

PELABELAN ANTI AJAIB JARAK PADA GRAF HASIL KALI SISIR

MAGDALENA CLARITA SOI BAU*, GANESHA LAPENANGGA PUTRA,
 FARLY OKTRIANI HANING, ARYANTO

*Program Studi Matematika
 Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana,
 email : magdalenaclarita74@gmail.com, ganesha.lapenangga@staf.undana.ac.id,
 farly_haning@staf.undana.ac.id, aryanto@staf.undana.ac.id*

Diterima 11 Februari 2025 Direvisi 27 Juni 2025 Dipublikasikan 31 Juli 2025

Abstrak. Diberikan graf tidak berarah $G = (V, E)$ dimana V adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan sisi dari graf G . Graf G merupakan graf dengan pelabelan anti ajaib jarak jika terdapat fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ sehingga untuk setiap simpul u dan v , diperoleh $w(u) \neq w(v)$ dimana bobot titik $u \in V(G)$ didefinisikan sebagai $w(u) = \sum_{x \in N(u)} f(x)$. $N(u)$ adalah himpunan tetangga simpul u , yaitu simpul-simpul yang terhubung langsung dengan simpul u . Pada tulisan ini dibahas beberapa graf dengan operasi hasil kali sisir yang merupakan graf anti ajaib jarak. Hasilnya ialah pada beberapa kasus, graf $P_m \triangleright_o C_n$, $C_m \triangleright_o C_n$, $S_m \triangleright_o C_n$, $W_m \triangleright_o C_n$, dan secara umum graf $G \triangleright_o C_n$ dan graf $G \triangleright_o W_n$ merupakan graf anti ajaib jarak.

Kata Kunci: Graf Anti Ajaib Jarak, Hasil Kali Sisir, Pelabelan Anti Ajaib Jarak

Abstract. Given an undirected graph $G = (V, E)$ where V is the set of vertices and E is the set of edges of G . The graph G is called a distance antimagic graph if there exists a bijective function $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ such that for every vertex u and v , we have $w(u) \neq w(v)$. The weight of a vertex $u \in V(G)$ is defined as $w(u) = \sum_{x \in N(u)} f(x)$, where $N(u)$ represents the set of neighbors of u . This study discusses certain graphs with the comb product operation that are distance antimagic. The results show that, in some cases, the graphs $P_m \triangleright_o C_n$, $C_m \triangleright_o C_n$, $S_m \triangleright_o C_n$, $W_m \triangleright_o C_n$, and more generally, the graphs $G \triangleright_o C_n$ and graphs $G \triangleright_o W_n$ are distance antimagic.

Keywords: Distance Anti Magic Graph, Comb Product, Distance Anti Magic Labeling.

1. Pendahuluan

Graf merupakan konsep matematika yang digunakan untuk menggambarkan hubungan antar objek. Konsep graf dapat dibayangkan dengan sebuah peta dimana titik-titik (simbol kota) disebut simpul (*vertex*) dan garis yang menghubungkan

*Penulis korespondensi

kota-kota tersebut disebut sisi (*edge*). Simbol dari simpul ialah V dan sisi ialah E [1]. Definisi terkait graf dapat dilihat pada [2] dan [3].

Salah satu konsep menarik dalam graf adalah **pelabelan simpul** (*vertex labeling*). Vertex labeling merupakan cara memberi label pada setiap simpul dengan aturan tertentu [4]. Cara melakukan pelabelan dapat dilihat pada [5]. Salah satu contoh pelabelan simpul ialah **pelabelan anti ajaib jarak**. Dalam pelabelan ini, setiap simpul diberi label sedemikian rupa sehingga bobot setiap simpul berbeda [6]. **Bobot** dari sebuah simpul diperoleh dari penjumlahan titik-titik yang bertetangga dengan simpul tersebut [7]. Dalam teori graf, **tetangga** dari sebuah simpul adalah simpul-simpul lain yang terhubung langsung dengan simpul tersebut sehingga dalam pelabelan anti ajaib jarak tidak ada simpul yang memiliki tetangga yang sama [8].

Studi tentang pelabelan anti ajaib jarak telah dibahas dalam artikel [9,10,11]. Misal $G = (V(G), E(G))$ adalah graf berorde n dimana $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ memenuhi sifat bijektif. Graf G disebut **graf anti ajaib jarak** jika pelabelannya memenuhi aturan pelabelan anti ajaib jarak. Seiring berjalannya waktu, pembahasan tentang pelabelan graf tidak hanya terpaku pada satu graf namun muncul graf-graf baru yang merupakan hasil dari operasi dua graf. Berdasarkan hasil penelitian pada [12,13], peneliti tertarik untuk memperluas studi tentang pelabelan anti ajaib jarak pada graf hasil kali sisir, yakni graf $P_m \boxtimes C_n$, $C_m \boxtimes C_n$, $S_m \boxtimes C_n$, $W_m \boxtimes C_n$, serta perumuman dari graf hasil kali sisir antara graf anti ajaib jarak dengan graf siklus dan graf roda.

