

ANALYSIS OF SOLVING THE BLACK-SCHOLES EQUATION USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD WITH A NON-UNIFORM GRID

MANISYA BULANDARI, MAHDHIVAN SYAFWAN*, YUDIANTRI ASDI

*Departemen Matematika dan Sains Data,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
email : mahdhivan@sci.unand.ac.id*

Diajukan 8 November 2024 Direvisi 26 Oktober 2025 Diterima 28 Oktober 2025
Diterbitkan 31 Oktober 2025

Abstrak. Artikel ini mengimplementasikan metode beda hingga dengan skema eksplisit berbasis *grid* tidak seragam pada persamaan Black–Scholes untuk menghitung harga opsi *call* Eropa. Skema diturunkan menggunakan deret Taylor sehingga diperoleh sistem persamaan beda yang kemudian ditransformasikan ke dalam bentuk matriks dan diselesaikan secara rekursif melalui pemrograman Matlab. Berdasarkan simulasi numerik untuk nilai-nilai parameter tertentu, hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa skema beda hingga dengan *grid* tidak seragam menghasilkan solusi yang lebih akurat dibandingkan *grid* seragam. Galat relatif lebih besar untuk harga saham yang berada di sekitar harga pelaksanaan, tetapi dapat dikurangi secara signifikan melalui penggunaan *grid* tidak seragam. Selain itu, pendekatan *grid* tidak seragam memberikan efisiensi komputasi yang lebih baik dibandingkan skema seragam.

Kata Kunci: Persamaan Black–Scholes, opsi *call*, metode beda hingga, *grid* tak seragam

Abstract. In this article, an explicit finite difference scheme on non-uniform grids is implemented for solving the Black–Scholes equation in order to evaluate European call option prices. The finite difference construction is based on the Taylor series so that a discrete system is obtained, transformed into matrix form and then solved recursively using Matlab. Numerical experiments for certain parameter values show that the finite difference scheme on a non-uniform grid produces more accurate solutions than a uniform grid. The error is larger for stock prices near the strike price but can be significantly reduced by employing a non-uniform grid. Moreover, the non-uniform grid yields more efficient computation time compared to a uniform grid.

Keywords: Black–Scholes equation, call option, finite difference method, non-uniform grid

*Penulis korespondensi

1. Pendahuluan

Model Black-Scholes merupakan persamaan diferensial parsial yang memodelkan nilai opsi sebagai fungsi terhadap saham dan waktu, dengan memperhitungkan berbagai faktor, seperti harga pelaksanaan, tingkat suku bunga bebas risiko, waktu jatuh tempo, dan nilai volatilitas harga saham [1]. Model ini diperkenalkan pertama kali oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973, dan telah menjadi standar yang banyak digunakan dan diterima secara luas di industri keuangan [2]. Pengantar komprehensif mengenai valuasi opsi melalui pendekatan matematis dapat merujuk dari [3].

Meskipun persamaan Black-Scholes dapat diselesaikan secara eksak, namun dalam praktik keuangan, pendekatan numerik seringkali diperlukan. Salah satu alasannya adalah karena parameter pasar seperti volatilitas dan suku bunga sering berubah secara dinamis, sehingga pendekatan numerik memungkinkan penyesuaian yang lebih baik dan lebih cepat pada kondisi pasar riil [4]. Pendekatan numerik juga memungkinkan untuk memasukkan kompleksitas tambahan, sehingga lebih fleksibel untuk digunakan dalam portofolio besar dengan berbagai jenis opsi [5].

Berbagai pendekatan numerik telah dikembangkan untuk meningkatkan efisiensi dan stabilitas perhitungan. Misalnya, Banerjee dkk. [6] mengusulkan metode garis (*method of lines*) yang mereduksi persamaan Black-Scholes menjadi sistem ODE untuk memperoleh solusi yang efisien dan sensitif terhadap perubahan parameter. Baru-baru ini Nizamudheen dkk. [7] memperkenalkan skema diferensial kuadratur berbasis kubik B-spline dengan diskretisasi waktu metode beda hingga pada model Black-Scholes fraksional, dan membuktikan stabilitas serta konvergensinya.

