

INTEGRAL HYPERGRAPHS OF THE CARTESIAN PRODUCT OF FANO PLANE AND LATIN SQUARES OF ORDER 3

MULIA ASTUTI*, ZULFIA MEMI MAYASARI, FACHRI FAISAL, NUR AFANDI

*Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
University of Bengkulu, Jalan WR Supratman Kandang Limun Bengkulu, 38371
email : mulia_astuti@unib.ac.id, zulfiamm@unib.ac.id, fachrif@unib.ac.id, nafandi@unib.ac.id*

Diajukan 10 November 2024 Direvisi 28 Agustus 2025 Diterima 7 September 2025
Diterbitkan 31 Oktober 2025

Abstrak. Operasi pada hipergraf adalah suatu cara untuk mengkonstruksi suatu hipergraf dengan struktur yang lebih besar. Salah satu operasi pada hipergraf yang biasa dipelajari adalah operasi kali Kartesius. Suatu hipergraf dikatakan integral jika semua nilai karakteristik dari matriks ketetanggaannya adalah bilangan bulat. Dalam makalah ini, dipelajari dua kelas hipergraf yaitu, bidang Fano dan bujursangkar Latin orde 3. Dapat ditunjukkan bahwa kedua kelas hipergraf tersebut adalah integral. Selanjutnya, ditentukan hipergraf hasil operasi kali Kartesius dari kedua hipergraf tersebut. Dapat dibuktikan bahwa operasi kali Kartesius pada hipergraf mempertahankan sifat keintegralan.

Kata Kunci: Hasilkali Kartesius, Bidang Fano, Bujursangkar Latin

Abstract. *The Hypergraph products have been a good way to construct a larger hypergraph from small ones. One of commonly studied hypergraph products is Cartesian product. A hypergraph is called integral if all the eigenvalues of its adjacency matrix are integers. In this paper, We study two classes of hypergraphs, namely, Fano Plane and Latin Squares of order 3. We show that two classes of hypergraphs are integral. Furthermore, we determine the Cartesian product both of them. We prove that the hypergraph Cartesian products preserve the integrality.*

Keywords: Cartesian Product, Fano Plane, Latin Squares

1. Pendahuluan

Kajian tentang hipergraf integral diinspirasi dari hasil-hasil penelitian yang berkaitan dengan graf integral. Suatu graf dikatakan integral jika semua nilai karakteristik dari matriks ketetanggaannya adalah bilangan bulat. Penelitian graf integral diperkenalkan oleh Harary dan Schwenk dalam [1]. Mereka telah mempelajari masalah yang berkaitan dengan karakterisasi graf integral dan memberikan

*Penulis korespondensi

beberapa contoh graf integral, di antaranya adalah graf lengkap, graf bintang, graf bipartit lengkap, dan graf lingkaran.

Secara umum, graf integral sangat jarang dan tidak mudah ditemukan. Hal tersebut terjadi karena penentuan graf integral tergantung pada struktur graf tersebut. Namun demikian, penelitian graf integral terus berkembang baik secara teori maupun aplikasinya. Secara teori, perkembangan hasil penelitian graf integral hingga tahun 2002, dapat ditemukan dalam [2]. Wang dkk. mendapatkan syarat perlu dan cukup agar beberapa kelas graf bersifat integral [3]. Pada tahun 2021, Liu dkk. telah menyelidiki sifat aljabar pada graf Cayley dari suatu kelas graf integral yang ditentukan berdasarkan spektrumnya [4]. Dalam hal aplikasinya, sifat graf integral telah digunakan pertama kali oleh Saxena dkk., untuk menentukan sifat *Perfect State Transfer* (PST) pada sistem spin kuantum [5].