Definisi 1.1. [14] *Operasi hasil kali sisir pada graf (misal graf G dan T) yang notasinya $G \boxtimes T$ merupakan sebuah operasi dimana sebuah titik tetap o dari graf T ditempelkan ke setiap titik pada graf G .*

Teorema 1.2. [15] *Graf P_n untuk $n \neq 3$ dan graf C_n untuk $n \neq 4$ merupakan graf anti ajaib jarak.*

Teorema 1.3. [16] *Graf W_n dimana $n \neq 4$ merupakan graf anti ajaib jarak.*

2. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dibahas pelabelan anti ajaib jarak pada beberapa graf seperti graf lintasan, graf siklus, graf bintang dan graf roda yang dioperasikan dengan graf siklus menggunakan operasi hasil kali sisir. Selain itu, dibahas juga bentuk umum dari pelabelan anti ajaib jarak pada graf $G \boxtimes C_n$ dan graf $G \boxtimes W_n$. Pembahasan diawali dengan Teorema 2.1 yang membahas pelabelan anti ajaib jarak pada graf $P_m \boxtimes C_n$.

Teorema 2.1. *Graf $P_m \boxtimes C_n$ untuk $n \geq 5$ merupakan graf anti ajaib jarak.*

Bukti. Diberikan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $P_m \boxtimes C_n$ sebagai

berikut.

$$\begin{aligned} V(P_m \supseteq_o C_n) &= \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \cup \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}, \\ E(P_m \supseteq_o C_n) &= \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-2\} \\ &\quad \cup \{v_i v_{i,1}, v_i v_{i,n-1} | 1 \leq i \leq m\}. \end{aligned}$$

(Kasus 1) Untuk n ganjil, $m \neq 3$.

Dari himpunan titik dan sisi yang diberikan diperoleh pelabelan titiknya ialah $f(v_i) = ni$ berlaku untuk $1 \leq i \leq m$ dan $f(v_{i,j}) = ni - j$ untuk $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1$. Dari pelabelan titik tersebut diperoleh pelabelan bobot untuk kasus n ganjil dengan $m \neq 3$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w(v_1) &= 3n, \\ w(v_m) &= n(3m-2), \\ w(v_{i,1}) &= 2ni-2, \\ w(v_{i,n-1}) &= 2ni-n+2, \\ w(v_i) &= n(4i-1) \quad ; \text{ untuk } 2 \leq i \leq m-1, \\ w(v_{i,j}) &= 2(ni-j) \quad ; \text{ untuk } 1 \leq i \leq m; 2 \leq j \leq n-2. \end{aligned}$$

(Kasus 2) Untuk n genap.

(2.1) $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Untuk kasus $n \equiv 2 \pmod{4}$, dimana $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n-1$, diperoleh pelabelan titiknya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(v_i) &= \frac{n}{2} + 1 + n(i-1), \\ f(v_{i,j}) &= \frac{j+1}{2} + n(i-1), \quad ; \text{ untuk } j \text{ ganjil}, \\ f(v_{i,j}) &= \frac{n}{2} + 1 + \frac{j}{2} + n(i-1) \quad ; \text{ untuk } j \text{ genap}. \end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi pelabelan titiknya maka diperoleh pelabelan bobotnya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} w(v_i) &= n(4i-4) + \frac{3n}{2} + 3 \quad ; \text{ untuk } 2 \leq i \leq m-1, \\ w(v_1) &= 2n+2, \\ w(v_m) &= n(3m-3) + 2, \\ w(v_{i,j}) &= n+2+j+2n(i-1) \quad ; \text{ untuk } j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq m; 2 \leq j \leq n-2 \\ w(v_{i,j}) &= j+1+2n(i-1) \quad ; \text{ untuk } j \text{ genap}, 1 \leq i \leq m; 2 \leq j \leq n-2, \\ w(v_{i,1}) &= n(2i-1) + 3, \\ w(v_{i,n-1}) &= 1 + 2ni - \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

(2.2) $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Selanjutnya untuk kasus $n \equiv 0 \pmod{4}$, diperoleh pelabelan titiknya ialah:

$$\begin{aligned}
 f(v_i) &= n - 2 + n(i - 1) && ; \text{ untuk } 1 \leq i \leq m, \\
 f(v_{i,j}) &= 1 + n(i - 1) && ; \text{ untuk } j = 1, \\
 f(v_{i,j}) &= j - 1 + n(i - 1) && ; \text{ untuk } 2 \leq j \leq \frac{n}{2} + 1, j \text{ ganjil}, \\
 f(v_{i,j}) &= n + 2 - j + n(i - 1) && ; \text{ untuk } \frac{n}{2} + 2 \leq j \leq n - 1, j \text{ ganjil}, \\
 f(v_{i,j}) &= n + n(i - 1) && ; \text{ untuk } j = 2, \\
 f(v_{i,j}) &= n + 3 - j + n(i - 1) && ; \text{ untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2} + 2, j \text{ genap}, \\
 f(v_{i,j}) &= j - 2 + n(i - 1), && ; \text{ untuk } \frac{n}{2} + 3 \leq j \leq n - 2, j \text{ genap},
 \end{aligned}$$

maka diperoleh pelabelan bobot untuk kasus $n \equiv 0 \pmod{4}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 w(v_i) &= 4ni - 2n && ; \text{ untuk } 2 \leq i \leq m - 1, \\
 w(v_1) &= 2n + 2, \\
 w(v_m) &= 2 + 3n(m - 1),
 \end{aligned}$$

untuk j ganjil, $1 \leq i \leq m$:

