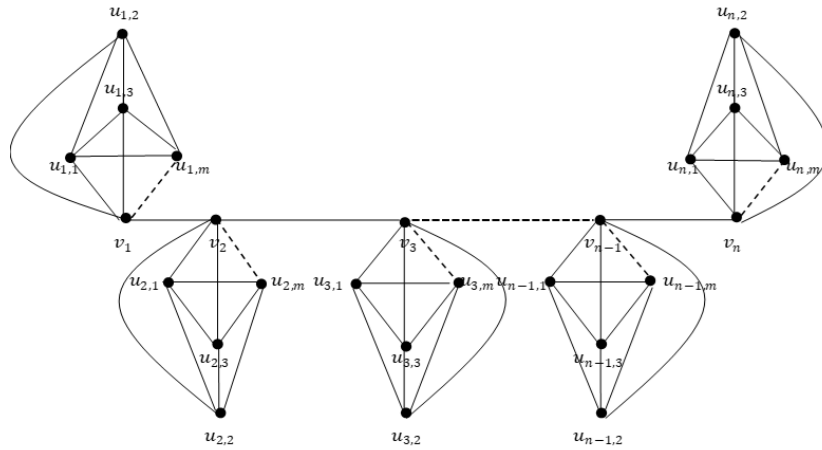
$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

Pada paper Jagannatharao dan Murali [16], graf korona dari graf lintasan P_n dan graf lengkap K_n yang dikaji bilangan terhubung-pelangnya masih terbatas ketika kedua graf mempunyai order yang sama. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk mengkajinya ketika order kedua graf tidak sama. Secara khusus, pada paper

ini dibahas bilangan terhubung-pelangi dari graf hasil operasi korona graf lintasan P_n dan graf lengkap K_m untuk $m \leq 5$ dan bilangan terhubung-pelangi kuat dari $P_n \odot K_m$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$ dan $m \geq 1$.

2. Bilangan terhubung-pelangi graf $P_n \odot K_m$

Misalkan himpunan titik dari graf $P_n \odot K_m$, $V(P_n \odot K_m) = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi dari graf $P_n \odot K_m$, $E(P_n \odot K_m) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_{i,j} u_{i,k} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m, j < k\} \cup \{v_i u_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Sebagai ilustrasi, penotasian titik graf $P_n \odot K_m$ diberikan pada Gambar 1.



Gambar. 1. Penotasian titik graf $P_n \odot K_m$

Pada bagian ini, diberikan bilangan terhubung-pelangi dari graf $P_n \odot K_m$ untuk $2 \leq m \leq 5$.

Akibat 2.1. Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, batas bawah bilangan terhubung-pelangi dari graf $rc(P_n \odot K_m)$ adalah

$$rc(P_n \odot K_m) \geq n + 1.$$

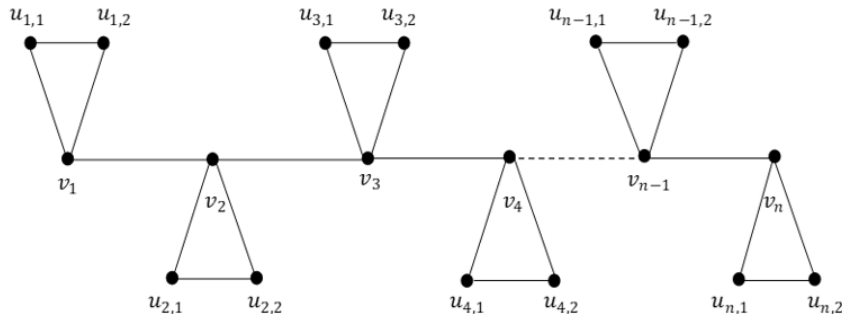
Bukti. Menurut Lema 1.1 diperoleh $rc(P_n \odot K_m) \geq \text{diam}(P_n \odot K_m) = n + 1$. $\square$

Lema 2.2. Untuk setiap $n \geq 3$, bilangan terhubung-pelangi dari graf $P_n \odot K_2$ adalah

$$rc(P_n \odot K_2) = n + 2.$$

Bukti. Pertama akan dibuktikan bahwa $rc(P_n \odot K_2) \geq n + 2$. Misalkan graf $P_n \odot K_2$ mempunyai $n + 1$ warna, maka lintasan-lintasan dengan panjang $n + 1$, mempunyai $n + 1$ warna ini. Perhatikan lintasan $u_{1,1} - u_{n,1}$ (lihat Gambar 2) yang mempunyai panjang $n + 1$ dan sisi $u_{n-1,1} v_{n-1}$. Jelas sisi ini mempunyai warna yang sama dengan

salah satu sisi pada lintasan $u_{1,1} - u_{n,1}$. Akibatnya lintasan $u_{1,1} - u_{n-1,1}$ dengan panjang n atau lintasan $u_{n-1,1} - u_{n,1}$ dengan panjang 3 bukan lintasan pelangi. Oleh karena itu, graf $P_n \odot K_2$ harus mempunyai lebih dari $n + 1$ warna. Dengan demikian $rc(P_n \odot K_2) \geq n + 2$.

