

ON THE EDGE METRIC DIMENSION OF HELM AND CLOSED HELM GRAPH

DEDDY RAHMADI*, MUHAMMAD FAUZI NUR ROBIULTSANI, MUCHAMMAD ABRORI

*Prodi Matematika, UIN Sunan Kalijaga,
 email : deddy.rahmadi@uin-suka.ac.id, fauziul.1606@gmail.com,
 muchammad.abrori@uin-suka.ac.id*

Diterima 10 April 2025 Direvisi 14 Mei 2025 Dipublikasikan 31 Juli 2025

Abstrak. Dimensi metrik sisi merupakan kardinalitas himpunan pembeda pada suatu graf. Kumpulan titik dikatakan himpunan pembeda jika untuk setiap titik pada suatu graf, terdapat satu titik yang membedakan setiap sisi pada graf tersebut. Dengan kata lain, terdapat satu titik dalam himpunan pembeda yang jaraknya berbeda terhadap setiap sisi pada graf tersebut. Penelitian ini menggunakan metode pendekatan analisis struktur graf dan konsep jarak antara sisi dan titiknya untuk menentukan dimensi metrik sisi pada suatu graf. Graf helm H_n dibangun dari graf roda W_n dengan menambahkan satu titik anting pada setiap titik pada n cycle. Graf helm tertutup CH_n dibangun dari graf helm H_n di mana pada setiap titik antingnya membentuk sebuah *cycle*. Penelitian ini dapat memberikan landasan teoritis untuk menghitung dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup. Diperoleh hasil dimensi metrik sisi pada graf helm H_n untuk $n \geq 3$ dan graf helm tertutup CH_n untuk $n \geq 3$ adalah 3 untuk $n = 3, 4$ untuk $n = 4$, dan $n - 1$ untuk $n \geq 5$.

Kata Kunci: Dimensi metrik sisi, graf helm, graf helm tertutup

Abstract. The edge metric dimension is the cardinality of the minimum resolving set of a graph. A set of vertices is called a resolving set if, for each vertex in a graph, there exists a vertex that distinguishes every edge in the graph. In other words, there is a vertex in the resolving set whose distance is different for each edge in the graph. This study employs a graph structure analysis approach and the concept of distance between edges and vertices to determine the edge metric dimension of a graph. The helm graph H_n is constructed from the wheel graph W_n by adding a pendant vertex to each vertex in the n -cycle. The closed helm graph CH_n is derived from the helm graph H_n , where each pendant vertex forms a cycle. This research provides a theoretical foundation for calculating the edge metric dimension of helm graphs and closed helm graphs. The edge metric dimension of the helm graph H_n for $n \geq 3$ and the closed helm graph CH_n for $n \geq 3$ are obtained 3 for $n = 3, 4$ for $n = 4$, and $n - 1$ for $n \geq 5$.

Keywords: Edge metric dimension, helm graph, closed helm graph

*Penulis korespondensi

1. Pendahuluan

Dimensi metrik sisi adalah salah satu topik dalam pembahasan mengenai jarak dalam graf. Topik ini merupakan pengembangan dari dimensi metrik yang pertama kali diperkenalkan oleh Slater [1], Harary dan Melter [2]. Dimensi metrik juga telah diterapkan pada beberapa graf seperti graf *cycle* [3], fan [4], roda [6], bipartite reguler [7], graf bunga salju, bunga matahari, roda lipat [8], operasi korona [9], graf jaring laba-laba [10], dan amalgamasi graf theta [11]. Pada pembahasan mengenai dimensi metrik, fokus pembahasan hanya terletak pada jarak antar titik. Namun, pada pembahasan mengenai dimensi metrik sisi, analisis menjadi lebih kompleks karena mempertimbangkan jarak antara titik dan sisi pada suatu graf.