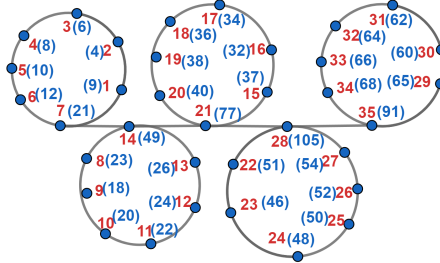
$$\begin{aligned}
 w(v_{i,j}) &= 2n + 6 - 2j + 2n(i - 1) && ; \text{ untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2} + 1, \\
 w(v_{i,j}) &= 2j - 4 + 2n(i - 1) && ; \text{ untuk } \frac{n}{2} + 4 \leq j \leq n - 2, \\
 w(v_{i,\frac{n}{2}+3}) &= n + 3 + 2n(i - 1), \\
 w(v_{i,3}) &= 2ni - 1, \\
 w(v_{i,1}) &= 2ni - 2, \\
 w(v_{i,n-1}) &= 2ni - 6,
 \end{aligned}$$

untuk j genap, $1 \leq i \leq m$:

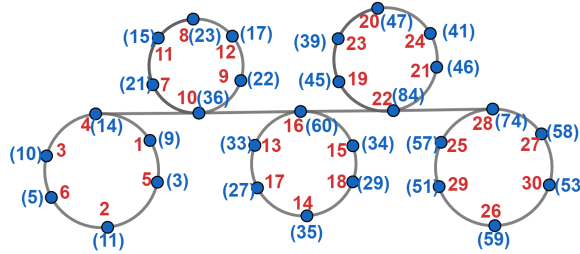
$$\begin{aligned}
 w(v_{i,j}) &= 2j - 2 + 2n(i - 1) && ; \text{ untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2} + 1, \\
 w(v_{i,j}) &= 2n + 4 - 2j + 2n(i - 1) && ; \text{ untuk } \frac{n}{2} + 4 \leq j \leq n - 2, \\
 w(v_{i,2}) &= n(2i - 2) + 3, \\
 w(v_{i,\frac{n}{2}+2}) &= n - 1 + 2n(i - 1). \quad \square
 \end{aligned}$$

Pada Gambar 1 dan Gambar 2 diberikan ilustrasi dari pelabelan anti ajaib jarak pada graf $P_m \supseteq_o C_n$. Angka berwarna merah melambangkan pelabelan titik dan angka berwarna biru melambangkan bobot yang diperoleh. Hal ini berlaku untuk semua gambar.

Teorema 2.2. *Jika $n \geq 5$ dan $m \not\equiv 0 \pmod{4}$ maka graf $C_m \supseteq_o C_n$ merupakan graf anti ajaib jarak.*



Gambar 1. Graf $P_5 \supseteq_o C_7$



Gambar 2. Graf $P_5 \supseteq_o C_6$

Bukti. Diberikan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $C_m \supseteq_o C_n$ sebagai berikut.

$$V(C_m \supseteq_o C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \cup \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\},$$

$$E(C_m \supseteq_o C_n) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-2\}$$

$$\cup \{v_i v_{(i,1)}, v_i v_{(i,n-1)} | 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_1 v_m\}.$$

Pelabelan titik pada graf $C_m \supseteq_o C_n$ sama seperti pelabelan titik pada graf $P_m \supseteq_o C_n$. Untuk $w(v_{i,j})$ sama seperti pelabelan bobot $w(v_{i,j})$ pada graf $P_m \supseteq_o C_n$. Begitu pula untuk pelabelan bobot $w(v_i)$ dimana untuk $2 \leq i \leq m-1$ sama seperti pada graf $P_m \supseteq_o C_n$. Selanjutnya dicari pelabelan bobot untuk $w(v_1)$ dan $w(v_m)$. Hal ini berlaku untuk semua n .

(Kasus 1) Untuk n ganjil.

$$w(v_1) = n(3 + m),$$

$$w(v_m) = 3nm - n.$$

(Kasus 2) Untuk n genap.