Gambar. 2. Graf $P_n \odot K_2$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $rc(P_n \odot K_2) \leq n + 2$. Definisikan pewarnaan $c : E(P_n \odot K_2) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + 2\}$ sebagai berikut.

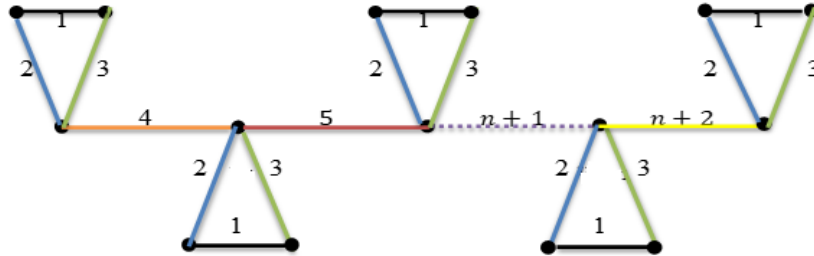
$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = (u_{i,1}, u_{i,2}); i \in [1, n], \\ 2, & \text{untuk } e = (v_i, u_{i,1}); i \in [1, n], \\ 3, & \text{untuk } e = (v_i, u_{i,2}); i \in [1, n], \\ i + 3, & \text{untuk } e = (v_i, v_{i+1}); i \in [1, n - 1]. \end{cases}$$

Pada Tabel 1 diberikan lintasan pelangi $u - v$ untuk setiap dua titik $u, v \in V(P_n \odot K_2)$, dengan u dan v yang tidak saling bertetangga. Dengan demikian $rc(P_n \odot K_2) \leq n + 2$. Jadi, terbukti bahwa $rc(P_n \odot K_2) = n + 2$. $\square$

Tabel 1. Lintasan Pelangi pada Graf $P_n \odot K_2$

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi	Panjang Lintasan
1.	$u_{i,1}$	$u_{j,1}$	$i, j \in [1, n],$ $i < j$	$u_{i,1}, v_i, v_{i+1}, \dots,$ $v_j, u_{j,2}, u_{j,1}$	$j + 2$
2.	$u_{i,1}$	$u_{j,2}$	$i, j \in [1, n],$ $i < j$	$u_{i,1}, v_i, v_{i+1}, \dots,$ $v_j, u_{j,2}$	$j + 1$
3.	$u_{i,2}$	$u_{j,1}$	$i, j \in [1, n],$ $i < j$	$u_{i,1}, v_i, v_{i+1}, \dots,$ $v_j, u_{j,1}$	$j + 1$
4.	$u_{i,2}$	$u_{j,2}$	$i, j \in [1, n],$ $i < j$	$u_{i,1}, v_i, v_{i+1}, \dots,$ $v_j, u_{j,1}, u_{j,2}$	$j + 2$

Gambaran umum pewarnaan sisi dari graf $P_n \odot K_2$ untuk $n \geq 2$ dengan bilangan terhubung-pelanginya diberikan pada Gambar 3.

Gambar. 3. Pewarnaan sisi pada $P_n \odot K_2$ dengan $n + 2$ warna

Lema 2.3. Untuk setiap $n \geq 3$, bilangan terhubung-pelangi dari graf $P_n \odot K_3$ adalah

$$rc(P_n \odot K_3) = n + 1.$$

Bukti. Berdasarkan Akibat 2.1, $rc(P_n \odot K_3) \geq n + 1$. Untuk menunjukkan bahwa $rc(P_n \odot K_3) \leq n + 1$, definisikan pewarnaan $c : E(P_n \odot K_3) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + 1\}$ sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = (v_1, u_{1,j}); j \in [1, 3], \\ 1, & \text{untuk } e = (u_{1,j}, u_{1,k}); j, k \in [1, 3], j < k, \\ 1, & \text{untuk } e = (u_{i,1}, u_{i,2}); i \in [2, n - 2], \\ 1, & \text{untuk } e = (v_{n-1}, u_{n-1,1}); i \in [2, n - 1], \\ 2, & \text{untuk } e = (v_i, u_{i,k}); i \in [2, n - 1], k \in [2, 3], \\ 2, & \text{untuk } e = (u_{n-1,1}, u_{n-1,3}), \\ 3, & \text{untuk } e = (u_{n-1,2}, u_{n-1,3}), \\ n - 1, & \text{untuk } e = (v_i, u_{i,1}); i \in [2, n - 2], \\ n, & \text{untuk } e = (v_i, u_{n-1,k}); i \in [1, n - 1], k \in [2, 3], \\ n, & \text{untuk } e = (u_{i,1}, u_{i,3}); i \in [2, n - 2], \\ n + 1, & \text{untuk } e = (u_{i,2}, u_{i,3}); i \in [2, n - 2], \\ n + 1, & \text{untuk } e = (u_{n-1,1}, u_{n-1,2}); i \in [2, n - 2], \\ i + 1, & \text{untuk } e = (v_i, v_{i+1}); i \in [1, n - 1], \end{cases}$$