Hipergraf adalah perumuman dari graf. Teori hipergraf pertama kali dibangun oleh Berge [6]. Perbedaan graf dan hipergraf terletak pada sisinya. Sisi, pada hipergraf biasa disebut hipersisi, dapat menghubungkan lebih dari dua titik. Sama halnya dengan graf, suatu hipergraf juga dapat direpresentasikan dalam matriks ketetanggaan. Suatu hipergraf dikatakan integral jika semua nilai karakteristik dari matriks ketetanggaannya adalah bilangan bulat.

Hipergraf integral dapat ditentukan pada kelas hipergraf tertentu. Salah satu sifat spektral dari graf yang telah dikembangkan pada hipergraf Cayley dapat ditemukan dalam [7]. Dalam makalah ini, dipelajari dua kelas hipergraf yang memiliki hubungan struktur dan sifat yang bersesuaian dengan struktur dan sifat bidang proyektif orde 2 dan *Latin square* orde 3. Bidang proyektif orde 2 disebut juga dengan bidang Fano. Dapat ditunjukkan bahwa kedua kelas hipergraf tersebut adalah integral.

Operasi pada hipergraf adalah suatu cara untuk mengkonstruksi suatu hipergraf dengan struktur yang lebih besar. Salah satu operasi pada hipergraf yang biasa dipelajari adalah operasi kali Kartesius. Sifat-sifat yang dipenuhi oleh operasi kali Kartesius tersebut adalah sifat komutatif, asosiatif, dan distributif. Dalam makalah ini juga ditentukan hipergraf hasil operasi kali Kartesius dari bidang Fano dan *Latin square* orde 3. Selanjutnya, dapat dibuktikan bahwa operasi kali Kartesius pada hipergraf mempertahankan sifat keintegralan.

2. Hipergraf dan Hipergraf Hasil Operasi Kali Kartesius

Pada bagian ini, akan dibahas terlebih dahulu definisi dari hipergraf, dinotasikan sebagai $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$.

Definisi 2.1. [6] *Misalkan n dan m adalah dua bilangan bulat positif. Suatu hipergraf berorde n dan berukuran m adalah struktur $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$, dengan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan hingga dan $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ adalah koleksi hingga dari himpunan bagian V yang memenuhi*

$$E_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad \text{dan} \quad \bigcup_i E_i = V.$$

Unsur-unsur di V disebut titik dan unsur-unsur di $\mathcal{E}$ disebut hipersisi.

Hipergraf yang didefinisikan dalam makalah ini adalah hipergraf sederhana. Suatu hipergraf dikatakan sederhana, jika tidak ada hipersisi yang merupakan subhimpunan atau sama dengan hipersisi lainnya dan setiap hipersisi memuat paling sedikit dua titik. Sedangkan suatu hipergraf dikatakan linear, jika tidak terdapat dua hipersisi yang beririsan pada lebih dari satu titik. Suatu hipergraf yang semua hipersisinya mempunyai kardinalitas sama, yaitu r , disebut hipergraf r -seragam. Derajat titik $v_i \in V$, dinotasikan sebagai $\delta(v_i)$, menyatakan banyaknya hipersisi yang memuat titik v_i . Suatu hipergraf dikatakan δ -reguler jika setiap titik $v_i \in V$ mempunyai derajat sama, yaitu, δ .

Kelas hipergraf yang dipelajari dalam makalah ini adalah kelas hipergraf yang memiliki hubungan struktur dan sifat yang bersesuaian dengan struktur dan sifat bidang proyektif orde 2, disebut juga dengan bidang Fano, dan *Latin square* orde 3. Secara umum, definisi bidang proyektif orde n dapat ditemukan dalam [8].

Definisi 2.2. [8] *Bidang proyektif orde n dengan $n > 0$, adalah koleksi dari $n^2 + n + 1$ garis dan $n^2 + n + 1$ titik sedemikian sehingga:*

- (1) *setiap garis memuat $n + 1$ titik,*
- (2) *setiap titik termuat pada $n + 1$ garis,*
- (3) *untuk sebarang dua garis beririsan pada tepat satu titik, dan*
- (4) *untuk sebarang dua titik yang berbeda terletak pada tepat satu garis.*

Selanjutnya, diperkenalkan juga definisi *Latin square* orde k yang dapat ditemukan dalam [9].