Berikut adalah bobot untuk $w(v_1)$ dan $w(v_m)$ dari graf $C_m \supseteq_o C_n$ untuk n genap.

$$(2.1) \ n \equiv 2 \pmod{4}.$$

$$w(v_1) = \frac{3n}{2} + nm + 3,$$

$$w(v_m) = 3 - \frac{5n}{2} + 3nm.$$

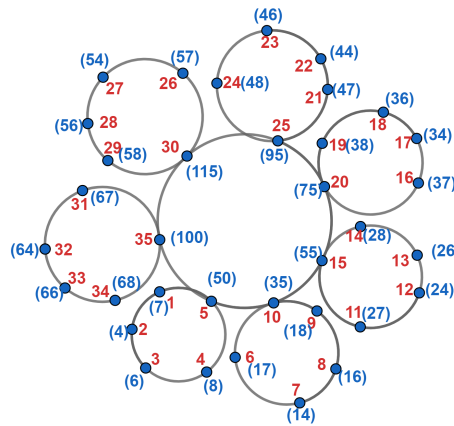
$$(2.2) \ n \equiv 0 \pmod{4}.$$

$$w(v_1) = n(2 + m),$$

$$w(v_m) = 3nm - 2n.$$

□

Pada Gambar 3 diberikan contoh pelabelan anti ajaib jarak pada graf $C_m \triangleright_o C_n$ untuk n ganjil, sementara untuk n genap diberikan pada Gambar 4.



Gambar 3. Graf $C_7 \triangleright_o C_5$

Teorema 2.3. *Graf $S_m \triangleright_o C_n$ untuk $n \geq 5$ merupakan graf anti ajaib jarak.*

Bukti. Diberikan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $S_m \triangleright_o C_n$ sebagai berikut.

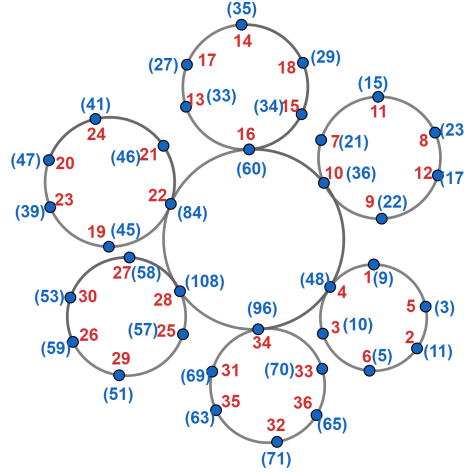
$$V(S_m \triangleright_o C_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_m\} \bigcup \{v_{i,j} | 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\},$$

$$E(S_m \triangleright_o C_n) = \{v_0 v_i | 1 \leq i \leq m\} \bigcup \{v_{i,j} v_{i,j+1} | 0 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-2\}$$

$$\bigcup \{v_i v_{i,1}, v_i v_{i,n-1} | 0 \leq i \leq m\}.$$

(Kasus 1) Untuk n ganjil, $m \geq 3$.

Berdasarkan himpunan titik dan sisi yang diketahui diperoleh pelabelan titik untuk graf $S_m \triangleright_o C_n$ adalah $f(v_i) = n(i+1)$ berlaku untuk $0 \leq i \leq m$ dan $f(v_{i,j}) = n(i+1) - j$, berlaku untuk $0 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n-1$. Sehingga untuk pelabelan bobot $w(v_{i,j})$ pada graf $S_m \triangleright_o C_n$ sama seperti



Gambar 4. Graf $C_6 \supseteq_o C_6$

pelabelan bobot $w(v_{i,j})$ pada graf $P_m \supseteq_o C_n$. Yang membedakan adalah pada fungsinya jika awalnya i maka berubah menjadi $i + 1$ dikarenakan pada graf $S_m \supseteq_o C_n$ titik i dimulai dari 0. Selanjutnya dicari pelabelan bobot untuk $w(v_i)$ dan $w(v_0)$. Hal ini berlaku untuk semua n .

$$w(v_i) = 2ni + 2n,$$

$$w(v_0) = n + \frac{m}{2}(nm + 3n).$$

(Kasus 2) Untuk n genap.

(2.1) $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Pelabelan titik untuk kasus n genap dimana $n \equiv 2 \pmod{4}$ ialah $f(v_i) = \frac{n}{2} + 1 + ni$, berlaku untuk $0 \leq i \leq m$ dan $f(v_{i,j}) = \frac{j+1}{2} + ni$, berlaku untuk j ganjil, dan untuk j genap $f(v_{i,j}) = \frac{n}{2} + 1 + \frac{j}{2} + ni$, dimana $1 \leq j \leq n-1$, $0 \leq i \leq m$. Dari pelabelan titik tersebut, diperoleh pelabelan bobot pada graf $S_m \supseteq_o C_n$ untuk kasus $n \equiv 2 \pmod{4}$ sebagai berikut.

$$w(v_i) = 2ni + n + 2,$$

$$w(v_0) = 1 + \frac{n}{2} + \frac{m}{2}(2n + nm + 2).$$

(2.2) $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Berdasarkan himpunan titik dan sisi yang diketahui, diperoleh pelabelan titik $f(v_i) = n - 2 + ni$ berlaku untuk $0 \leq i \leq m$, sedangkan untuk