Dimensi metrik sisi diperkenalkan oleh Kelenc dkk [12] pada tahun 2015. Kelenc menjelaskan konsep dimensi metrik sisi, di mana pada penentuan dimensi metrik sisi digunakan sisi sebagai perbandingan, sehingga didefinisikan sebagai jarak antara sisi dengan himpunan pembeda. Misalkan $G = (V, E)$ graf terhubung. Jarak antara titik v dan sisi $e = x_1x_2$ direpresentasikan sebagai $d(e, v) = \min\{d(x_1, v), d(x_2, v)\}$. Jika setiap dua sisi $e_i, e_j \in E$, dengan $i \neq j$, maka terdapat $x \in V$ sehingga $d(e_i, x) \neq d(e_j, x)$. Misalkan $W_E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ dengan $W_E \subseteq V$. Himpunan W_E merupakan himpunan pembeda jika direpresentasikan sebagai berikut.

$$r(e|W_E) = (d(e, x_1), d(e, x_2), \dots, d(e, x_k)) \quad (1.1)$$

untuk setiap sisi $e \in E$. Himpunan W_E merupakan himpunan pembeda pada G jika $r(e_i|W_E) \neq r(e_j|W_E)$ untuk setiap $e_i, e_j \in E$. Kardinalitas minimum himpunan pembeda W_E disebut dimensi metrik sisi, dinotasikan $\text{edim}(G)$. Terdapat beberapa penelitian terkait dimensi metrik dan dimensi metrik sisi. Pada tahun 2020, Ahsan dkk. [13] meneliti tentang dimensi metrik sisi pada beberapa kelas graf sirkulan. Pada tahun 2022, Qu dan Cao [14] juga meneliti tentang dimensi metrik sisi pada graf planar tertentu.

Graf helm H_n adalah graf yang dibangun dari graf roda W_n dengan menambahkan n titik berderajat 1 yang bertetangga dengan setiap titik pada n cycle [15]. Graf helm H_n adalah graf yang dibangun dari graf roda W_n dengan menambahkan n titik berderajat 1 yang adjacent dengan setiap titik pada n cycle [15]. Indeks n pada graf helm H_n menyatakan banyaknya titik pada *cycle* di graf helm H_n sehingga $n \geq 3$. Diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi graf helm H_n sebagai berikut.

$$V(H_n) = \{z, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}, \quad (1.2)$$

$$E(H_n) = E_i \cup E_j \cup E_k, \text{ dimana:}$$

$$E_i = \{zx_i \mid i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$E_j = \{x_i x_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{x_n x_1\}, \quad j = n+1, n+2, \dots, 2n,$$

$$E_k = \{x_i y_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}, \quad k = 2n+1, 2n+2, \dots, 3n. \quad (1.3)$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa:

$$|V(H_n)| = 2n + 1, \quad |E(H_n)| = 3n. \quad (1.4)$$

Graf helm tertutup CH_n adalah graf yang dibangun dari graf helm H_n di mana pada titik antingnya saling terhubung membentuk sebuah *cycle* [16]. Indeks n pada

graf helm tertutup CH_n menyatakan banyaknya titik pada *cycle* di graf helm tertutup CH_n sehingga $n \geq 3$. Diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi graf helm tertutup CH_n sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(CH_n) &= \{z, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}, \\ E(CH_n) &= E_i \cup E_j \cup E_k \cup E_l, \text{ dimana:} \\ E_i &= \{zx_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}, \\ E_j &= \{x_i x_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{x_n x_1\}, \quad j = n+1, n+2, \dots, 2n, \\ E_k &= \{x_i y_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}, \quad k = 2n+1, 2n+2, \dots, 3n, \\ E_l &= \{y_i y_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{y_n y_1\}, \quad l = 3n+1, 3n+2, \dots, 4n. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa:

$$|V(CH_n)| = 2n + 1, \quad |E(CH_n)| = 4n. \quad (1.6)$$

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dengan mengumpulkan referensi dari jurnal maupun buku yang berkaitan dengan topik penelitian untuk mencari dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup. Pendekatan dilakukan dengan memahami konsep dimensi metrik sisi, karakteristik graf helm dan graf helm tertutup, dan menentukan dimensi metrik sisi untuk n titik.

3. Pembahasan

Pada Teorema 3.1 akan dibahas tentang dimensi metrik sisi pada graf helm H_n dengan $n \geq 3$.