Definisi 2.3. [9] *Latin square orde k adalah persegi berukuran $k \times k$ dengan elemennya adalah k simbol berbeda, sedemikian sehingga setiap simbol muncul tepat satu kali pada setiap baris dan setiap kolom.*

Suatu hipergraf dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks ketetanggaan. Dua titik dikatakan bertetangga, jika terdapat suatu hipersisi yang memuat kedua titik tersebut. Definisi matriks ketetanggaan suatu hipergraf dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.4. [6] *Misalkan $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf berorde n , berukuran m . Matriks ketetanggaan dari $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$ adalah matriks M yang entri-entrinya m_{ij} , dengan*

$$m_{ij} = \begin{cases} |\{E_k \in \mathcal{E} : \{v_i, v_j\} \subset E_k\}|, & \text{jika } i \neq j, \\ 0, & \text{jika } i = j. \end{cases}$$

Misalkan nilai karakteristik yang berbeda dari M adalah $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$ dan multiplisitasnya berturut-turut adalah $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_s)$. Spektrum dari hipergraf $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$, didefinisikan sebagai

$$Sp \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

Salah satu cara untuk mengkonstruksi hipergraf dengan struktur yang lebih besar adalah operasi pada hipergraf. Operasi pada hipergraf yang digunakan adalah operasi kali Kartesius, yang definisinya dapat ditemukan dalam [10].

Definisi 2.5. [10] Misalkan $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1(V_1, \mathcal{E}_1)$ adalah hipergraf orde s dan $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2(V_2, \mathcal{E}_2)$ adalah hipergraf orde t . Hipergraf hasil operasi kali Kartesius $\mathcal{H}_1$ dan $\mathcal{H}_2$ adalah hipergraf $\mathcal{H}(V, \mathcal{E}) = \mathcal{H}_1 \square \mathcal{H}_2$ dengan himpunan titik $V = V_1 \times V_2$ dan hipersisi $\mathcal{E} = \{x \times F : x \in V_1, F \in \mathcal{E}_2\} \cup \{E \times y : E \in \mathcal{E}_1, y \in V_2\}$, sehingga himpunan $\{(x_1, y), (x_2, y), \dots, (x_p, y)\}, p \leq s$ atau $\{(x, y_1), (x, y_2), \dots, (x, y_q)\}, q \leq t$ adalah hipersisi di $\mathcal{E}$.

Spektrum dari hipergraf hasil operasi Kartesius dapat ditentukan dengan memanfaatkan sifat nilai karakteristik dari matriks jumlah Kronecker dari dua matriks yang dijelaskan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.6. [11] Misalkan A adalah matriks real berukuran $n \times n$ dan B adalah matriks real berukuran $m \times m$. Misalkan pula

$$\sigma(A) = \{\lambda_i : i = 1, 2, \dots, k_A\}$$

adalah himpunan semua nilai karakteristik yang berbeda dari A dan

$$\sigma(B) = \{\mu_j : j = 1, 2, \dots, k_B\}$$

adalah himpunan semua nilai karakteristik yang berbeda dari B . Jika $\lambda \in \sigma(A)$ bersesuaian dengan vektor karakteristik $x \in \mathbb{R}^n$ dan $\mu \in \sigma(B)$ bersesuaian dengan vektor karakteristik $y \in \mathbb{R}^m$ maka $\lambda\mu$ adalah nilai karakteristik dari $A \otimes B$ yang bersesuaian dengan vektor karakteristik $x \otimes y \in \mathbb{R}^{mn}$. Lebih lanjut,

$$\sigma(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j : i = 1, 2, \dots, k_A; j = 1, 2, \dots, k_B\}$$

adalah himpunan semua nilai karakteristik dari $A \otimes B$.