Di antara berbagai pendekatan numerik, metode beda hingga merupakan salah satu teknik yang paling populer karena sederhana, fleksibel, dan mudah diimplementasikan untuk berbagai kondisi batas. Dura dan Mosneagu [8] menunjukkan bahwa metode beda hingga merupakan salah satu pendekatan numerik yang efektif untuk menyelesaikan persamaan Black-Scholes. Pada metode ini domain fungsi dipartisi atas sejumlah titik-titik *grid* dan hampiran untuk turunan pada persamaan diferensial diperoleh dari ekspansi deret Taylor.

Pada umumnya metode beda hingga lebih sering menggunakan titik-titik *grid* dengan lebar yang seragam. Namun pada kasus persamaan diferensial tertentu, penggunaan lebar *grid* yang seragam justru menghasilkan solusi yang kurang akurat dibandingkan penggunaan *grid* dengan lebar tidak seragam [9]. Metode beda hingga dengan *grid* yang tidak seragam juga terbukti efektif dalam mengurangi waktu komputasi, sehingga solusi dapat diperoleh lebih cepat dengan akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan penggunaan *grid* seragam [10].

Dalam penerapan metode ini pada persamaan Black-Scholes, terdapat kendala pada syarat awal yang tidak memiliki turunan saat harga saham S sama dengan harga pelaksanaan K . Kesalahan numerik yang muncul akibat kondisi ini dapat diminimalisir dengan menggunakan *grid* tidak seragam, di mana titik-titik diskritisasi pada domain harga saham ditempatkan lebih rapat di sekitar harga pelaksanaan K . Selain itu, adalah wajar untuk memiliki banyak titik di sekitar harga pelaksanaan K , karena wilayah inilah yang menjadi fokus perhitungan harga opsi bagi praktisi

keuangan [11].

Secara teoritis, penggunaan grid tidak seragam memiliki dasar kuat. Travella dan Randall [12] memperkenalkan transformasi *grid* tidak seragam yang kemudian dikembangkan lebih lanjut oleh Bodeau dkk. [13] melalui penyusunan algoritma skema beda hingga yang lebih efisien. Selain itu, penelitian oleh in't Hout dan Volders [11] memberikan kontribusi penting dalam menganalisis kestabilan skema beda hingga *grid* tidak seragam pada persamaan Black-Scholes.

Dalam artikel ini akan dieksplorasi kembali penelitian Bodeau dkk. [13] dengan memberikan penjelasan yang lebih rinci mengenai proses penurunan skema beda hingga yang diterapkan pada persamaan Black-Scholes, serta menunjukkan relevansinya terhadap efisiensi dan akurasi solusi numerik pada model opsi Eropa.

2. Persamaan Black-Scholes

Persamaan Black-Scholes merupakan persamaan diferensial parsial yang menjadi model standar dalam penentuan nilai opsi, terutama opsi Eropa [3]. Dalam perhitungannya, model Black-Scholes mengasumsikan tidak adanya pembayaran dividen, tidak ada biaya transaksi, suku bunga bebas risiko yang konstan, dan perubahan harga saham mengikuti gerak Brown geometris [14].

Persamaan Black-Scholes dalam memodelkan harga opsi Eropa $V(S, t)$ sebagai fungsi terhadap harga saham S dan waktu t , diberikan oleh [1]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad 0 \leq t \leq T, S \geq 0, \quad (2.1)$$

dimana r adalah suku bunga bebas resiko dan σ adalah volatilitas harga saham. Dalam hal ini, $V(S, t)$ dapat berupa harga opsi *call* $C(S, t)$ atau harga opsi *put* $P(S, t)$.

Solusi eksak persamaan Black-Scholes untuk masing-masing harga opsi *call* dan harga opsi *put* adalah [14]:

$$C(S, t) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (2.2)$$

dan

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1), \quad (2.3)$$

dimana K adalah harga pelaksanaan (*strike price*), T adalah waktu jatuh tempo, $N(d)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal standar, yaitu:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

dan

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Untuk kasus opsi *call*, persamaan Black-Scholes (2.1) ditulis menjadi

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(S, t) - rC(S, t) = 0, \quad (2.4)$$

dengan $0 \leq t \leq T$ dan $S \geq 0$.