Selanjutnya lintasan pelangi dari setiap dua titik $u, v \in V(P_n \odot K_3)$ yang tidak bertetangga, diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2: Lintasan Pelangi pada Graf $P_n \odot K_3$

x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi	Panjang Lintasan
$u_{1,j}$	$u_{i,1}$	$i \in [2, n - 2],$ $j \in [1, 3]$	$u_{1,j}, v_1, \dots, v_i, u_{i,1}$	$i + 1$
$u_{1,j}$	$u_{i,2}$	$i \in [2, n - 2],$	$u_{1,j}, v_1, \dots, v_i, u_{i,1}, u_{i,3}, u_{i,2}$	$i + 3$

x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi	Panjang Lintasan
$u_{1,j}$	$u_{i,3}$	$j \in [1, 3]$ $i \in [2, n-2],$	$u_{1,j}, v_1, \dots, v_i, u_{i,1}, u_{i,3}$	$i+2$
$u_{1,j}$	v_i	$j \in [1, 3]$ $i \in [1, n],$	$u_{1,j}, v_1, \dots, v_i$	i
$u_{1,j}$	$u_{n,j}$	$j \in [1, 3]$ $j \in [1, 3]$	$u_{1,j}, v_1, \dots, v_n, u_{n,j}$	$n+1$
$u_{1,j}$	$u_{n-1,k}$	$j \in [1, 3],$ $k \in [2, 3]$	$u_{1,j}, v_1, \dots, v_{n-1}, u_{n-1,k}$	n
$u_{1,j}$	$u_{n-1,1}$	$j \in [1, 3]$	$u_{1,j}, v_1, \dots, v_{n-1}, u_{n-1,2}, u_{n-1,1}$	n
$u_{i,1}$	$u_{l,k}$	$l \in [2, n-2],$ $i < l, k \in [2, 3]$	$u_{i,1}, v_i, \dots, v_l, u_{l,k}$	$l-i+2$
$u_{i,1}$	$u_{l,1}$	$l \in [2, n-2], i < l$	$u_{i,1}, v_i, \dots, v_l, u_{l,2}, u_{l,1}$	$l-i+3$
$u_{i,k}$	$u_{l,1}$	$l \in [2, n-2],$ $i < l, k \in [2, 3]$	$u_{i,1}, v_i, \dots, v_l, u_{l,1}$	$l-i+2$
$u_{i,k}$	$u_{l,3}$	$l \in [2, n-2],$ $i < l, k \in [2, 3]$	$u_{i,1}, v_i, \dots, v_l, u_{l,1}, u_{l,3}$	$l-i+3$
$u_{i,k}$	$u_{l,2}$	$l \in [2, n-2],$ $i < l, k \in [2, 3]$	$u_{i,1}, v_i, \dots, v_l, u_{l,1}, u_{l,3}, u_{l,4}$	$l-i+4$
$u_{i,1}$	$u_{n-1,1}$	$i \in [2, n-2]$	$u_{i,1}, u_{i,2}, v_i, \dots, u_{n-1,2}, u_{n-1,1}$	$n-i+3$
$u_{i,1}$	$u_{n-1,k}$	$i \in [2, n-2],$ $k \in [2, 3]$	$u_{i,1}, u_{i,2}, v_i, \dots, v_{n-1}, u_{n-1,k}$	$n-i+2$
$u_{i,j}$	$u_{n-1,k}$	$i \in [2, n-2],$ $j, k \in [2, 3]$	$u_{i,j}, v_i, \dots, v_{n-1}, u_{n-1,k}$	$n-i+1$
$u_{i,1}$	$u_{n,j}$	$i \in [2, n-2]$ $j \in [1, 3]$	$u_{i,1}, u_{i,2}, v_i, \dots, v_n, u_{n,k}$	$n-i+3$
$u_{i,k}$	$u_{n,j}$	$i \in [2, n-2],$ $k \in [2, 3]$	$u_{i,k}, v_i, \dots, v_n, u_{n,k}$	$n-i+2$
$u_{n-1,1}$	$u_{n,j}$	$j \in [1, 3]$ $j \in [1, 3]$	$u_{n-1,1}, v_{n-1}, v_n, u_{n,j}$	3
$u_{n-1,2}$	$u_{n,j}$	$j \in [1, 3]$	$u_{n-1,2}, u_{n-1,3}, \dots, v_n, u_{n,j}$	5
$u_{n-1,3}$	$u_{n,j}$	$j \in [1, 3]$	$u_{n-1,3}, u_{n-1,1}, v_{n-1}, v_n, u_{n,j}$	4

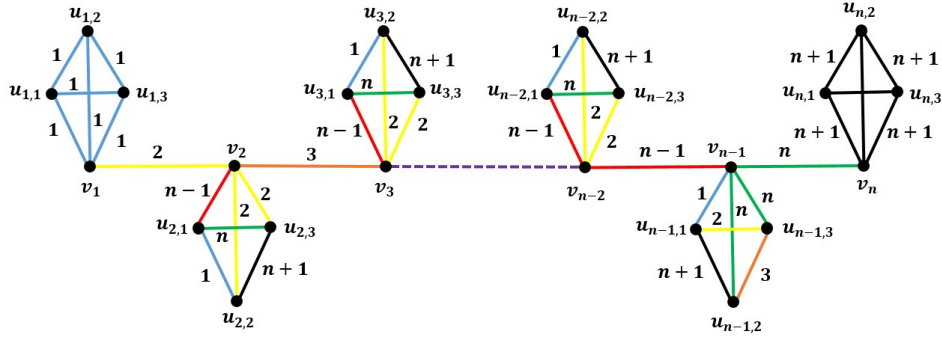
Terbukti bahwa $rc(P_n \odot K_3) \leq n+1$. Jadi $rc(P_n \odot K_3) = n+1$. $\square$

Gambaran umum pewarnaan sisi pada graf $P_n \odot K_3$ dengan $n \geq 3$ dengan $n+1$ warna ditunjukkan pada Gambar 4.