3. Hipergraf Integral Hasil Operasi Kali Kartesius Bidang Fano dan Latin Square orde 3

Bidang Fano atau bidang proyektif orde 2 dan *Latin square* orde 3 memiliki hubungan struktur dan sifat yang bersesuaian dengan hipergraf. Lemma berikut ini menjelaskan bahwa bidang Fano atau bidang proyektif berorde 2 dapat direpresentasikan sebagai hipergraf $P_2(V, \mathcal{E})$ dan *Latin square* orde 3 dapat direpresentasikan sebagai hipergraf $L_3(V, \mathcal{E})$. Dapat ditunjukkan bahwa $P_2(V, \mathcal{E})$ dan $L_3(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf integral.

Lema 3.1. Misalkan $P_2(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf yang bersesuaian dengan bidang proyektif orde 2. Maka hipergraf $P_2(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf integral.

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.2, bidang proyektif orde 2 adalah koleksi dari 7 garis dan 7 titik sedemikian sehingga setiap garis memuat 3 titik, setiap titik termuat pada 3 garis, untuk sebarang dua garis beririsan pada tepat satu titik, dan untuk sebarang dua titik yang berbeda terletak pada tepat satu garis. Bidang proyektif orde 2 dapat direpresentasikan sebagai Hipergraf $P_2(V, \mathcal{E})$ dengan himpunan titik

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

dan koleksi hipersisi adalah

$$\mathcal{E} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}.$$

Bentuk hipersisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{1, 2, 4\}, \\ E_2 &= \{2, 3, 5\}, \\ E_3 &= \{3, 4, 6\}, \\ E_4 &= \{4, 5, 7\}, \\ E_5 &= \{5, 6, 1\}, \\ E_6 &= \{6, 7, 2\}, \\ E_7 &= \{7, 1, 3\}. \end{aligned}$$

Hipergraf $P_2(V, \mathcal{E})$ yang terbentuk adalah hipergraf linear berorde 7, berukuran 7, 3-seragam, 3-reguler dan untuk sebarang dua titik $u, v \in V$, terdapat tepat satu hipersisi $E \in \mathcal{E}$ sehingga $u \in E$ dan $v \in E$. Matriks ketetanggaan dari $P_2(V, \mathcal{E})$ adalah sebagai berikut:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diperoleh spektrum dari $P_2(V, \mathcal{E})$ yaitu:

$$Sp P_2(V, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa Hipergraf $P_2(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf integral. $\square$

Selanjutnya, dijelaskan juga sifat keintegralan dari *Latin square* orde 3 dalam Lema berikut ini.

Lema 3.2. Misalkan $L_3(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf yang bersesuaian dengan *Latin square* orde 3. Hipergraf $L_3(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf integral.

Bukti. Misalkan triplel (s, r, c) menyatakan simbol s muncul pada baris ke- r dan kolom ke- c . Berdasarkan Definisi 2.3, *Latin square* orde 3 adalah himpunan yang elemen-elemennya (s, r, c) dengan $s \in S = \{1, 2, 3\}, r \in R = \{1', 2', 3'\}, c \in C = \{1'', 2'', 3''\}$. Semua kemungkinan triple yang terbentuk adalah sebanyak $3^2 = 9$, yaitu:

$$\begin{aligned} &(1, 1', 1''), (2, 1', 2''), (3, 1', 3''), \\ &(1, 2', 2''), (2, 2', 3''), (3, 2', 1''), \\ &(1, 3', 3''), (2, 3', 1''), (3, 3', 2''). \end{aligned}$$