Teorema 3.1. *Jika H_n adalah graf helm dengan $n \geq 3$, maka:*

$$\text{edim}(H_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3, \\ 4, & \text{jika } n = 4, \\ n-1, & \text{jika } n \geq 5. \end{cases} \quad (3.1)$$

Bukti. Diberikan graf helm H_n dengan $n \geq 3$. Untuk menentukan dimensi metrik sisi pada graf helm H_n , akan dibagi menjadi tiga kasus berikut.

Kasus 1: Untuk $n = 3$, akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(H_3) = 3$.

Misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 3. Dipilih $W_E = \{z, y_1, y_2\}$, diperoleh representasi setiap sisi terhadap W_E sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(e_1|W_E) &= (0, 1, 2), & r(e_2|W_E) &= (0, 2, 1), & r(e_3|W_E) &= (0, 2, 2), \\ r(e_4|W_E) &= (1, 1, 1), & r(e_5|W_E) &= (1, 2, 1), & r(e_6|W_E) &= (1, 1, 2), \\ r(e_7|W_E) &= (1, 0, 2), & r(e_8|W_E) &= (1, 2, 0), & r(e_9|W_E) &= (1, 2, 2). \end{aligned}$$

Dari representasi tersebut, diperoleh bahwa setiap representasi sisi terhadap W_E memberikan representasi yang berbeda sedemikian sehingga W_E dengan kardinalitas 3 merupakan himpunan pembeda.

Selanjutnya, misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 2. Diperoleh penyelesaiannya sebagai berikut.

- Dipilih $W_E = \{z, x_i\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (0, 1)$.
- Dipilih $W_E = \{z, y_i\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (0, 2)$.
- Dipilih $W_E = \{x_i, x_{i+1}\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (1, 0)$.
- Dipilih $W_E = \{x_i, y_i\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (1, 2)$.
- Dipilih $W_E = \{y_i, y_{i+1}\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (2, 2)$.

Dari hasil penyelesaian tersebut, diperoleh bahwa W_E dengan kardinalitas 2 bukan merupakan himpunan pembeda.

Selanjutnya, misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 1. Oleh karena graf helm H_3 tidak isomorfis dengan graf lintasan P_n , berdasarkan Teorema 3.1, maka $\text{edim}(H_3) \neq 1$. Dengan demikian, $\text{edim}(H_3) = 3$.

Kasus 2: Untuk $n = 4$ akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(H_4) = 4$.

Misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 4. Dipilih $W_E = \{z, x_1, x_2, x_3\}$, diperoleh representasi setiap sisi terhadap W_E sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r(e_1|W_E) &= (0, 0, 1, 1), & r(e_5|W_E) &= (1, 0, 0, 1), & r(e_9|W_E) &= (1, 0, 1, 2), \\ r(e_2|W_E) &= (0, 1, 0, 1), & r(e_6|W_E) &= (1, 1, 0, 0), & r(e_{10}|W_E) &= (1, 1, 0, 1), \\ r(e_3|W_E) &= (0, 1, 1, 0), & r(e_7|W_E) &= (1, 1, 1, 0), & r(e_{11}|W_E) &= (1, 2, 1, 0), \\ r(e_4|W_E) &= (0, 1, 1, 1), & r(e_8|W_E) &= (1, 0, 1, 1), & r(e_{12}|W_E) &= (1, 1, 2, 1). \end{aligned}$$

Dari representasi tersebut, diperoleh bahwa setiap representasi sisi terhadap W_E memberikan representasi yang berbeda, sehingga W_E dengan kardinalitas 4 merupakan himpunan pembeda.

Selanjutnya, misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 3. Diperoleh penyelesaiannya sebagai berikut.

- Dipilih $W_E = \{z, x_i, x_i\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (0, 1, 1)$.
- Dipilih $W_E = \{z, x_i, y_i\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (0, 1, 2)$.
- Dipilih $W_E = \{z, y_i, y_i\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (0, 0, 2)$.
- Dipilih $W_E = \{x_i, x_i, x_i\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (1, 0, 1)$.
- Dipilih $W_E = \{x_i, x_i, y_i\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (1, 0, 2)$.
- Dipilih $W_E = \{x_i, y_i, y_i\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (1, 2, 2)$.