Lema 2.4. Untuk $n \geq 3$, bilangan terhubung-pelangi dari graf $P_n \odot K_4$ adalah

$$rc(P_n \odot K_4) = n+1.$$

Bukti. Berdasarkan Akibat 2.1, $rc(P_n \odot K_4) \geq n+1$. Untuk menunjukkan bahwa $rc(P_n \odot K_4) \leq n+1$, definisikan pewarnaan $c : E(P_n \odot K_4) \rightarrow \{1, 2, \dots, n+1\}$

Gambar. 4. Pewarnaan sisi pada $P_n \odot K_3$ dengan $n + 1$ warna

sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = (v_1, u_{1,j}); j \in [1, 4], \\ 1, & \text{untuk } e = (u_{1,j}, u_{1,k}); j, k \in [1, 4], j < k, \\ 1, & \text{untuk } e = (u_{i,4}, u_{i,2}); i \in [2, n-1], \\ 1, & \text{untuk } e = (v_i, u_{i,k}); i \in [2, n-1], k \in [1, 4], \\ 1, & \text{untuk } e = (u_{i,1}, u_{i,2}); i \in [2, n-1], \\ 1, & \text{untuk } e = (u_{i,j}, u_{i,3}); i \in [2, n-1], j \in [1, 4], \\ i+1, & \text{untuk } e = (v_i, v_{i+1}); i \in [1, n-1], \\ i+1, & \text{untuk } e = (u_{i,1}, u_{i,4}); i \in [2, n-1], \\ i+1, & \text{untuk } e = (u_{i,2}, u_{i,3}); i \in [2, n-1], \\ n+1, & \text{untuk } e = (v_n, u_{n,j}); j \in [1, 4], \\ n+1, & \text{untuk } e = (u_{n,j}, u_{n,k}); j, k \in [1, 4], j < k. \end{cases}$$

Selanjutnya lintasan pelangi dari setiap dua titik $u, v \in V(P_n \odot K_4)$ yang tidak bertetangga, diberikan pada Tabel 3.

Tabel 3: Lintasan Pelangi pada Graf $P_n \odot K_4$

x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi	Panjang Lintasan
$u_{i,j}$	$u_{n,l}$	$i \in [2, n-1],$ $j \in [1, 2], l \in [1, 4]$	$u_{i,j}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, u_{n,l}$	$(n-i) + 2$
$u_{i,j}$	$u_{n,l}$	$i \in [2, n-1],$ $j \in [3, 4], l \in [1, 4]$	$u_{i,j}, u_{i,j-2}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, u_{n,l}$	$(n-i) + 3$
$u_{i,j}$	$u_{k,1}$	$i \in [2, n-1],$ $j \in [1, 2],$ $k \in [3, n-1],$ $i < k$	$u_{i,j}, v_i, v_{i+1}, \dots,$ $v_k, u_{k,4}, u_{k,1}$	$(k-i) + 3$
$u_{i,j}$	$u_{k,1}$	$i \in [2, n-1],$	$u_{i,j}, u_{i,j-2}, v_i, v_{i+1}, \dots,$	$(k-i) + 4$

x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi	Panjang Lintasan
		$j \in [3, 4],$ $k \in [3, n-1],$ $i < k$	$v_k, u_{k,4}, u_{k,1}$	
$u_{i,j}$	$u_{k,2}$	$i \in [2, n-1],$ $j \in [1, 2],$ $k \in [3, n-1],$ $i < k$	$u_{i,j}, v_i, v_{i+1}, \dots,$ $v_k, u_{k,3}, u_{k,2}$	$(k-i)+3$
$u_{i,j}$	$u_{k,2}$	$i \in [2, n-1],$ $j \in [3, 4],$ $k \in [3, n-1],$ $i < k$	$u_{i,j}, u_{i,j-2}, v_i, v_{i+1}, \dots,$ $v_k, u_{k,3}, u_{k,2}$	$(k-i)+4$
$u_{i,j}$	$u_{k,l}$	$i \in [2, n-1],$ $j \in [1, 2],$ $k \in [3, n-1],$ $l \in [3, 4],$ $i < k$	$u_{i,j}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,l}$	k
$u_{i,j}$	$u_{k,l}$	$i \in [2, n-1],$ $j, l \in [3, 4],$ $k \in [3, n-1],$ $i < k$	$u_{i,j}, u_{i,j-2}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,l}$	$k+1$
$u_{1,j}$	$u_{n,l}$	$j \in [1, 4],$ $l \in [1, 4]$	$u_{1,j}, v_1, v_2, \dots, v_n, u_{n,l}$	$n+1$
$u_{1,j}$	$u_{k,1}$	$j \in [1, 4],$ $k \in [2, n-1]$	$u_{1,j}, v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k,4}, u_{k,1}$	$k+2$
$u_{1,j}$	$u_{k,2}$	$j \in [1, 4],$ $k \in [2, n-1]$	$u_{1,j}, v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k,3}, u_{k,2}$	$k+2$
$u_{1,j}$	$u_{k,l}$	$j \in [1, 4],$ $k \in [2, n-1],$ $l \in \{4, 5\}$	$u_{1,j}, v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k,l}$	$k+1$