Latin square orde 3 dapat direpresentasikan sebagai hipergraf $L_3(V, \mathcal{E})$ dengan himpunan titik:

$$\begin{aligned} V = S \cup R \cup C &= \{1, 2, 3, 1', 2', 3', 1'', 2'', 3''\}, \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \end{aligned}$$

dan hipersisi adalah triple pada *Latin square* orde 3, yaitu:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{1, 4, 7\} & E_4 &= \{2, 4, 8\}, & E_7 &= \{3, 4, 9\}, \\ E_2 &= \{1, 5, 8\} & E_5 &= \{2, 5, 9\}, & E_8 &= \{3, 5, 7\}, \\ E_3 &= \{1, 6, 9\} & E_6 &= \{2, 6, 7\}, & E_9 &= \{3, 6, 8\}, \end{aligned}$$

sehingga

$$\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_9\}.$$

Hipergraf $L_3(V, \mathcal{E})$ yang terbentuk adalah hipergraf linear 3-seragam, 3-reguler berorde 9, dan berukuran 9. Matriks ketetanggaan dari $L_3(V, \mathcal{E})$ adalah sebagai berikut:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diperoleh spektrum dari $L_3(V, \mathcal{E})$ yaitu

$$Sp\ L_3(V, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa Hipergraf $L_3(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf integral. $\square$

Selanjutnya, dipelajari sifat keintegralan suatu kelas hipergraf baru yang diperoleh dari hasil operasi kali Kartesius $P_2(V, \mathcal{E})$ dan $L_3(V, \mathcal{E})$ yang dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.3. *Misalkan $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf hasil operasi kali Kartesius $P_2(V, \mathcal{E})$ dan $L_3(V, \mathcal{E})$. Matrik ketetanggaan dari $P_2(V, \mathcal{E})$ adalah M_1 dan matrik ketetanggaan dari $L_3(V, \mathcal{E})$ adalah M_2 . Matriks ketetanggaan dari $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$ dapat diekspresikan sebagai*

$$M = I_{9 \times 9} \otimes M_1 + M_2 \otimes I_{7 \times 7}.$$

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.5, diketahui bahwa $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$ memuat 9-salinan $P_2(V, \mathcal{E})$ dan berorde

$$|V(P_2(V, \mathcal{E})) \times V(L_3(V, \mathcal{E}))| = 63.$$

Matriks ketetanggaan dari $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$ berbentuk matriks bloks, yaitu matriks $M = [M_{ij}]$ dengan $M_{ij} = M_1$ untuk $i = j$ dan $i = 1, 2, \dots, 9$ dan $j = 1, 2, \dots, 9$. Karena hipersisi yang memuat titik dari setiap salinan $P_2(V, \mathcal{E})$ bersesuaian dengan hipersisi dari $L_3(V, \mathcal{E})$, maka untuk $i \neq j$, M_{ij} adalah matriks diagonal dengan elemen diagonalnya menyatakan hubungan ketetanggaan titik dari $L_3(V, \mathcal{E})$, yakni $m = |\{\{y_i, y_j\} \subset E : E \in \mathcal{E}\}|$. Karena itu $M_{ij} = m[I]_{7 \times 7}$. Sehingga Matriks ketetanggaan dari hipergraf $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$, dapat dituliskan sebagai

$$M = I_{9 \times 9} \otimes M_1 + M_2 \otimes I_{7 \times 7}. \quad \square$$

Akibat 3.4. *Hipergraf hasil operasi kali Kartesius $P_2(V, \mathcal{E})$ dan $L_3(V, \mathcal{E})$, $\mathcal{H}(V, \mathcal{E}) = P_2(V, \mathcal{E}) \square L_3(V, \mathcal{E})$, adalah hipergraf integral*