- Dipilih $W_E = \{y_i, y_i, y_i\}$, terdapat dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = (1, 2, 2)$.

Dari hasil penyelesaian tersebut, diperoleh bahwa W_E dengan kardinalitas 3 bukan merupakan himpunan pembeda.

Selanjutnya, misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 2. Diperoleh penyelesaian dengan cara yang sama untuk $n = 3$. Dari hasil penyelesaian tersebut, diperoleh bahwa W_E dengan kardinalitas 2 bukan merupakan himpunan pembeda.

Selanjutnya, misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 1. Oleh karena graf helm H_4 tidak isomorfis dengan graf lintasan P_n , berdasarkan Teorema sebelumnya, maka $\text{edim}(H_4) \neq 1$. Dengan demikian, $\text{edim}(H_4) = 4$.

Kasus 3: Untuk $n \geq 5$ akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(H_n) = n - 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $\text{edim}(H_n) \geq n - 1$. Andaikan W_E merupakan himpunan pembeda $|W_E| < n - 2$. Dipilih $W_E = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-2}\}$, terdapat paling sedikit dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = \{1, 1, \dots, 1\}$. Oleh karena terdapat representasi yang sama, maka W_E bukan merupakan himpunan pembeda. Terjadi kontradiksi dengan pengandaian, dengan demikian, $\text{edim}(H_n) \geq n - 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $\text{edim}(H_n) \leq n - 1$. Misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas $n - 1$. Dipilih $W_E = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$. Berdasarkan karakteristik graf helm H_n , diperoleh representasi setiap sisi terhadap W_E yang disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Tabel representasi setiap sisi terhadap W_E pada graf helm H_n

sisi e	$r(e W_E)$	Keterangan
$e_i = \{zx_i\}$	$(0, 1, \dots, 1)$ $(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$ $(1, 1, \dots, 1)$	$i = 1$ $1 < i < n$ $i = n$
$e_j = \{x_i x_{i+1}\}$	$(0, 0, 1, 2, \dots, 2)$ $(1, 0, 0, 1, 2, \dots, 2)$ $(2, \dots, 2, 1, 0, 0, 1, 2, \dots, 2)$ $(2, \dots, 2, 1, 0, 0, 1)$ $(2, \dots, 2, 1, 0, 0)$ $(1, 2, \dots, 2, 1, 0)$	$j = n + 1, i = 1$ $j = n + 2, i = 2$ $j \geq n + 3, i \geq 3$ $j = 2n - 3, i = n - 3$ $j = 2n - 2, i = n - 2$ $j = 2n - 1, i = n - 1$
$e_j = \{x_n x_1\}$	$(0, 1, 2, \dots, 2, 1)$	$j = 2n$
$e_k = \{x_i y_i\}$	$(0, 1, 2, \dots, 2)$ $(1, 0, 1, 2, \dots, 2)$ $(2, \dots, 2, 1, 0, 1, 2, \dots, 2)$ $(2, \dots, 2, 1, 0)$ $(1, 2, \dots, 2, 1)$	$k = 2n + 1, i = 1$ $k = 2n + 2, i = 2$ $k \geq 2n + 2, 2 < i < n - 1$ $k = 3n - 1, i = n - 1$ $k = 3n, i = n$

Dari kasus $n \geq 5$, diperoleh bahwa untuk $n \geq 5$, $\text{edim}(CH_n) = n - 1$. $\square$

Selanjutnya, diperoleh teorema mengenai dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup CH_n dengan $n \geq 3$.

Teorema 3.2. *Jika CH_n adalah graf helm tertutup dengan $n \geq 3$, maka:*

$$\text{edim}(CH_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3, \\ 4, & \text{jika } n = 4, \\ n - 1, & \text{jika } n \geq 5. \end{cases} \quad (3.2)$$

Bukti. Berikut akan disajikan contoh mengenai dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup CH_n . Diberikan Graf Helm H_n dengan $n \geq 3$. Untuk menentukan dimensi metrik sisi pada graf helm H_n , akan dibagi menjadi tiga kasus.