Syarat akhir (untuk t) persamaan (2.4) diberikan oleh

$$C(S, T) = \max(S(T) - K, 0). \quad (2.5)$$

Syarat batas Dirichlet (untuk S) persamaan (2.4) diberikan oleh:

- Untuk $S = 0$:

$$C(0, t) = 0. \quad (2.6)$$

- Untuk $S \rightarrow \infty$:

$$C(S, t) \approx S. \quad (2.7)$$

Karena persamaan Black-Scholes (2.4) memiliki syarat akhir (2.5), maka persamaan (2.4) dikenal sebagai persamaan parabolik mundur. Untuk mengubah persamaan Black-Scholes (2.4) menjadi persamaan parabolik maju, yaitu memiliki syarat awal, diperkenalkan transformasi [8]:

$$C(S, t) = \tilde{C}(S, k), \quad \text{dengan } k = T - t. \quad (2.8)$$

Dengan menggunakan transformasi (2.8), maka dengan aturan rantai diperoleh:

$$\frac{\partial C(S, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{C}(S, k)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{C}(S, k)}{\partial k} \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \tilde{C}(S, k)}{\partial k}. \quad (2.9)$$

Perhatikan bahwa pada saat $t = T$, maka $k = 0$. Dengan demikian pada saat $t = T$ berlaku:

$$C(S, T) = \tilde{C}(S, 0) = \max(S(0) - K, 0). \quad (2.10)$$

Dengan mensubstitusikan transformasi (2.8) dan persamaan (2.9) ke persamaan (2.4), kemudian ganti kembali variabel $\tilde{C}$ menjadi C dan k menjadi t , maka persamaan (2.4) dapat diubah menjadi:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S, t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) - rS \frac{\partial C}{\partial S}(S, t) + rC(S, t) = 0, \quad (2.11)$$

dimana syarat akhir (2.5) menjadi syarat awal

$$C(S, 0) = \max(S(0) - K, 0). \quad (2.12)$$

3. Konstruksi Numerik Skema Beda Hingga

Pada bagian ini akan dibahas konstruksi numerik untuk skema beda hingga dengan grid tidak seragam pada persamaan Black-Scholes (2.11) dengan syarat awal (2.12) dan syarat batas (2.6) dan (2.7).

3.1. Diskritisasi Ruang

Pada skema beda hingga ini, interval waktu $[0, T]$ dipartisi menjadi M bagian, dimana setiap partisi memiliki lebar sebesar $\Delta t_m = t_m - t_{m-1}$, $m = 1, 2, \dots, M$. Sementara itu, harga saham berada pada interval tak terbatas $[0, \infty)$. Namun, untuk keperluan simulasi perhitungan yang akan dilakukan, harga saham S akan dibatasi sampai S_{maks} . Selanjutnya interval harga saham $[0, S_{\text{maks}}]$ dipartisi menjadi N bagian, dimana setiap partisi memiliki lebar sebesar $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Dengan demikian ruang $[0, S_{\text{maks}}] \times [0, T]$, didiskritisasi oleh *grid*:

$$(S_i, t_m) \in [0, S_{\text{maks}}] \times [0, T], \quad (3.1)$$

dengan $i = 0, 1, \dots, N$ dan $m = 0, 1, \dots, M$.

Aproksimasi numerik dari $C(S_i, t_m)$, yaitu nilai opsi *call* pada harga saham S_i dan waktu t_m , dinyatakan dengan notasi C_i^m . Diskritisasi untuk syarat awal diberikan

$$C_i^0 = \max(S_i - K, 0), \quad \text{untuk } i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Kemudian diskritisasi untuk syarat batas sebagai berikut:

- Untuk $S = 0$:

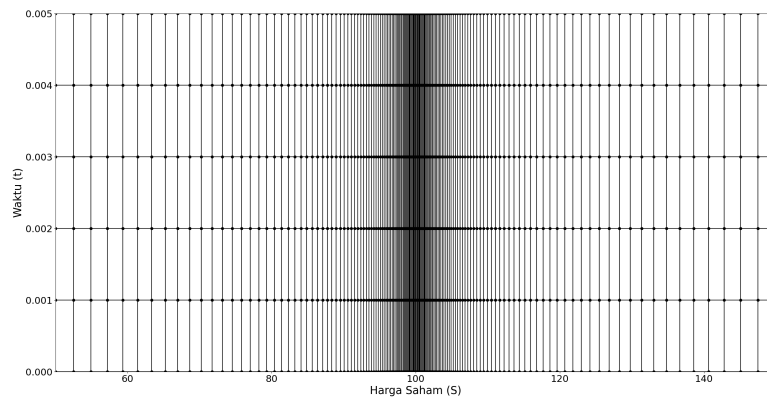
$$C_0^m = 0, \quad \text{untuk } m = 0, 1, \dots, M. \quad (3.3)$$

- Untuk $S \rightarrow \infty$:

$$C_N^m = S_{\text{maks}}, \quad \text{untuk } m = 0, 1, \dots, M. \quad (3.4)$$

3.2. Skema Eksplisit untuk Grid Tidak Seragam

Pada skema ini, lebar partisi untuk masing-masing domain harga saham dan waktu adalah $h_i = S_i - S_{i-1}$ dan $\Delta t = t_m - t_{m-1}$, artinya partisi waktu t memiliki lebar interval yang sama, sedangkan partisi harga saham S memiliki lebar interval yang tidak seragam. Visualisasi dari *grid* tidak seragam dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. *Grid* Tidak Seragam

Distribusi titik-titik partisi untuk S mengikuti bentuk yang diusulkan oleh Travella dan Randall (2000) [12]. Distribusi titik partisi S_i pada bentuk ini dilakukan dengan menempatkan titik-titik S_i lebih rapat di sekitar titik kritis x^* , yaitu diberikan oleh:

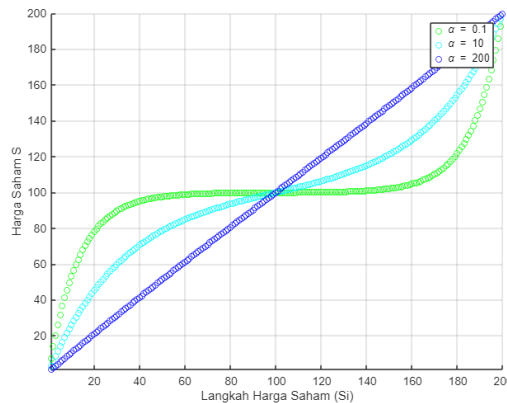
$$S_i = x^* + \alpha \left(c_2 \frac{i}{N} + c_1 \left(1 - \frac{i}{N} \right) \right), \quad (3.5)$$

dimana:

$$c_1 = \sinh^{-1} \left(\frac{S_{\min} - x^*}{\alpha} \right), \quad (3.6)$$

$$c_2 = \sinh^{-1} \left(\frac{S_{\max} - x^*}{\alpha} \right). \quad (3.7)$$

Dalam konteks aplikasi pada persamaan Black-Scholes (2.11), titik kritis $x^* = K$ dan $S_{\min} = 0$. Parameter α menentukan tingkat keseragam *grid*, yang mana semakin besar nilai α maka semakin seragam *grid* yang dihasilkan. Perbandingan tingkat keseragaman *grid* berdasarkan nilai α ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Transformasi Bentuk *Grid* untuk Tiga Nilai α Berbeda.

3.3. Aproksimasi Turunan

Untuk mengaproksimasi turunan numerik pada skema ini, digunakan aproksimasi beda maju untuk turunan terhadap t , dan aproksimasi beda pusat untuk turunan pertama dan kedua terhadap S . Aproksimasi beda hingga ini diperoleh dari deret Taylor.