Bukti. Misalkan M_1 adalah matriks ketetanggaan dari $P_2(V, \mathcal{E})$ dengan nilai karakteristik $\{\lambda_i\} : i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ yang bersesuaian dengan vektor karakteristik $x_i \in R^7 : i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ dan M_2 adalah matriks ketetanggaan dari $L_3(V, \mathcal{E})$ dengan nilai karakteristik $\{\mu_j\} : j \in \{1, 2, \dots, 9\}$ yang bersesuaian dengan vektor karakteristik $y_j \in R^9 : j \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Karena matriks ketetanggaan dari $\mathcal{H}(V, \mathcal{E})$ dapat diekspresikan sebagai

$$M = I_{9 \times 9} \otimes M_1 + M_2 \otimes I_{7 \times 7}.$$

berdasarkan Teorema 2.4., nilai karakteristik M adalah

$$\{\lambda_i + \mu_j\} : i \in \{1, 2, \dots, 7\}, j \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

yang bersesuaian dengan vektor karakteristik $x_i \otimes y_j \in R^{63}$. Karena

$$\{\lambda_i\} : i \in \{1, 2, \dots, 7\}, \{\mu_i\} : i \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

adalah bilangan bulat,

$$\{\lambda_i + \mu_j\} : i \in \{1, 2, \dots, 7\}, j \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

adalah bilangan bulat. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa Hipergraf $\mathcal{H}(V, \mathcal{E}) = P_2(V, \mathcal{E}) \square L_3(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf integral. $\square$

4. Kesimpulan

Lema 3.1 dan Lema 3.2 menjelaskan bahwa hipergraf yang bersesuaian dengan bidang Fano, $P_2(V, \mathcal{E})$, dan hipergraf yang bersesuaian dengan *Latin square* orde 3, $L_3(V, \mathcal{E})$, adalah hipergraf integral. Dalam Teorema 3.3 dan Akibat 3.4, telah ditunjukkan pula bahwa kelas hipergraf baru yang dibangun dari hasil operasi kali Kartesius $P_2(V, \mathcal{E})$ dan $L_3(V, \mathcal{E})$ adalah hipergraf integral juga. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa operasi kali Kartesius pada $P_2(V, \mathcal{E})$ dan $L_3(V, \mathcal{E})$ dapat mengawetkan sifat keintegralan.

Daftar Pustaka

- [1] Harary, F., Schwenk, A.J., 1974, Which graphs have integral spectra?, *Graphs and Combinatorics, Lecture Notes in Mathematics*, **406**: 45 – 51.
- [2] Balinska, K. T., Cvetkovic, D., Radosavljevic, Z., Simic, S. K., dan Stevanovic, D., (2002): A survey on integral graphs, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.*, **13**: 42 — 65.
- [3] Wang, L., 2005, *A survey of results on integral trees and integral graphs*, Memorandum No. 1763, University of Twente, The Netherlands, ISSN 0169-2690
- [4] Liu, J., Mirafzal, S.M., and Zafari A., 2021, Some Algebraic Properties of a Class of Integral Graphs Determined by Their Spectrum, *Hindawi Journal of Mathematics*, **2021**, Article ID 6632206, <https://doi.org/10.1155/2021/6632206>
- [5] Saxena, N., Saverini, S., dan Shparlinski, I., 2007: Parameters of integral circulant graph and periodic quantum dynamics, *International Journal of Quantum Information*, **5**(3): 417 – 430.
- [6] Berge, C., 1973, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam
- [7] Sripaisan, N., 2021, *Algebraic degree of spectra of Cayley hypergraphs* Theses and Dissertations (Chula ETD). 4773., Chulalongkorn University
- [8] Lam, C. W. H., Thiel, L., dan Swiercz, S., (1989): The nonexistence of finite projective planes of order 10, *Canad. J. Math*, **41**: 1117 – 1123
- [9] Schmidt, N.O., 2016, *Latin squares and their applications to cryptography*, Thesis, Boise State University
- [10] Hellmuth, M., Ostermeier L., and Stadler, P., 2012, A Survey on Hypergraph Products, *Math. Comput. Sci.* **6**: 1 – 32
- [11] Graham, A., 1981, *Kronecker Product and Matrix Calculus: with Applications*, Ellis Horwood Limited, England