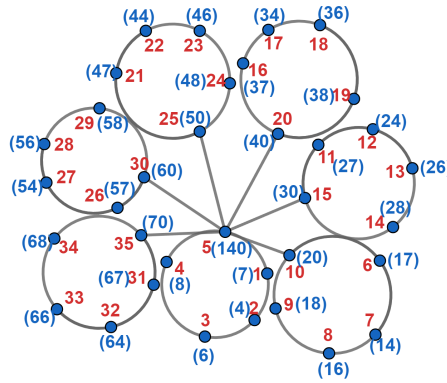
$f(v_{i,j})$ dimana $0 \leq i \leq m$ diperoleh pelabelan titik sebagai berikut.

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 1 + ni & ; \text{ untuk } j = 1, \\ j - 1 + ni & ; \text{ untuk } j \text{ ganjil}, 2 \leq j \leq \frac{n}{2} + 1, \\ n + 2 - j + ni & ; \text{ untuk } j \text{ ganjil}, \frac{n}{2} + 2 \leq j \leq n - 1, \\ n + ni, & ; \text{ untuk } j = 2, \\ n + 3 - j + ni & ; \text{ untuk } j \text{ genap}, 3 \leq j \leq \frac{n}{2} + 2, \\ j - 2 + ni, & ; \text{ untuk } j \text{ genap}, \frac{n}{2} + 3 \leq j \leq n - 2. \end{cases}$$

Maka diperoleh bobot untuk kasus $n \equiv 0 \pmod{4}$ adalah:

$$\begin{aligned} w(v_i) &= 2ni + n + 2, \\ w(v_0) &= 4 + \frac{m}{2}(3n + nm - 4). \end{aligned} \quad \square$$

Ilustrasi pelabelan anti ajaib jarak pada graf $S_m \supseteq_o C_n$ untuk kasus n ganjil dapat dilihat pada Gambar 5, sementara untuk n genap diberikan pada Gambar 6.



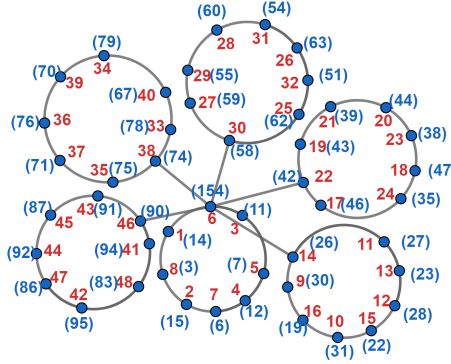
Gambar 5. Graf $S_6 \supseteq_o C_5$

Teorema 2.4. *Graf $W_m \supseteq_o C_n$ merupakan graf anti ajaib jarak berlaku untuk $m, n \geq 5$ dan n ganjil.*

Bukti. Diberikan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $W_m \supseteq_o C_n$ sebagai berikut.

$$V(W_m \supseteq_o C_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_m\} \cup \{v_{i,j} \mid 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\},$$

$$\begin{aligned} E(W_m \supseteq_o C_n) &= \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{v_1 v_m\} \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} \mid 0 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-2\} \\ &\quad \cup \{v_i v_{(i,1)}, v_i v_{(i,n-1)} \mid 0 \leq i \leq m\} \cup \{v_0 v_i \mid 1 \leq i \leq m\}. \end{aligned}$$



Gambar 6. Graf $S_5 \succeq_o C_8$

(Kasus 1) Untuk n ganjil dan $m \not\equiv 0 \pmod{4}$

Pelabelan titik untuk graf $W_m \succeq_o C_n$ sama seperti pelabelan titik untuk graf $S_m \succeq_o C_n$ sehingga diperoleh bobot setiap titik adalah:

$$w(v_i) = 4ni + 4n,$$

$$w(v_1) = 8n + nm,$$

$$w(v_m) = 4n + 3nm,$$

$$w(v_0) = n + \frac{m}{2} (3n + nm).$$

Untuk $w(v_{i,j})$ sama seperti pelabelan bobot $w(v_{i,j})$ pada graf $P_m \succeq_o C_n$. Yang membedakan adalah pada fungsinya. Jika awalnya i maka berubah menjadi $i + 1$, dikarenakan pada graf $W_m \succeq_o C_n$ i dimulai dari 0.