Kasus 1: Untuk $n = 3$, akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(CH_3) = 3$.

Misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 3. Dipilih $W_E = \{y_1, y_2, y_3\}$, diperoleh representasi setiap sisi terhadap W_E sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r(e_1|W_E) &= (1, 2, 2), & r(e_2|W_E) &= (2, 1, 2), & r(e_3|W_E) &= (2, 2, 1), \\ r(e_4|W_E) &= (1, 1, 2), & r(e_5|W_E) &= (2, 1, 1), & r(e_6|W_E) &= (1, 2, 1), \\ r(e_7|W_E) &= (0, 1, 1), & r(e_8|W_E) &= (1, 0, 1), & r(e_9|W_E) &= (1, 1, 0), \\ r(e_{10}|W_E) &= (0, 0, 1), & r(e_{11}|W_E) &= (1, 0, 0), & r(e_{12}|W_E) &= (0, 1, 0). \end{aligned}$$

Dari representasi tersebut, diperoleh bahwa setiap representasi sisi terhadap W_E memberikan representasi yang berbeda, sehingga W_E dengan kardinalitas 3 merupakan himpunan pembeda. Dengan demikian, $\text{edim}(CH_3) = 3$.

Kasus 2: Untuk $n = 4$, akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(CH_4) = 4$.

Misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 4. Dipilih $W_E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, diperoleh representasi setiap sisi terhadap W_E sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r(e_1|W_E) &= (0, 1, 1, 1), & r(e_2|W_E) &= (1, 0, 1, 1), & r(e_3|W_E) &= (1, 1, 0, 1), \\ r(e_4|W_E) &= (1, 1, 1, 0), & r(e_5|W_E) &= (0, 0, 1, 1), & r(e_6|W_E) &= (1, 0, 0, 1), \\ r(e_7|W_E) &= (1, 1, 0, 0), & r(e_8|W_E) &= (0, 1, 1, 0), & r(e_9|W_E) &= (0, 1, 2, 1), \\ r(e_{10}|W_E) &= (1, 0, 1, 2), & r(e_{11}|W_E) &= (2, 1, 0, 1), & r(e_{12}|W_E) &= (1, 2, 1, 0). \end{aligned}$$

Dari representasi tersebut, diperoleh bahwa setiap representasi sisi terhadap W_E memberikan representasi yang berbeda, sehingga W_E dengan kardinalitas 4 merupakan himpunan pembeda. Dengan demikian, $\text{edim}(CH_4) = 4$.

Kasus 3: Untuk $n \geq 5$, akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(CH_n) = n - 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $\text{edim}(CH_n) \geq n - 1$. Andaikan W_E merupakan himpunan pembeda $|W_E| < n - 2$. Dipilih $W_E = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-2}\}$, terdapat paling sedikit dua sisi $e_i, e_j \in E$ dengan $i \neq j$ sehingga $r(e_i|W_E) = r(e_j|W_E) = \{1, 1, \dots, 1\}$. Oleh karena terdapat representasi yang sama, maka W_E bukan merupakan himpunan pembeda. Kontradiksi dengan pengandaian, dengan demikian, $\text{edim}(CH_n) \geq n - 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $\text{edim}(CH_n) \leq n - 1$. Misalkan W_E merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas $n - 1$. Dipilih $W_E = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$.

Berdasarkan karakteristik graf helm H_n , diperoleh representasi setiap sisi terhadap W_E pada Tabel 2.

