

LOCATING CHROMATIC NUMBER OF ONE-HEART GRAPH

MUHAMMAD HAMDI, DES WELYYANTI*, IKHLAS PRATAMA SANDY

*Departemen Matematika dan Sains Data,
FMIPA Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163
email : wely@sci.unand.ac.id*

Diterima 29 November 2024 Direvisi 9 Januari 2025 Dipublikasikan 31 Januari 2025

Abstrak. Bilangan kromatik lokasi merupakan gabungan konsep dari dimensi partisi graf dengan pewarnaan titik graf. Bilangan kromatik lokasi dari G , dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah banyaknya warna minimum yang dipakai untuk pewarnaan lokasi. Metode untuk mendapatkan bilangan kromatik lokasi suatu graf adalah dengan menentukan nilai eksaknya. Dalam artikel ini dijelaskan cara menentukan bilangan kromatik lokasi graf sehati Hr_n untuk $n \geq 2$. Hasil yang didapatkan terkait bilangan kromatik lokasi graf sehati adalah $\chi_L(Hr_n) = 4$ untuk $n = 2$ dan $\chi_L(Hr_n) = 5$ untuk $n \geq 3$.

Kata Kunci: Bilangan kromatik lokasi, graf sehati, pewarnaan lokasi

Abstract. The concept of locating chromatic number was related to the partition dimension and vertex coloring of a graph. The locating chromatic number of G , denoted by $\chi_L(G)$, is the minimum number of colors required for locating coloring. The method to obtain the location chromatic number of the one-heart graph involved is finding its exact value. The results obtained for the locating chromatic number of the one-heart graph were $\chi_L(Hr_n) = 4$ for $n = 2$ and $\chi_L(Hr_n) = 5$ for $n \geq 3$.

Keywords: locating-chromatic number, locating coloring, one-heart graph

1. Pendahuluan

Graf G adalah pasangan terurut $(V(G), E(G))$ yang terdiri atas himpunan tak kosong $V(G)$ beranggotakan titik-titik, dan $E(G)$ beranggotakan sisi-sisi. Jika e adalah sebuah sisi, x dan y adalah titik-titik sedemikian sehingga $e = xy$, maka e dikatakan menghubungkan (*join*) x dan y . Titik x dan y dikatakan titik-titik ujung dari e [1].

Seiring berjalannya waktu, graf mengalami perkembangan dan banyak terciptanya kajian-kajian baru, di antaranya bilangan kromatik lokasi. Bilangan kromatik lokasi graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. [2], yang merupakan

*Penulis korespondensi

penggabungan dari konsep dimensi partisi graf dan pewarnaan titik pada graf. Dimensi partisi graf merupakan pengembangan dari konsep dimensi metrik graf yang pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Melter [3]. Pewarnaan titik pada suatu graf adalah pemberian warna berbeda pada setiap titik-titik yang saling bertetangga pada suatu graf. Banyaknya warna minimum yang digunakan dengan kode warna berbeda setiap titiknya disebut bilangan kromatik lokasi dinotasikan, dengan $\chi_L(G)$.

Penelitian tentang bilangan kromatik lokasi pada suatu graf telah banyak dilakukan, di antaranya graf lingkaran (C_n) dan graf lintasan (P_n) yang ditemukan oleh Chartrand [2]. Pada tahun 2017 Asmiati [4] memperoleh bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Pada tahun yang sama, Welyyanti dkk. [5] memperoleh bilangan kromatik lokasi graf dengan dua komponen homogen. Kemudian Pritama dkk. [6] juga memperoleh bilangan kromatik lokasi graf segitiga diperumum Tr_n untuk $n = 2$ dan $n = 3$. Welyyanti dkk. [7] memperoleh bilangan kromatik lokasi graf prisma berekor. Kemudian, Nur dkk. [8] mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf pohon pisang. Tahun 2021, Mardimar dkk. [9] memperoleh bilangan kromatik lokasi graf *Buckminsterfullerene* B_{60} . Selanjutnya, Welyyanti dkk. [10] memperoleh bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung dengan graf lintasan, lingkaran, bintang atau bintang berganda sebagai komponennya. Welyyanti dkk. [11] memperoleh bilangan kromatik lokasi graf lobster $L_{n,m,1}$ untuk $m = 6$ dan $n = 2, 3, 4$. Pada tahun 2023, Welyyanti dkk. [12] memperoleh bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi kipas berekor. Welyyanti dkk. [13] juga memperoleh bilangan kromatik lokasi graf helm H_m untuk $10 \leq m \leq 28$.