(Kasus 2) Untuk $m \equiv 0 \pmod{4}$

Berdasarkan himpunan titik dan sisi yang diketahui, diperoleh pelabelan titiknya ialah $f(v_i) = n(i + 1)$ dan $f(v_{i,j}) = n(i + 1) - j$, berlaku untuk $i \geq 2$. Lalu $f(v_0) = 2n$ dan $f(v_{0,j}) = 2n - j$, berlaku untuk $i = 0$, serta untuk $i = 1$ diperoleh $f(v_1) = n$ dan $f(v_{1,j}) = n - j$. Sehingga diperoleh bobotnya adalah sebagai berikut.

$$w(v_i) = 4ni + 5n,$$

$$w(v_1) = 7n + nm,$$

$$w(v_2) = 12n,$$

$$w(v_m) = 4n + 3nm,$$

$$w(v_0) = 4n + \frac{m-1}{2} (4n + nm),$$

$$w(v_{i,j}) = 2n(i + 1) - 2j,$$

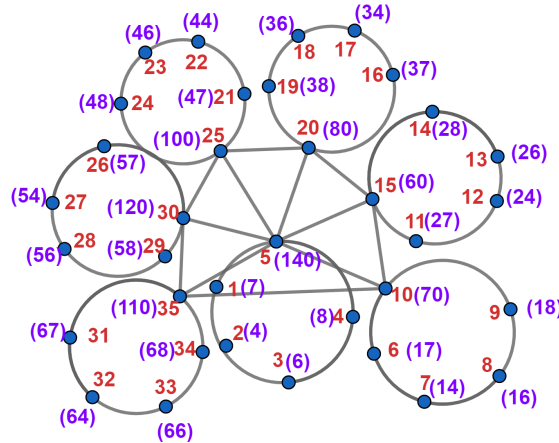
$$w(v_{i,1}) = 2n(i + 1) - 2,$$

$$w(v_{i,n-1}) = 2ni + n + 2 \quad ; \text{ untuk } i \geq 2,$$

$$\begin{aligned}
w(v_{0,j}) &= 4n - 2j, \\
w(v_{0,1}) &= 4n - 2, \\
w(v_{0,n-1}) &= 3n + 2 \quad ; \text{ untuk } i = 0, \\
w(v_{1,j}) &= 2n - 2j, \\
w(v_{1,1}) &= 2n - 2, \\
w(v_{1,n-1}) &= n + 2 \quad ; \text{ untuk } i = 1.
\end{aligned}$$

Berdasarkan pelabelan yang telah dilakukan, dapat ditemukan bentuk umum dari pelabelan anti ajaib jarak pada graf $G \supseteq_o C_n$. $\square$

Berikut adalah contoh untuk graf $W_m \supseteq_o C_n$ dengan n ganjil. Gambar 7 merupakan contoh untuk kasus pertama dimana $m \not\equiv 0 \pmod{4}$. Sedangkan contoh untuk kasus kedua dimana $m \equiv 0 \pmod{4}$ dapat dilihat pada Gambar 8.

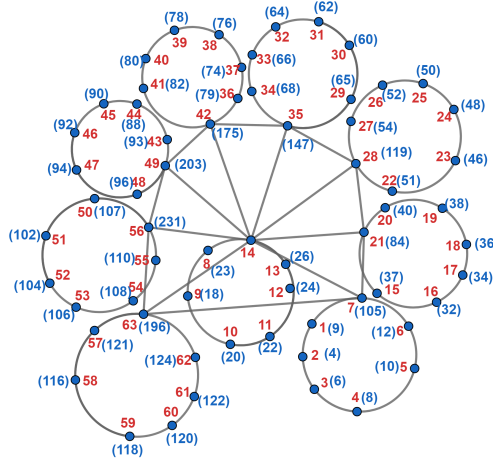


Gambar 7. Graf $W_6 \supseteq_o C_5$

Teorema 2.5. Misalkan G suatu graf terhubung tak trivial dan C_n graf siklus. Jika G graf anti ajaib jarak maka graf $G \supseteq_o C_n$ merupakan graf anti ajaib jarak untuk n ganjil, $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Diketahui G graf anti ajaib jarak dan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ maka terdapat fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ sehingga $w(v_i) \neq w(v_j)$, dengan $w(v_i) = \sum_{x \in N(V_i)} f(x)$. Karena $f(v_i) \neq f(v_j)$, maka definisikan $v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_m}$ sebagai titik-titik di G dengan $f(v_{k_i}) = i$.

- Salinan pertama C_n dengan titik $u_{1,j}$, $1 \leq j \leq n$, dikaitkan dengan v_{k_1} , dengan $o = u_{1,n}$.
- Salinan kedua C_n dengan titik $u_{2,j}$, $1 \leq j \leq n$, dikaitkan dengan v_{k_2} , dengan $o = u_{2,n}$.