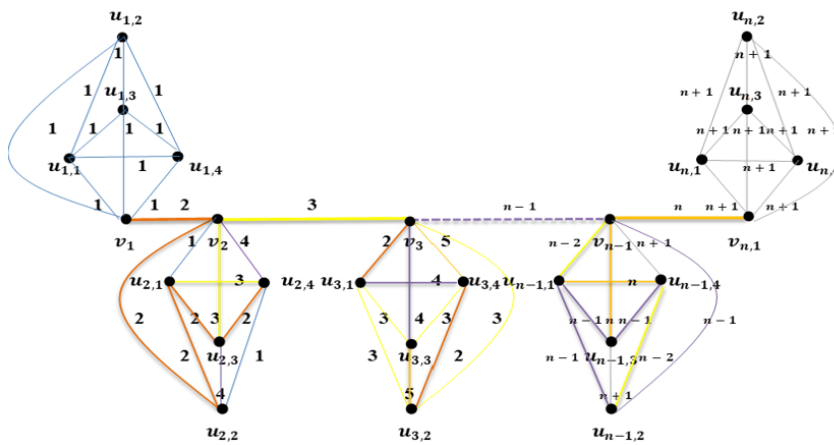
Terbukti bahwa $rc(P_n \odot K_4) \leq n+1$. Jadi $rc(P_n \odot K_4) = n+1$. $\square$

Gambaran umum pewarnaan sisi dari graf $P_n \odot K_4$ dengan $n \geq 3$ dengan $n+1$ warna ditunjukkan pada Gambar 5.

Lema 2.5. Untuk $n \geq 3$, bilangan terhubung-pelangi dari graf $P_n \odot K_5$ adalah

$$rc(P_n \odot K_5) = n+1.$$

Bukti. Menurut Akibat 2.1, $rc(P_n \odot K_5) \geq n+1$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $rc(P_n \odot K_5) \leq n+1$. Pembuktian dapat dilakukan dengan menunjukkan adanya pewarnaan pelangi dan setiap dua titik dari graf $P_n \odot K_5$ mempunyai lintasan pelangi. Definisikan pewarnaan $c : E(P_n \odot K_5) \rightarrow \{1, 2, \dots, n+1\}$ sebagai



Gambar. 5. Pewarnaan sisi pada $P_n \odot K_4$ dengan $n + 1$ warna

berikut.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = (v_1, u_{1,j}); j \in [1, 5], \\ 1, & \text{untuk } e = (u_{1,j}, u_{1,k}); j, k \in [1, 5], j < k, \\ i - 1, & \text{untuk } e = (v_i, u_{i,j}); i \in [2, n - 1], j \in \{2, 4\}, \\ i, & \text{untuk } e = (u_{i,j}, u_{i,k}); i \in [2, n - 1], j \in [2, 3], k \in [4, 5], \\ i + 1, & \text{untuk } e = (v_i, u_{i,1}); i \in [2, n - 1], \\ i + 1, & \text{untuk } e = (v_i, v_{i+1}); i \in [1, n - 1], \\ i + 2, & \text{untuk } e = (v_i, u_{i,j}); i \in [2, n - 1], j \in \{3, 5\}, \\ i + 2, & \text{untuk } e = (u_{i,j}, u_{i,j+1}); i \in [2, n - 1], j \in \{2, 4\}, \\ (i - 2) + (j - 1), & \text{untuk } e = (u_{i,1}, u_{i,j}); i \in [2, n - 1], j \in [2, 5], \\ n + 1, & \text{untuk } e = (v_n, u_{n,j}); j \in [1, 5], \\ n + 1, & \text{untuk } e = (u_{n,j}, u_{n,k}); j, k \in [1, 5], j < k. \end{cases}$$

Lintasan pelangi $u-v$ dari setiap dua titik $u, v \in V(P_n \odot K_5)$ yang tidak bertetangga disajikan pada Tabel 4.

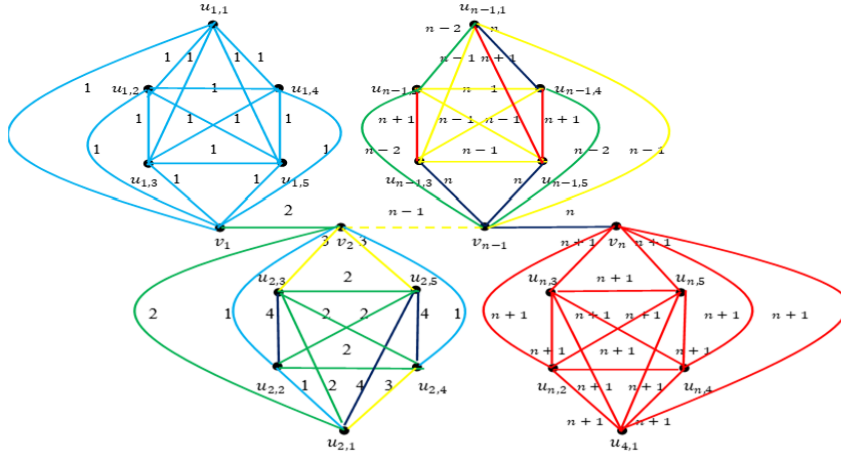
Tabel 4: Lintasan Pelangi pada Graf $P_n \odot K_5$