Aproksimasi turunan terhadap waktu t dengan skema beda maju diberikan oleh

$$\frac{\partial C(S, t)}{\partial t} \approx \frac{C_i^{m+1} - C_i^m}{\Delta t}. \quad (3.8)$$

Selanjutnya untuk aproksimasi turunan pertama terhadap S dengan skema beda

pusat diberikan oleh

$$\frac{\partial C(S_i, t_m)}{\partial S} \approx \frac{C(S_{i+1}, t_m) - C(S_{i-1}, t_m)}{S_{i+1} - S_{i-1}}, \quad (3.9)$$

$$= \frac{C_{i+1}^m - C_{i-1}^m}{S_{i+1} - S_{i-1}}. \quad (3.10)$$

Untuk memperoleh aproksimasi turunan kedua terhadap S dengan skema beda pusat, perhatikan deret Taylor untuk $C(S_{i+1}, t_m)$ dan $C(S_{i-1}, t_m)$ sampai orde 4 di sekitar S_i berikut.

$$C(S_{i+1}, t_m) \approx C(S_i, t_m) + h_{i+1} \frac{\partial C(S_i, t_m)}{\partial S} + \frac{1}{2} h_{i+1}^2 \frac{\partial^2 C(S_i, t_m)}{\partial S^2} + \frac{1}{6} h_{i+1}^3 \frac{\partial^3 C(S_i, t_m)}{\partial S^3}, \quad (3.11)$$

$$C(S_{i-1}, t_m) \approx C(S_i, t_m) - h_i \frac{\partial C(S_i, t_m)}{\partial S} + \frac{1}{2} h_i^2 \frac{\partial^2 C(S_i, t_m)}{\partial S^2} - \frac{1}{6} h_i^3 \frac{\partial^3 C(S_i, t_m)}{\partial S^3}. \quad (3.12)$$

Kalikan persamaan (3.11) dengan h_i dan kalikan persamaan (3.12) dengan h_{i+1} , diperoleh:

$$h_i C(S_{i+1}, t_m) \approx h_i C(S_i, t_m) + h_i h_{i+1} \frac{\partial C(S_i, t_m)}{\partial S} + \frac{1}{2} h_i h_{i+1}^2 \frac{\partial^2 C(S_i, t_m)}{\partial S^2}, \quad (3.13)$$

$$h_{i+1} C(S_{i-1}, t_m) \approx h_{i+1} C(S_i, t_m) - h_{i+1} h_i \frac{\partial C(S_i, t_m)}{\partial S} + \frac{1}{2} h_{i+1} h_i^2 \frac{\partial^2 C(S_i, t_m)}{\partial S^2}. \quad (3.14)$$

Jumlahkan persamaan (3.13) dan persamaan (3.14) sehingga diperoleh

$$h_i C_{i+1}^m + h_{i+1} C_{i-1}^m \approx (h_i + h_{i+1}) C_i^m + \frac{1}{2} (h_{i+1}^2 h_i + h_i^2 h_{i+1}) \frac{\partial^2 C_i^m}{\partial S^2}, \quad (3.15)$$

sehingga didapatkan ekspresi untuk hampiran turunan kedua sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_i^m}{\partial S^2} &\approx 2 \frac{h_i (C_{i+1}^m - C_i^m) + h_{i+1} (C_{i-1}^m - C_i^m)}{h_i h_{i+1}^2 + h_i^2 h_{i+1}}, \\ &= 2 \frac{h_i (C_{i+1}^m - C_i^m) - h_{i+1} (C_i^m - C_{i-1}^m)}{h_i h_{i+1} (h_{i+1} + h_i)}, \\ &= 2 \left[\frac{h_i (C_{i+1}^m - C_i^m)}{h_i h_{i+1} (h_{i+1} + h_i)} - \frac{h_{i+1} (C_i^m - C_{i-1}^m)}{h_i h_{i+1} (h_{i+1} + h_i)} \right], \\ &= 2 \left[\frac{(C_{i+1}^m - C_i^m)}{h_{i+1} (h_{i+1} + h_i)} - \frac{(C_i^m - C_{i-1}^m)}{h_i (h_{i+1} + h_i)} \right]. \end{aligned}$$

Misalkan:

$$h_i^+ = \frac{2}{h_{i+1} (h_{i+1} + h_i)},$$

$$h_i^- = \frac{2}{h_i (h_{i+1} + h_i)},$$

maka diperoleh bentuk yang lebih sederhana untuk ekspresi hampiran turunan kedua berikut:

$$\frac{\partial^2 C(S_i, t_m)}{\partial S^2} \approx h_i^+ (C_{i+1}^m - C_i^m) - h_i^- (C_i^m - C_{i-1}^m). \quad (3.16)$$