Pada penelitian ini ditentukan bilangan kromatik lokasi graf sehati. Misalkan LS_2 adalah graf dengan $V(G) = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ dan $E(G) = \{a_1a_2, a_1b_1, a_2b_2, b_1b_2, a_1b_2\}$. Graf sehati adalah graf tangga segitiga LS_2 sebanyak n yang dihubungkan oleh tiga buah sisi baru pada setiap LS_2 dengan himpunan titik $V(G) = \{u_i, v_i, t_i, w_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(G) = \{u_iw_i, u_it_i, u_iv_i, w_iv_i, t_iv_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iu_{i+1}, t_iw_{i+1}, v_iv_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ dinotasikan Hr_n [14].

2. Landasan Teori

Pewarnaan titik graf G adalah suatu pemetaan $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, dengan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli sedemikian sehingga $c(x) \neq c(y)$ jika x dan y bertetangga. Jika warna yang dipakai sebanyak k maka G dikatakan memiliki k -pewarnaan. Minimum k yang dipakai untuk pewarnaan sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan titik disebut bilangan kromatik dari G , yang dinotasikan $\chi(G)$.

Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G , dimana $c(x) \neq c(y)$ untuk x dan y yang bertetangga di G . Misalkan Q_i adalah himpunan titik yang diberi warna i , yang disebut kelas warna, maka $\Pi = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ merupakan himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(x)$ merupakan k -pasang terurut $(d(x, Q_1), d(x, Q_2), \dots, d(x, Q_k))$ dengan $d(x, Q_i) = \min\{d(x, y) \mid y \in Q_i\}$. Jika setiap titik di G tidak ada kode warna yang sama, maka c

disebut pewarnaan lokasi dari G . Jika warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi sebanyak k , maka c dinamakan k -pewarnaan lokasi. Banyaknya warna minimum yang dipakai untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G , dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Titik dominan adalah titik $x \in V(G)$ dengan $d(x, Q_i) = 1$ untuk $x \notin Q_i$ dan 0 untuk yang lainnya [15].

3. Pembahasan

Pada Teorema 3.1 diperoleh bilangan kromatik lokasi graf sehati Hr_n untuk $n \geq 2$.

Teorema 3.1. *Jika graf Hr_n adalah graf sehati, maka*

$$\chi_L(Hr_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 2, \\ 5, & \text{untuk } n \geq 3. \end{cases}$$

Bukti. Pembuktian bilangan kromatik lokasi graf Hr_n akan dibagi dalam dua kasus sebagai berikut.

Kasus 1. $\chi_L(Hr_n) = 4$ untuk $n = 2$.

Subkasus 1.1. Batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Hr_n untuk $n = 2$.

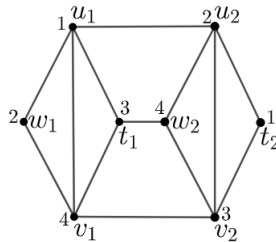
Akan dibuktikan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Hr_2 . Andaikan $\chi_L(Hr_2) = 3$, artinya Hr_2 memiliki 3-pewarnaan lokasi, maka setiap titik di Hr_2 merupakan titik dominan. Akibatnya, setiap titik dengan warna yang sama memiliki kode warna sama. Jadi, haruslah $\chi_L(Hr_2) \geq 4$.

Subkasus 1.2. Batas atas bilangan kromatik lokasi graf Hr_n untuk $n = 2$.

Akan dibuktikan batas atas bilangan kromatik lokasi graf Hr_2 . Definisikan pewarnaan titik $c : V(Hr_2) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sedemikian sehingga:

$$c(x) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } x = u_1, t_2, \\ 2, & \text{untuk } x = w_1, u_2, \\ 3, & \text{untuk } x = t_1, v_2, \\ 4, & \text{untuk } x = v_1, w_2. \end{cases}$$

Pada Gambar 3.1. diberikan 4-pewarnaan lokasi pada graf Hr_2 .