Gambar 8. Graf $W_8 \triangleright_o C_7$

Jika diteruskan maka diperoleh untuk salinan ke- i , C_n dengan titik $u_{i,j}$, $1 \leq j \leq n$ yang dikaitkan dengan v_{k_i} , $o = u_{i,n}$. Misalkan $G \triangleright_o C_n$ graf dengan himpunan titik sebagai berikut:

$$V(G \triangleright_o C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \cup \{u_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}.$$

Definisikan $g : V(G \triangleright_o C_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G \triangleright_o C_n)|\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} g(v_{k_i}) &= ni, \\ g(u_{i,j}) &= n(i-1) + j, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

Jelas bahwa g fungsi bijektif. Perhatikan fungsi bobot berikut:

$$\begin{aligned} \bar{w}(u_{i,j}) &= 2n(i-1) + 2j, \\ \bar{w}(u_{i,1}) &= n(2i-1) + 2, \\ \bar{w}(u_{i,n-1}) &= n(2i-1) + n-2, \\ \bar{w}(v_{k_i}) &= nw(v_{k_i}) + 2n(i-1) + n. \end{aligned}$$

Berikut dibuktikan bahwa untuk setiap $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, berlaku $\bar{w}(u) \neq \bar{w}(v)$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\bar{w}(u_{i,j}) | 1 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n-2\} \\ &= \{4, 6, 8, 10, \dots, 2n-4, 2n+4, 2n+6, \dots, 4n-4, 4n+4, 4n+6, \\ &\quad 4n+8, \dots, 6n-4, \dots, 2n(m-1)+4, 2n(m-1)+6, \dots, 2nm-4\}, \\ A_2 &= \{\bar{w}(u_{i,1}) | 1 \leq i \leq m\}, \\ &= \{n+2, 3n+2, 5n+2, 7n+2, \dots, n(2m-1)+2\}, \\ A_3 &= \{\bar{w}(u_{i,n-1}) | 1 \leq i \leq m\}, \\ &= \{2n-2, 4n-2, 6n-2, 8n-2, \dots, 2mn-2\}, \\ A_4 &= \{\bar{w}(v_{k_i}) | 1 \leq i \leq m\}, \\ &= n[\bar{w}(v_{k_i}) + 2(i-1) + 1]. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $1 \leq i \leq 3$, A_i membentuk barisan naik. Begitu juga A_4 membentuk barisan naik karena bobot titik pada graf G berbeda-beda. Selanjutnya, anggota himpunan A_4 merupakan kelipatan n sedangkan yang lain tidak sehingga untuk $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Jadi, graf $G \supseteq_o C_n$ merupakan graf anti ajaib jarak. $\square$

Teorema 2.6. *Misalkan G suatu graf terhubung tak trivial dan W_n graf roda. Jika G graf anti ajaib jarak maka graf $G \supseteq_o W_n$ merupakan graf anti ajaib jarak untuk n genap, $n \geq 6, n \in \mathbb{N}$.*

Bukti. Diberikan graf G dan graf W_n dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $V(W_n) = \{u_i \mid 0 \leq i \leq n\}$, dan u_0 sebagai titik yang berderajat n . Diketahui G graf anti ajaib jarak, maka terdapat $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ bijektif sehingga $w(v_i) \neq w(v_j)$ dengan $w(v_i) = \sum_{x \in N(v_i)} f(x)$. Definisikan himpunan titik dan sisi pada graf $G \supseteq_o W_n$ sebagai berikut.

$$V(G \supseteq_o W_n) = \{v_{k_i} \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\},$$

dengan titik $o = u_{i,0}$ dan $v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_m}$ titik-titik pada G sehingga $f(v_{k_i}) = i$. Kemudian definisikan $g : V(G \supseteq_o W_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G \supseteq_o W_n)|\}$ sebagai berikut.

$$g(v_{k_i}) = (n+1)i,$$

$$g(u_{i,j}) = \begin{cases} (n+1)(i-1) + j, & \text{; untuk } 2 \leq j \leq n-1, \\ (n+1)(i-1) + n, & \text{; untuk } j = 1, \\ (n+1)(i-1) + 1, & \text{; untuk } j = n. \end{cases}$$

Jelas bahwa g adalah fungsi bijektif. Perhatikan fungsi bobot berikut dimana $1 \leq i \leq m$:

$$\begin{aligned} \bar{w}(u_{i,j}) &= (n+1)(3i-2) + 2j, & \text{; untuk } 3 \leq j \leq n-2, \\ \bar{w}(u_{i,1}) &= (n+1)(3i-2) + 3, \\ \bar{w}(u_{i,n}) &= (n+1)(3i-1) + n-2, \\ \bar{w}(u_{i,2}) &= (n+1)(3i-1) + 2, \\ \bar{w}(u_{i,n-1}) &= (n+1)(3i-2) + n-1, \\ \bar{w}(v_{k_i}) &= (n+1)w(v_{k_i}) + n(n+1)(i-1) + \frac{n}{2}(n+1). \end{aligned}$$