x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi	Panjang Lintasan
$u_{1,j}$	$u_{n,l}$	$j \in [1, 5],$ $l \in [1, 5]$	$u_{1,j}, v_1, v_2, \dots, v_n, u_{n,l}$	$n + 1$
$u_{1,j}$	$u_{k,l}$	$j \in [1, 5],$ $k \in [2, n - 1],$ $l \in \{3, 5\}$	$u_{1,j}, v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k,l}$	$k + 1$
$u_{1,j}$	$u_{k,1}$	$j \in [1, 5],$ $k \in [2, n - 1]$	$u_{1,j}, v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k,5}, u_{k,1}$	$k + 2$

x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi	Panjang Lintasan
$u_{1,j}$	$u_{k,2}$	$j \in [1, 5],$ $k \in [2, n-1]$	$u_{1,j}, v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k,3}, u_{k,2}$	$k+2$
$u_{1,j}$	$u_{k,4}$	$j \in [1, 5],$ $k \in [2, n-1]$	$u_{1,j}, v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k,5}, u_{k,4}$	$k+2$
$u_{i,j}$	$u_{k,l}$	$i \in [2, n-1],$ $j \in \{1, 2, 4\},$ $k \in [3, n-1],$ $l \in \{3, 5\}, i < k$	$u_{i,j}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,l}$	k
$u_{i,j}$	$u_{k,1}$	$i \in [2, n-1],$ $j \in \{1, 2, 4\},$ $k \in [3, n-1], i < k$	$u_{i,j}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,5}, u_{k,1}$	$k+1$
$u_{i,j}$	$u_{k,2}$	$i \in [2, n-1],$ $j \in \{1, 2, 4\},$ $k \in [3, n-1], i < k$	$u_{i,j}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,3}, u_{k,2}$	$k+1$
$u_{i,j}$	$u_{k,4}$	$i \in [2, n-1],$ $j \in \{1, 2, 4\},$ $k \in [3, n-1], i < k$	$u_{i,j}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,5}, u_{k,4}$	$k+1$
$u_{i,3}$	$u_{k,l}$	$i \in [2, n-1],$ $l \in [3, 5],$ $k \in [3, n-1], i < k$	$u_{i,3}, u_{i,4}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,l}$	$k+1$
$u_{i,3}$	$u_{k,1}$	$i \in [2, n-1],$ $k \in [3, n-1], i < k$	$u_{i,3}, u_{i,4}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,5}, u_{k,1}$	$k+2$
$u_{i,3}$	$u_{k,2}$	$i \in [2, n-1],$ $k \in [3, n-1], i < k$	$u_{i,3}, u_{i,4}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,3}, u_{k,2}$	$k+2$
$u_{i,3}$	$u_{k,4}$	$i \in [2, n-1],$ $k \in [3, n-1], i < k$	$u_{i,3}, u_{i,4}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,5}, u_{k,4}$	$k+2$
$u_{i,5}$	$u_{k,l}$	$i \in [2, n-1],$ $k \in [3, n-1],$ $l \in [3, 5], i < k$	$u_{i,5}, u_{i,2}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,l}$	$k+1$
$u_{i,5}$	$u_{k,1}$	$i \in [2, n-1],$ $k \in [3, n-1], i < k$	$u_{i,5}, u_{i,2}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,5}, u_{k,1}$	$k+2$
$u_{i,5}$	$u_{k,2}$	$i \in [2, n-1],$ $k \in [3, n-1], i < k$	$u_{i,5}, u_{i,2}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,3}, u_{k,2}$	$k+2$
$u_{i,5}$	$u_{k,4}$	$i \in [2, n-1],$ $k \in [3, n-1], i < k$	$u_{i,5}, u_{i,2}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_{k,5}, u_{k,4}$	$k+2$
$u_{i,j}$	$u_{n,l}$	$l \in [1, 5]$	$u_{i,j}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, u_{n,l}$	$(n-i)+2$
$u_{i,j}$	$u_{n,l}$	$l \in [1, 5]$	$u_{i,j}, u_{i,4}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, u_{n,l}$	$(n-i)+3$
$u_{i,j}$	$u_{n,l}$	$l \in [1, 5]$	$u_{i,j}, u_{i,2}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, u_{n,l}$	$(n-i)+3$

Dengan demikian, $rc(P_n \odot K_5) \leq n+1$. Terbukti $rc(P_n \odot K_5) = n+1$. $\square$

Gambaran umum pewarnaan sisi dari graf $P_n \odot K_5$ dengan $n \geq 3$ dengan $n+1$ warna ditunjukkan pada Gambar 6.