Gambar 1. 4-Pewarnaan Lokasi graf Hr_2

Definisikan $\Pi = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ dengan:

$$Q_1 = \{u_1, t_2\},$$

$$Q_2 = \{w_1, u_2\},$$

$$Q_3 = \{t_1, v_2\},$$

$$Q_4 = \{v_1, w_2\}.$$

Diperoleh kode warna setiap titik pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Kode Warna Titik graf Hr_2

Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna
u_1	(0, 1, 1, 1)	w_1	(1, 0, 2, 1)	t_1	(1, 2, 0, 1)	v_1	(1, 1, 1, 0)
t_2	(0, 1, 1, 2)	u_2	(1, 0, 1, 1)	v_2	(1, 1, 0, 1)	w_2	(2, 1, 1, 0)

Berdasarkan Tabel 1, dapat dilihat bahwa tidak ada kode warna yang sama untuk setiap titik graf Hr_n . Jadi, $\chi_L(Hr_2) \leq 4$. Akibatnya, diperoleh $\chi_L(Hr_2) = 4$.

Kasus 2. $\chi_L(Hr_n) = 5$ untuk $n \geq 3$.

Subkasus 2.1. Batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Hr_n untuk $n \geq 3$.

Akan dibuktikan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Hr_n untuk $n \geq 3$, n ganjil. Misalkan subgraf Hr_n ke-1, ke-2 dan ke-3 adalah Hr_1 , Hr_2 dan Hr_3 . Andaikan $\chi_L(Hr_n) = 4$ untuk $n = 3$, dengan:

- (i) Jika Hr_1 , Hr_2 dan Hr_3 memiliki 3-pewarnaan maka terdapat kode warna yang sama pada titik graf Hr_n , yaitu u_1 dengan u_3 , atau v_1 dengan v_2 , atau salah satu dari w_i dengan t_i , $i \in \{1, 2, 3\}$. Akibatnya, terdapat dua titik memiliki kode warna yang sama.
- (ii) Jika Hr_1 memiliki 4-pewarnaan dan Hr_2 dan Hr_3 mempunyai 3-pewarnaan, maka terdapat kode warna yang sama pada titik graf Hr_n , yaitu u_1 dengan t_2 , atau u_1 dengan w_2 , atau u_1 dengan v_2 , atau w_1 dengan t_2 , atau t_1 dengan u_2 , atau v_1 dengan w_2 , atau v_1 dengan t_2 , atau v_1 dengan u_2 , atau w_2 dengan t_2 atau w_3 dengan t_3 . Akibatnya, ada setidaknya dua titik memiliki kode warna sama.
- (iii) Jika Hr_1 dan Hr_3 memiliki 3-pewarnaan dan Hr_2 memiliki 4-pewarnaan maka ada kode warna yang sama pada titik graf Hr_n , yaitu titik t_1 dengan u_2 , atau w_1 dengan t_1 , atau u_2 dengan w_3 , atau v_2 dengan w_3 . Akibatnya, ada setidaknya dua titik memiliki kode warna yang sama.
- (iv) Jika Hr_1 dan Hr_2 memiliki 4-pewarnaan, dimana $c(u_1) \neq c(v_2) \neq c(v_1) \neq c(u_2)$, dan Hr_3 memiliki 3-pewarnaan, maka ada kode warna yang sama pada titik graf Hr_n , yaitu w_3 dengan u_1 , atau w_3 dengan u_2 , atau w_3 dengan v_1 , atau w_3 dengan v_2 , atau w_3 dengan t_3 . Akibatnya, ada setidaknya dua titik memiliki kode warna yang sama.
- (v) Jika Hr_1 dan Hr_3 memiliki 4-pewarnaan, dimana $c(u_1) \neq c(v_1) \neq c(u_3) \neq c(v_3)$, lalu Hr_2 memiliki 3-pewarnaan, maka ada kode warna yang sama pada titik graf Hr_n , yaitu u_1 dengan v_2 , atau u_2 dengan v_1 , atau u_2 dengan

v_3 , atau u_3 dengan v_2 . Akibatnya, ada setidaknya dua titik memiliki kode warna yang sama.

- (vi) Jika Hr_1 , Hr_2 dan Hr_3 memiliki 4-pewarnaan, dimana $c(u_i) \neq c(v_j) \neq c(u_j) \neq c(v_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, maka terdapat kode warna yang sama pada titik dominan graf Hr_n , yaitu u_k , $k \in \{1, 2, 3\}$, $k \neq i \neq j$ dengan salah satu dari $c(u_i)$, $c(v_i)$, $c(u_j)$, $c(v_j)$, atau v_k dengan salah satu dari $c(u_i)$, $c(v_i)$, $c(u_j)$, $c(v_j)$. Akibatnya, ada setidaknya dua titik memiliki kode warna yang sama.