3.4. Persamaan Beda dan Bentuk Matriks

Substitusi masing-masing hampiran (3.8), (3.10), dan (3.16) ke dalam persamaan Black-Scholes (2.11), maka diperoleh bentuk diskritisasi saat (S_i, t_m) sebagai berikut:

$$\frac{C_i^{m+1} - C_i^m}{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 [h_i^+(C_{i+1}^m - C_i^m) - h_i^-(C_i^m - C_{i-1}^m)] - rS_i \frac{C_{i+1}^m - C_{i-1}^m}{S_{i+1} - S_{i-1}} + rC_i^m = 0. \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) dapat ditulis:

$$C_i^{m+1} = C_i^m + \Delta t \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 (h_i^+(C_{i+1}^m - C_i^m) - h_i^-(C_i^m - C_{i-1}^m)) + rS_i \frac{C_{i+1}^m - C_{i-1}^m}{h_{i+1} + h_i} - rC_i^m \right], \quad (3.18)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, N-1$ dan $m = 0, 1, \dots, M-1$.

Selanjutnya kelompokkan sisi kanan persamaan (3.18) berdasarkan koefisien C_{i+1}^m, C_i^m , dan C_{i-1}^m , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} C_i^{m+1} = C_i^m + \Delta t & \left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 h_i^- - \frac{rS_i}{h_{i+1} + h_i} \right) C_{i-1}^m \right. \\ & - \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 (h_i^+ + h_i^-) + r \right) C_i^m \\ & \left. + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 h_i^+ + \frac{rS_i}{h_{i+1} + h_i} \right) C_{i+1}^m \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, N-1$ dan $m = 0, 1, \dots, M-1$.

Untuk penyederhanaan notasi, misalkan

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 h_i^- - \frac{rS_i}{h_{i+1} + h_i}, \quad (3.20)$$

$$\beta_i = \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 (h_i^+ + h_i^-) + r, \quad (3.21)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 h_i^+ + \frac{rS_i}{h_{i+1} + h_i}, \quad (3.22)$$

sehingga persamaan (3.19) menjadi

$$C_i^{m+1} = (\alpha_i \Delta t) C_{i-1}^m + (1 - \beta_i \Delta t) C_i^m + (\gamma_i \Delta t) C_{i+1}^m, \quad (3.23)$$

untuk setiap $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Persamaan (3.23) dapat dibentuk menjadi sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad C_1^{m+1} &= (-\alpha_1 \Delta t) C_0^m + (1 - \beta_1 \Delta t) C_1^m + (\gamma_1 \Delta t) C_2^m, \\ i = 2 : \quad C_2^{m+1} &= (-\alpha_2 \Delta t) C_1^m + (1 - \beta_2 \Delta t) C_2^m + (\gamma_2 \Delta t) C_3^m, \\ &\vdots \\ i = N-2 : \quad C_{N-2}^{m+1} &= (-\alpha_{N-2} \Delta t) C_{N-3}^m + (1 - \beta_{N-2} \Delta t) C_{N-2}^m + (\gamma_{N-2} \Delta t) C_{N-1}^m, \\ i = N-1 : \quad C_{N-1}^{m+1} &= (-\alpha_{N-1} \Delta t) C_{N-2}^m + (1 - \beta_{N-1} \Delta t) C_{N-1}^m + (\gamma_{N-1} \Delta t) C_N^m. \end{aligned}$$

Selanjutnya misalkan

$$\begin{aligned} d_i &= 1 - \beta_i \Delta t, & i &= 1, 2, \dots, N-1, \\ u_i &= \gamma_i \Delta t, & i &= 2, 3, \dots, N, \\ l_i &= \alpha_i \Delta t, & i &= 0, 1, \dots, N-2. \end{aligned}$$