Tabel 2. Tabel representasi setiap sisi terhadap W_E pada graf helm tertutup CH_n

sisi e	$r(e W_E)$	Keterangan
$e_l = \{y_i y_{i+1}\}$	$(1, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$l = 3n + 1, i = 1$
	$(2, 1, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$l = 3n + 2, i = 2$
	$(3, \dots, 3, 2, 1, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$l \geq 3n + 3, i \geq 3$
	$(3, \dots, 3, 2, 1, 1, 2)$	$l = 4n - 3, i = n - 3$
	$(3, \dots, 3, 2, 1, 1)$	$l = 4n - 2, i = n - 2$
	$(2, 3, \dots, 3, 2, 1)$	$l = 4n - 1, i = n - 1$
$e_l = \{y_n y_1\}$	$(1, 2, 3, \dots, 3, 2)$	$j = 4n$

Dari kasus $n \geq 5$, diperoleh bahwa untuk $n \geq 5$, $\text{edim}(CH_n) = n - 1$. $\square$

4. Kesimpulan

Penelitian ini menyimpulkan bahwa dimensi metrik sisi (*edge metric dimension*) dari graf helm H_n dan graf helm tertutup CH_n memiliki pola yang sama untuk $n \geq 3$. Nilai dimensi metrik sisi untuk kedua jenis graf tersebut adalah sebagai berikut: sebesar 3 untuk $n = 3$, sebesar 4 untuk $n = 4$, dan sebesar $n - 1$ untuk $n \geq 5$.

Daftar Pustaka

- [1] Slater, P. J., 1975, Leaves of trees, *Proc. 6th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Congressus Numerantium* Vol. **14**: 549 – 559
- [2] Harary, F., Melter, R.A., 1976, On the Metric Dimension of a Graph. *Ars Combinatoria* Vol. **2**: 191 – 195
- [3] Chartrand, G., Poisson, C., Zhang, P., 2000, Resolvability and the upper dimension of graphs, *Czechoslovak Mathematical Journal* Vol. **50**(2): 1121 – 1131
- [4] Chartrand, G., Erwin, M. A. J. L., Oellermann, O., 2000, Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Applied Mathematics* Vol. **105**(1-3): 99 – 113
- [5] Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M., Seara, C., Ciceres, J. C., Puertas, M. L., 2005, On the metric dimension of some families of graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, Volume 22: 129 – 133
- [6] Shanmukha, J., Sooryanarayana, B., Harinath, K., 2002, Metric dimension of wheels, *Far East J. Appl. Math.* Vol. **8**(3): 217 – 229
- [7] Baca, M., Baskoro, E. T., Salman, A. N. M., Saputro, S. W., Suprijanto, D., 2011, The metric dimension of regular bipartite graphs, *Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie* Vol. **54**(1): 15 – 28
- [8] Fajri, M. R., Fajri, L. H., Ashari, J., Abdurrahman, Arsyad, A., 2022, On the Metric Dimension for Snowflake Graph, *Eksakta* Vol. **23**(4): 275 – 290

- [9] Rahmadi, D., Ramadhani, I. N., Dheana, C. E., Mustamin, M. A., 2024, Modeling Network Problem using Metric Dimension: Applied Algorithm on Corona Graph, *Mathematical Journal of Modelling and Forecasting* Vol. **2**(1): 20 – 26
- [10] Janan, T., Janan, S., 2022, Dimensi metrik dari graf jaring laba-laba, *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika* Vol. **5**(2): 181 – 190
- [11] Welyyanti, D., Arsyad, A., Yulianti, L., 2023, Dimensi metrik amalgamasi graf theta, *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications* Vol. 20(2): 241 – 253
- [12] Kelenc, A., Tratnik, N., Yero, I.G., 2018, Uniquely identifying the edges of a graph: The edge metric dimension, *Discrete Applied Mathematics* Vol. **251**: 204 – 220
- [13] Ahsan, M., Zahid, Z., Zafar, S., 2020, Edge metric dimension of some classes of circulant graphs, *An. St. Univ. Ovidius Constanta* Vol. **28**(3): 15 – 37
- [14] J. Qu and N. Cao, Edge metric dimension and mixed metric dimension of planar graph Q_n , *Discrete Applied Mathematics* Vol. **320**: 462 – 475
- [15] Gallian, J. A., 2024, A Dynamic Survey of Graph Labeling, *Electron. J. Comb.* #DS6, 27th ed.
- [16] Youssef, M. Z., 2017, Harmonious labelling of helms and related graphs, doi: 10.13140/RG.2.2.11041.61282