Untuk $n \geq 4$, jika diberikan sebarang pewarnaan titik pada Hr_i untuk $4 \leq i \leq n$ sedemikian sehingga ada titik dominan di salah satu w_i atau t_i , maka terdapat dua titik dominan yang sama dengan warna yang sama, karena semakin banyak Hr_i , semakin banyak juga titik dominan dengan warna yang sama. Akibatnya terdapat setidaknya dua titik dominan dengan kode warna yang sama. Jika diberikan sebarang pewarnaan titik untuk setiap Hr_i untuk $4 \leq i \leq n$ sedemikian sehingga tidak ada titik dominan di titik w_i dan t_i , maka akan ada dua titik dengan sama dengan warna yang sama, yaitu titik w_i dengan t_i . Akibatnya ada setidaknya dua titik memiliki kode warna yang sama.

Subkasus 2.2. Batas atas bilangan kromatik graf Hr_n untuk $n \geq 3$.

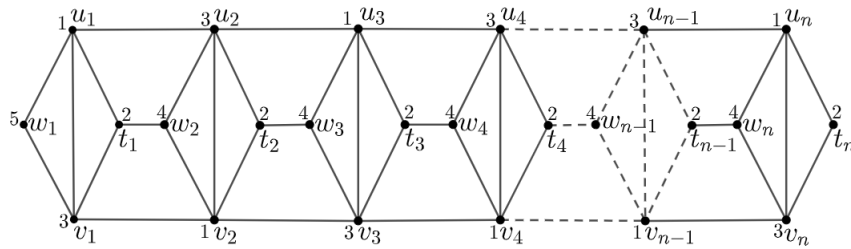
Untuk membuktikan batas atas bilangan kromatik lokasi graf Hr_n untuk $n \geq 3$ dibagi menjadi 2 subkasus.

Subkasus 2.2.1 n ganjil.

Akan dibuktikan batas atas bilangan kromatik lokasi graf Hr_n untuk $n \geq 3$, n ganjil. Definisikan pewarnaan titik $c : V(Hr_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sedemikian sehingga:

$$c(x) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } x = u_{2i-1} \in V(Hr_n), i \in \{1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}\}, \\ 1, & \text{untuk } x = v_{2i} \in V(Hr_n), i \in \{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}, \\ 2, & \text{untuk } x = t_i \in V(Hr_n), i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ 3, & \text{untuk } x = u_{2i} \in V(Hr_n), i \in \{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}, \\ 3, & \text{untuk } x = v_{2i-1} \in V(Hr_n), i \in \{1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}\}, \\ 4, & \text{untuk } x = w_i \in V(Hr_n), i \in \{2, 3, \dots, n\}, \\ 5, & \text{untuk } x = w_1. \end{cases}$$

Pada Gambar 3.2 diberikan 5-pewarnaan lokasi dari graf Hr_n untuk $n \geq 3$, n ganjil.



Gambar 2. 5-Pewarnaan Lokasi graf Hr_n untuk $n \geq 3$, n ganjil

Definisikan $\Pi = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$ dengan:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{u_1, u_3, \dots, u_n\} \cup \{v_2, v_4, \dots, v_{n-1}\}, \\ Q_2 &= \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \\ Q_3 &= \{u_2, u_4, \dots, u_{n-1}\} \cup \{v_1, v_3, \dots, v_n\}, \\ Q_4 &= \{w_2, w_3, \dots, w_n\}, \\ Q_5 &= \{w_1\}. \end{aligned}$$

Kode warna setiap titik diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Kode warna titik graf Hr_n untuk $n \geq 3$, n ganjil

Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna
u_1	(0, 1, 1, 2, 1)	w_1	(1, 2, 1, 3, 0)	t_1	(1, 0, 1, 1, 2)	v_1	(1, 1, 0, 2, 1)
v_2	(0, 1, 1, 1, 2)	w_2	(1, 1, 1, 0, 3)	t_2	(1, 0, 1, 1, 3)	u_2	(1, 1, 0, 1, 2)
u_3	(0, 1, 1, 1, 3)	w_3	(1, 1, 1, 0, 4)	t_3	(1, 0, 1, 1, 4)	v_3	(1, 1, 0, 1, 3)
v_4	(0, 1, 1, 1, 4)	w_4	(1, 1, 1, 0, 5)	t_4	(1, 0, 1, 1, 5)	u_4	(1, 1, 0, 1, 4)
u_5	(0, 1, 1, 1, 5)	w_5	(1, 1, 1, 0, 6)	t_5	(1, 0, 1, 1, 6)	v_5	(1, 1, 0, 1, 5)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_{n-1}	(0, 1, 1, 1, $n-1$)	w_{n-1}	(1, 1, 1, 0, n)	t_{n-1}	(1, 0, 1, 1, n)	u_{n-1}	(1, 1, 0, 1, $n-1$)
u_n	(0, 1, 1, 1, n)	w_n	(1, 1, 1, 0, $n+1$)	t_n	(1, 0, 1, 2, $n+1$)	v_n	(1, 1, 0, 1, n)

Berdasarkan Tabel 3.2, dapat dilihat bahwa tidak ada kode warna yang sama untuk setiap titik graf Hr_n . Jadi, $\chi_L(Hr_n) \leq 5$ untuk $n \geq 3$, n ganjil.

Subkasus 2.2.2 n genap.

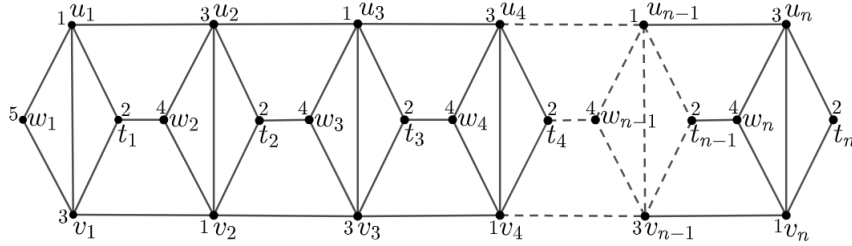
Akan dibuktikan batas atas bilangan kromatik lokasi graf Hr_n untuk $n \geq 3$, n genap. Definisikan pewarnaan titik $c : V(Hr_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sedemikian sehingga:

$$c(x) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } u_{2i-1} \in V(Hr_n), i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}, \\ 1, & \text{untuk } v_{2i} \in V(Hr_n), i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}, \\ 2, & \text{untuk } t_i \in V(Hr_n), i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ 3, & \text{untuk } u_{2i} \in V(Hr_n), i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}, \\ 3, & \text{untuk } v_{2i-1} \in V(Hr_n), i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}, \\ 4, & \text{untuk } w_i \in V(Hr_n), i \in \{2, 3, \dots, n\}, \\ 5, & \text{untuk } w_1. \end{cases}$$

Definisikan $\Pi = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$ dengan:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{u_1, u_3, \dots, u_{n-1}\} \cup \{v_2, v_4, \dots, v_n\}, \\ Q_2 &= \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \\ Q_3 &= \{u_2, u_4, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_3, \dots, v_{n-1}\}, \\ Q_4 &= \{w_2, w_3, \dots, w_n\}, \\ Q_5 &= \{w_1\}. \end{aligned}$$

Pada Gambar 3.3 diberikan 5-pewarnaan lokasi dari graf Hr_n untuk $n \geq 3$, n genap.



Gambar 3. 5-Pewarnaan Lokasi graf Hr_n untuk $n \geq 3$, n genap

Diperoleh kode warna setiap titik pada Tabel 3 berikut.

Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna
u_1	$(0, 1, 1, 2, 1)$	w_1	$(1, 2, 1, 3, 0)$	t_1	$(1, 0, 1, 1, 2)$	v_1	$(1, 1, 0, 2, 1)$
v_2	$(0, 1, 1, 1, 2)$	w_2	$(1, 1, 1, 0, 3)$	t_2	$(1, 0, 1, 1, 3)$	u_2	$(1, 1, 0, 1, 2)$
u_3	$(0, 1, 1, 1, 3)$	w_3	$(1, 1, 1, 0, 4)$	t_3	$(1, 0, 1, 1, 4)$	v_3	$(1, 1, 0, 1, 3)$
v_4	$(0, 1, 1, 1, 4)$	w_4	$(1, 1, 1, 0, 5)$	t_4	$(1, 0, 1, 1, 5)$	u_4	$(1, 1, 0, 1, 4)$
u_5	$(0, 1, 1, 1, 5)$	w_5	$(1, 1, 1, 0, 6)$	t_5	$(1, 0, 1, 1, 6)$	v_5	$(1, 1, 0, 1, 5)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_{n-1}	$(0, 1, 1, 1, n-1)$	w_{n-1}	$(1, 1, 1, 0, n)$	t_{n-1}	$(1, 0, 1, 1, n)$	v_{n-1}	$(1, 1, 0, 1, n-1)$
v_n	$(0, 1, 1, 1, n)$	w_n	$(1, 1, 1, 0, n+1)$	t_n	$(1, 0, 1, 2, n+1)$	u_n	$(1, 1, 0, 1, n)$