Gambar. 6. Pewarnaan sisi pada $P_n \odot K_5$ dengan $n + 1$ warna

3. Bilangan terhubung-pelangi kuat graf $P_n \odot K_m$

Teorema 3.1. Untuk setiap $n \geq 2$ dan $m \geq 1$, bilangan terhubung-pelangi kuat dari graf $P_n \odot K_m$ adalah

$$src(P_n \odot K_m) = 2n - 1.$$

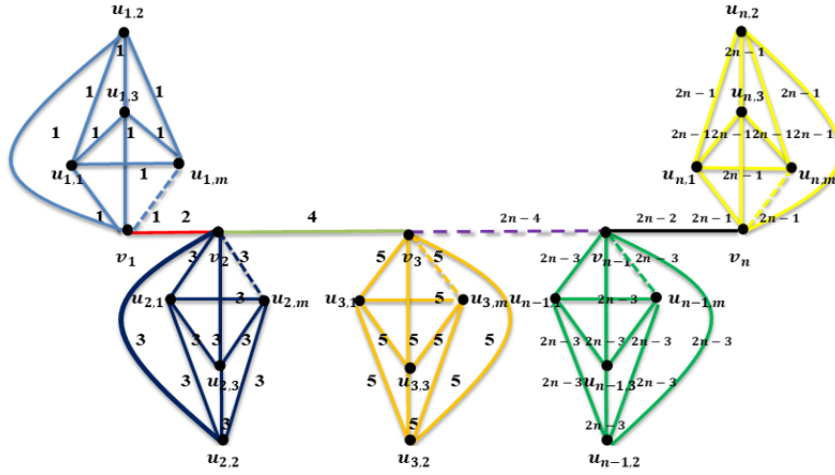
Bukti. Pertama akan ditunjukkan bahwa $src(P_n \odot K_m) \geq 2n - 1$. Andaikan $src(P_n \odot K_m)$ adalah $2n - 2$, maka $P_n \odot K_m$ dapat diwarnai dengan $2n - 2$ warna.

Perhatikan titik $u_{i,j}$ dan v_i dengan $i \in [1, n], j \in [1, m]$ pada Gambar 1. Oleh karena semua titik $u_{i,j}$ dan v_i bertetangga, sehingga semua sisi $u_{i,j}v_i$ hanya membutuhkan satu warna. Agar memenuhi syarat dari strong rainbow connection bahwa setiap dua titik harus memiliki paling sedikit satu lintasan pelangi geodesic, maka sisi-sisi $u_{i,j}v_i$ harus mempunyai warna yang berbeda untuk setiap $i \in [1, n]$. Begitu juga setiap sisi di graf lintasan harus memiliki warna yang berbeda sehingga membutuhkan $n - 1$ warna, serta sisi-sisi di graf lintasan harus memiliki warna yang berbeda dengan sisi-sisi $u_{i,j}v_i$. Dengan demikian, sisi $u_{i,j}v_i$ pasti akan membutuhkan n warna sehingga warna total yang dibutuhkan adalah $2n - 1$ warna. Namun, dengan hanya menggunakan $2n - 2$ warna, mengakibatkan akan ada dua titik yang tidak mempunyai lintasan pelangi geodesic. Jadi terbukti bahwa $src(P_n \odot K_m) \geq 2n - 1$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $src(P_n \odot K_m) \leq 2n - 1$. Misalkan pewarnaan $c' : E(P_n \odot K_m) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$c'(e) = \begin{cases} 2i - 1, & \text{untuk } e = (v_i, u_{i,j}); i \in [1, n], j \in [1, m], \\ 2i, & \text{untuk } e = (v_i, v_{i+1}); i \in [1, n - 1], \\ 1, & \text{untuk } e = (u_{i,j}, u_{i,k}); i \in [1, n], j, k \in [1, m], j < k. \end{cases}$$

Gambaran umum dari pewarnaan sisi pada graf $P_n \odot K_m$ berdasarkan fungsi c' disajikan pada Gambar 7.

Gambar. 7. Pewarnaan sisi dari graf $P_n \odot K_m$ dengan $2n - 1$ warna

Fungsi pewarnaan tersebut juga menunjukkan adanya lintasan pelangi $u - v$ yang geodesic untuk setiap dua titik $u, v \in V(P_n \odot K_m)$ karena sisi-sisi $u_{i,j}$ yang bertetangga dengan v_i dengan $i \in [1, n]; j \in [1, m]$ memiliki warna yang berbeda untuk setiap i dan mempunyai warna yang berbeda dengan sisi-sisi lintasan P_n . Begitu juga dengan warna pada setiap sisi graf lintasan yang berbeda, sehingga pasti setiap dua titik akan memiliki lintasan pelangi geodesic. Jadi, terbukti bahwa $src(P_n \odot K_m) \leq 2n - 1$. Dengan demikian, terbukti bahwa $src(P_n \odot K_m) = 2n - 1$. $\square$

4. Kesimpulan

Untuk setiap $n \geq 3$, bilangan terhubung-pelangi dari graf $P_n \odot K_m$ adalah:

$$rc(P_n \odot K_m) = \begin{cases} n + 2, & \text{untuk } m = 2, \\ n + 1, & \text{untuk } 3 \leq m \leq 5. \end{cases}$$