Berikut dibuktikan bahwa untuk setiap $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, $\bar{w}(u) \neq \bar{w}(v)$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\bar{w}(u_{i,j}) \mid 1 \leq i \leq m, 3 \leq j \leq n-2\}, \\ &= \{n+7, n+9, n+11, \dots, 3n-3, 4n+10, 4n+12, 4n+14, \dots, 6n, 7n+13, 7n+15, \dots, \\ &\quad 9n+3, \dots, (n+1)(3m-2) + 6, (n+1)(3m-2) + 8, \dots, (n+1)(3m-2) + 2n-4\}, \\ A_2 &= \{\bar{w}(u_{i,1}) \mid 1 \leq i \leq m\}, \\ &= \{n+4, 4n+7, 7n+10, \dots, (n+1)(3m-2) + 3\}, \\ A_3 &= \{\bar{w}(u_{i,n}) \mid 1 \leq i \leq m\}, \\ &= \{3n, 6n+3, 9n+6, \dots, (n+1)(3m-1) + n-2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= \{\bar{w}(u_{i,2}) | 1 \leq i \leq m\}, \\
&= \{2n+4, 5n+7, 8n+10, \dots, (n+1)(3m-1)+2\}, \\
A_5 &= \{\bar{w}(u_{i,n-1}) | 1 \leq i \leq m\}, \\
&= \{2n, 5n+3, 8n+6, \dots, (n+1)(3m-2)+n-1, \\
A_6 &= \{\bar{w}(v_{k_i}) | 1 \leq i \leq m\}, \\
&= \{(n+1)(w(v_{k_1})+n(1-1)+\frac{n}{2}), (n+1)(w(v_{k_2})+n(2-1)+\frac{n}{2}), \\
&\quad (n+1)(w(v_{k_3})+n(3-1)+\frac{n}{2}), \dots, (n+1)(w(v_{k_m})+n(m-1)+\frac{n}{2})\}.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $1 \leq i \leq 5$, A_i membentuk barisan naik. Begitu juga A_6 membentuk barisan naik karena G graf anti ajaib jarak. Lebih lanjut, anggota himpunan A_6 merupakan kelipatan $(n+1)$ sedangkan yang lain tidak. Akibatnya, untuk $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ atau dengan kata lain bobot setiap titik pada graf $G \supseteq_o W_n$ berbeda-beda. Jadi, $G \supseteq_o W_n$ merupakan graf anti-ajaib jarak untuk n genap dan $n \geq 6$. $\square$

3. Kesimpulan

Berdasarkan paparan di atas dapat disimpulkan bahwa dua buah graf yang berbeda dapat menjadi sebuah graf anti ajaib jarak dengan operasi hasil kali sisir di antara kedua graf tersebut. Oleh karena itu, kita dapat memperluas studi tentang pelabelan anti ajaib jarak ini dengan mencoba menggabungkan dua buah graf lainnya atau mencoba dengan operasi lain.

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J. A., Murty, U. S. R., 1976, *Graph Theory with Applications*, Macmillan Press Ltd, Great Britain
- [2] Diestel, R., 2017, *Graph Theory*, Edisi ke-5, Springer, Berlin
- [3] Singh, R. P., Vandana, 2014, Application of Graph Theory in Computer Science and Engineering, *International Journal of Computer Application* Vol. **104**: 10 – 13
- [4] Gallian, J.A., 2022, A Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, #DS6
- [5] Chartrand, G., Egan, C., Zhang, P., 2019, *How to Label a Graph*, Springer, New York
- [6] Simanjuntak, R., Wijaya, K., 2013, *On Distance Antimagic Graphs*, Combinatorial Mathematics Research Group, Bandung
- [7] Arumugam, S., Kamatchi, N., 2015, (a, d) -distance antimagic graphs, *Australas. J. Comb* Vol. **54**: 279 – 288
- [8] Wulandari, R. Y., Simanjuntak, R., 2023, Distance antimagic labelings of product graphs, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* Vol. **11**: 111 – 123
- [9] Kamatchi, N., Vijayakumar, G.R., Ramalakshmi, A., Nilavarasi, S., Arumugam, S., 2017, Distance Antimagic Labelings of Graphs, *Lect. Notes Comp. Sci*

- [10] Miller, M., Simanjuntak, R., 2003, Distance Magic Labelings of Graphs, *Australasian J. Combinat.*, Vol. **28**: 305 – 315
- [11] Simanjuntak, R., Nadeak, T., Yasin, F., Wijaya, K., Hinding, N., Sugeng, K.A., 2021, Another Antimagic Conjecture, *Symmetry*, Vol. **13**
- [12] Cutinho, N.J.; Sudha, S.; Arumugam, S., 2020, Distance antimagic labelings of Cartesian product of graphs, *AKCE Int. J. Graphs Comb* Vol.**17**: 940 – 942
- [13] Simanjuntak, R., Tritama, A., 2022, Distance Antimagic Product Graphs, *Symmetry* Vol. **14**
- [14] Faisal, F., Mardiana, N., Rosiyanti, H., 2019, Dimensi Partisi Graf Hasil Operasi Comb Graf Lingkaran dan Graf Lintasan, *Fibonacci: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*, Vol.**5**: 163
- [15] Handa, A. K., Godinho, A., Singh, T., Arumugam, S., 2017, Distance antimagic labeling of join and corona of two graphs, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* Vol.**14**: 172 – 177
- [16] Kamatchi, N., Arumugam, S., 2013, Distance Antimagic Graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput*, Vol **64**: 61 – 67