Dengan demikian, sistem persamaan linier di atas dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks berikut:

$$\mathbf{C}^{m+1} = \mathbf{B}\mathbf{C}^m + \mathbf{z}^m, \quad m = 0, 1, \dots, M-1, \quad (3.24)$$

dimana:

$$\mathbf{C}^{m+1} = \begin{bmatrix} C_1^{m+1} \\ C_2^{m+1} \\ \vdots \\ C_{N-2}^{m+1} \\ C_{N-1}^{m+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^m = \begin{bmatrix} C_1^m \\ C_2^m \\ \vdots \\ C_{N-2}^m \\ C_{N-1}^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{m-1} = \begin{bmatrix} C_1^{m-1} \\ C_2^{m-1} \\ \vdots \\ C_{N-2}^{m-1} \\ C_{N-1}^{m-1} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} d_1 & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & -d_2 & u_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -u_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & l_{N-2} & -d_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

dan

$$\mathbf{z}^m = \begin{bmatrix} l_0 C_0^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_N C_N^m \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

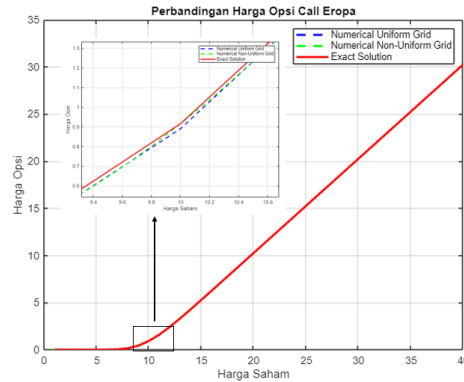
Perhatikan bahwa $\mathbf{C}^{m+1}, \mathbf{C}^m, \mathbf{C}^{m-1}, \mathbf{z}^m \in \mathbb{R}^{(N-1)}$ dan $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$.

Nilai-nilai dari C_i^0, C_0^m, C_N^m dengan $i = 0, 1, \dots, N$ dan $m = 0, 1, \dots, M$ diberikan masing-masing oleh persamaan (3.2), (3.3), dan (3.4).

4. Eksperimen Numerik

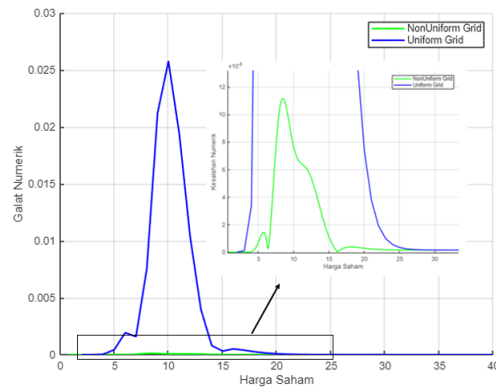
Dengan menggunakan persamaan matriks (3.24), nilai opsi *call* pada setiap langkah waktu dapat dihitung dengan menggunakan pemrograman MATLAB. Sebagai contoh ilustrasi, digunakan nilai-nilai parameter sebagai berikut: $T = 0.25$, $K = 10$, $r = 0.1$, dan $\sigma = 0.4$. Selanjutnya ditetapkan jumlah langkah waktu adalah $M = 2000$, jumlah langkah harga saham adalah $N = 200$ dan $S_{maks} = 200$.

Pada Gambar 3 diberikan solusi numerik untuk harga opsi *call* di setiap harga saham pada waktu $t = T$ untuk *grid* seragam dan *grid* tidak seragam yang dibandingkan dengan solusi eksak (2.2).



Gambar 3. Hasil Perhitungan Harga Opsi *Call* Tipe Eropa pada Waktu $t = T$ dengan Nilai-Nilai Parameter: $T = 0.25$, $K = 10$, $r = 0.1$, dan $\sigma = 0.4$.

Dalam Gambar 3 plot solusi hanya ditampilkan dari harga saham $S = 0$ sampai $S = 40$ untuk melihat perbandingan perbedaan hasil aproksimasi yang lebih jelas. Galat numerik sebagai selisih antara solusi numerik dan solusi eksak diberikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Hasil Perhitungan Galat Numerik antara Solusi Eksak dengan Solusi Numerik untuk *Grid* Seragam dan *Grid* Tidak Seragam.

Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa galat numerik yang diperoleh di sekitar $S = 10$, yaitu harga saham di sekitar harga pelaksanaan $K = 10$, menjadi jauh lebih kecil secara signifikan saat digunakan metode beda hinga dengan *grid* tidak seragam. Berdasarkan hasil ini, maka skema beda hingga dengan *grid* tidak seragam menghasilkan solusi yang lebih akurat dibandingkan dengan *grid* seragam.