Berdasarkan penelitian Jagannatharao dan Murali [16], diketahui bahwa $rc(P_n \odot K_n) = 2n - 1$. Dengan demikian, diperoleh $rc(P_3 \odot K_3) = 5, rc(P_4 \odot K_4) = 7$, dan $rc(P_5 \odot K_5) = 9$. Hasil penelitian ini memberikan nilai yang lebih baik untuk bilangan terhubung-pelangi dari graf $P_n \odot K_n$ untuk $n \in \{3, 4, 5\}$, yaitu $rc(P_3 \odot K_3) = 4, rc(P_4 \odot K_4) = 5$, dan $rc(P_5 \odot K_5) = 6$. Bilangan terhubung-pelangi dari graf $P_n \odot K_m$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 6$ merupakan topik yang potensial untuk penelitian lanjutan.

Bilangan terhubung-pelangi kuat dari graf $P_n \odot K_m$, untuk setiap $n \geq 2$ dan $m \geq 1$, tidak bergantung pada banyak titik graf lengkap K_m , tetapi hanya pada banyak titik graf lintasan P_n , yaitu

$$src(P_n \odot K_m) = 2n - 1.$$

Penelitian ini melengkapi hasil dari Jagannatharao dan Murali [16]. Dengan demikian, bilangan terhubung-pelangi kuat dari graf $P_n \odot K_m$ telah tuntas dikaji.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Graph and Algebra Research Group, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember atas dukungan yang diberikan.

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G., Johns, G. L., Mc Keon, K. A., dan Zhang, P., 2008, Rainbow connection in graphs. *Mathematica bohemia*, **133(1)**: 85 – 98
- [2] Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P., 2016, *Graphs & Digraphs (6th ed.)*, Britania Raya: Taylor & Francis Group, LLC.
- [3] Estetikasari, D. dan Sy, S., 2013, On the rainbow connection for some corona graphs, *Applied Mathematical Sciences*, **7(100)**: 4975 – 4980.
- [4] Asmara, D. N., Sy, S., dan Effendi, 2018, Bilangan rainbow connection dan strong rainbow connection graf Jahangir $J_{2,m}$, *Jurnal Matematika UNAND*, **7(1)**: 64 – 69
- [5] Welyyanti, D., Randa, M., dan Yulianti, L., 2023, Bilangan rainbow connection dan strong rainbow connection graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$, *Jurnal Matematika UNAND*, **12(1)**: 55 – 64
- [6] Anggalia, F., 2017, Penentuan rainbow connection number pada graf buku segiempat, graf kipas, dan graf tribun, *Jurnal Matematika UNAND*, **6(1)**: 153 – 160
- [7] Anggalia, F., Yulianti, L., dan Welyyanti, D., 2022, Batas atas rainbow connection number pada graf Buckminsterfullerene, *Jurnal Matematika UNAND*, **11(1)**: 1 – 11
- [8] Aryani, S. B., Yulianti, L., dan Sy, S., 2018, Batas atas bilangan rainbow connection untuk graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$, *Jurnal Matematika UNAND*, **7(1)**: 143 – 148
- [9] Dessyluviani, S. R., 2017, Penentuan rainbow connection number dan strong rainbow connection number pada graf berlian, *Jurnal Matematika UNAND*, **6(3)**: 93 – 99
- [10] Fadillah, F., Yulianti, L., dan Sy, S., 2018, Rainbow connection number pada graf $(3K_6 \star W_6, v)$, *Jurnal Matematika UNAND*, **7(3)**: 43 – 46
- [11] Fitrianda, S., Yulianti, L., dan Narwen, (2018), Rainbow connection number dan strong rainbow connection number pada graf tangga segitiga yang diperumum, *Jurnal Matematika UNAND*, **7(1)**: 125 – 135
- [12] Putri, P. R., 2016, Batas atas rainbow connection number pada graf dengan konektivitas 3, *Jurnal Matematika UNAND*, **5(4)**: 45 – 53
- [13] Utari, R. H., Yulianti, L., dan Sy, S., 2019, Penentuan rainbow connection number untuk amalgamasi graf lengkap dengan graf roda, *Jurnal Matematika UNAND*, **8(1)**: 345 – 347
- [14] Yuri, R., 2017, Penentuan rainbow connection number pada hasil operasi cartesian product terhadap graf lingkaran dan graf bipartit lengkap dengan graf lintasan, *Jurnal Matematika UNAND*, **6(1)**: 148 – 152
- [15] Maulani, A., Pradini, S., Setyorini, D., dan Sugeng, K. A., 2019, Rainbow connection number of $C_m \circ P_n$ and $C_m \circ C_n$, *Indonesian Journal of Combinatorics*, **3(2)**: 95 – 108
- [16] Jagannatharao, K. S. dan Murali, R., 2019, Rainbow Coloring in Some Corona Product Graphs. *Malaya Journal of Matematik*, **7(1)**: 127 – 131

- [17] Septyanto, F., 2024, Rainbow connection number of corona product of graphs, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, **12(2)**: 363 – 378
- [18] Harary, F. dan Frucht, R., 1970, *On The Corona of Two Graphs*, *Aequationes Mathematicae* Vol. **14**: 322 – 325