Berdasarkan Tabel 3.3, dapat dilihat bahwa tidak ada kode warna yang sama untuk setiap titik graf Hr_n . Jadi, $\chi_L(Hr_n) \leq 5$ untuk $n \geq 3$, n genap. Akibatnya diperoleh $\chi_L(Hr_n) = 5$ untuk $n \geq 3$. $\square$

4. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi graf sehati Hr_n untuk $n \geq 2$ adalah sebagai berikut: $\chi_L(Hr_n) = 4$ untuk $n = 2$ dan $\chi_L(Hr_n) = 5$ untuk $n \geq 3$.

5. Ucapan Terima kasih

Penelitian ini dibiayai oleh Universitas Andalas melalui skema Penelitian Skripsi Sarjana (PSS) Batch I No. 129/UN16.19/PT.01.03/PSS/2024 tahun 2024.

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J. A., 1976, *Graph Theory with Applications*, North Holland

- [2] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M., Slater, P., Zhang, P., 2002, The Locating-Chromatic Number of a Graph, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, Vol. **36**: 89 – 101
- [3] Harary, F., Melter, R.A., 1976, On the Metric Dimension of a Graph, *Ars Combinatoria*, Vol. **2**: 191 – 195
- [4] Asmiati, 2017, Bilangan Kromatik Lokasi n Amalgamasi Bintang yang Di-hubungkan Suatu Lintasan, *Jurnal Matematika Integratif*, Vol. **13**(2): 115 – 121
- [5] Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjuntak, R., 2017, On The Locating-Chromatic Number for Graphs with Two Homogenous Components, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. **893**(1): 012040
- [6] Pritama, S. L., Welyyanti, D., Narwen, 2019, Penentuan Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Tangga Segitiga Diperumum Tr_n untuk $n = 2$ dan $n = 3$, *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. **8**(4): 54 – 61
- [7] Welyyanti, D., Effendi, E., 2019, Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Prisma Berekor, *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. **8**(1): 56 – 61
- [8] Nur, M., Welyyanti, D., Narwen, 2020, Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Pohon Pisang $B_{n,k}$, *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. **9**(2): 70 – 75
- [9] Mardimar, K. K., Yulianti, L., Welyyanti, D., Januari 2021, Bilangan kromatik lokasi dari Graf Buckminsterfullerene B_{60} , *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. **10**(1): 159 – 163
- [10] Welyyanti, D., Putri, S. R., Azhari, M., Lestari, R., 2021, On Locating Chromatic Number of Disconnected Graph with Path, Cycle, Stars or Double Stars as its Components, *J. Phys. Conf*, Vol. **1742**: 012020
- [11] Welyyanti, D., Apriliza, T., Yulianti, L., 2022, Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Lobster $L_{n,m,1}$ untuk $m = 6$ dan $n = 2, 3, 4$, *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. **11**(2): 95 – 103
- [12] Welyyanti, D., Andriani, N., Yulianti, L., 2023, Bilangan Kromatik Kokasi pada Graf Amalgamasi Kipas Berekor, *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, Vol. **20**(1): 81 – 95
- [13] Welyyanti, D., Susanto, D., Yulianti, L., 2024, On Locating-Chromatic Number of Helm Graph Hr_n for $10 \leq m \leq 28$, *Jurnal Natural*, Vol. **24**: 128 – 131
- [14] Atmadja, K., 2022, Pelabelan Harmonis pada Graf Sehati, *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, Vol. **19**(1): 111 – 116
- [15] Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjuntak, R., Utunggadewa, S., 2015, The Locating-Chromatic Number For Graphs with Dominant Vertices, *Procedia Computer Science*, Vol. **74**: 89 – 92