Pada contoh simulasi di atas, komputasi menggunakan *grid* seragam memerlukan waktu sekitar 0.7 detik, sedangkan dengan *grid* tidak seragam hanya sekitar 0.2 detik. Simulasi dilakukan pada MATLAB 2013a yang dijalankan di laptop

Acer Aspire E5-475 dengan prosesor Intel Core i3-6006U dan RAM 4 GB, menggunakan OS Windows 10 Home. Hasil simulasi menunjukkan bahwa skema beda hingga dengan *grid* tidak seragam lebih efisien dalam hal komputasi dibandingkan dengan *grid* seragam.

5. Kesimpulan

Pada artikel ini telah dikonstruksi metode beda hingga dengan skema eksplisit pada persamaan Black-Scholes untuk harga opsi *call* Eropa dengan menggunakan *grid* tidak seragam. Konstruksi beda hingga dilakukan berdasarkan deret Taylor. Dari konstruksi tersebut diperoleh persamaan beda yang dapat diubah ke dalam bentuk persamaan matriks dan kemudian diselesaikan secara rekursif dengan menggunakan pemrograman Matlab.

Berdasarkan simulasi numerik yang dilakukan untuk nilai-nilai parameter tertentu, diperoleh hasil bahwa skema beda hingga dengan *grid* tidak seragam menghasilkan solusi yang lebih akurat dibandingkan dengan *grid* seragam. Hal ini dapat dilihat dari galat yang dihasilkan sebagai selisih antara solusi numerik dan solusi eksak. Hasil numerik menunjukkan bahwa galat yang diperoleh bernilai lebih besar pada harga saham yang berada di sekitar harga pelaksanaan. Galat ini dapat diperkecil secara signifikan ketika menggunakan metode beda hingga dengan *grid* tidak seragam. Selain itu, metode beda hingga dengan *grid* tidak seragam juga memiliki waktu komputasi yang lebih efisien dibandingkan dengan *grid* seragam.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Arrival Rince Putri, Ibu Noverina Alfiany, dan Bapak Zulakmal yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] J. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, 10th ed. New York: Pearson, 2018.
- [2] F. Black and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *The Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, 1973.
- [3] J. Desmon, *An Introduction to Finance Option Valuation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [4] P. Wilmott, S. Howison, and J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [5] P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer, 2004, vol. 53.
- [6] P. Banerjee, V. Murthy, and S. Jain, "Method of lines for valuation and sensitivities of bermudan options," *arXiv preprint arXiv:2112.01287*, 2021. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2112.01287>
- [7] V. Nizamudheen, T. Riyasudheen, A. N. Asharaf, and T. Shefeeq, "Modified cubic b-spline based differential quadrature methods for time-fractional

- black-scholes equation,” *arXiv preprint arXiv:2508.06780*, 2025. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2508.06780>
- [8] G. Dura and A.-M. Mosneagu, “Numerical approximation of Black-Scholes equation,” *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, vol. 56, no. 1, pp. 39–64, 2010.
- [9] H. Sundqvist and G. Veronis, “A Simple Finite-Difference Grid with Non-Constant Intervals,” *Tellus*, vol. 22, no. 1, pp. 26–31, 1970.
- [10] S. Mastoi and W. A. M. Othman, “A Finite Difference Method Using Randomly Generated Grids as Non-Uniform Meshes to Solve the Partial Differential Equation,” *International Journal of Disaster Recovery and Business Continuity*, vol. 11, no. 1, 2020.
- [11] K. in’t Hout and K. Volders, “Stability of Central Finite Difference Schemes on Non-Uniform Grids for the Black-Scholes Equation,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 59, no. 10, pp. 2593–2609, 2009.
- [12] D. Tavella and C. Randal, *Pricing Financial Instruments: The Finite Difference Method*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2000.
- [13] J. Bodeau, G. Riboulet, and T. Roncalli, “Non-Uniform Grids for PDE in Finance,” *SSRN Electronic Journal*, 2000. [Online]. Available: <http://www.ssrn.com/abstract=1031941>
- [14] K. Sidarto, M. Syamsuddin, and N. Sumarti, *Matematika Keuangan*. Bandung: ITB Press, 2018.