Jurnal Matematika UNAND
Vol. **15** No. **3** Hal. 335 – 345
Edisi Juli 2026
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410
©Departemen Matematika dan Sains Data FMIPA UNAND
https://doi.org/10.25077/jmua.15.3.335-345.2026

MODELING AND STABILITY ANALYSIS OF A BULLYING DYNAMICS WITH VIOLENCE-DRIVEN TRANSMISSION IN SCHOOL ENVIRONMENTS (PEMODELAN DAN ANALISIS KESTABILAN DINAMIKA PERUNDUNGAN DENGAN PENULARAN YANG DIDORONG OLEH KEKERASAN DI LINGKUNGAN SEKOLAH)

NUR ASYIFA KHAYLANA PUTRI, ARRIVAL RINCE PUTRI*, MAHDHIVAN SYAFWAN

Departemen Matematika dan Sains Data, Universitas Andalas
Kampus Unand Limau Manis, Padang 25163, Indonesia
email : arrival@sci.unand.ac.id

Diajukan 12 Januari 2026 Direvisi 16 Juli 2026
Diterima 17 Juli 2026 Diterbitkan 31 Juli 2026

Abstrak. Perundungan di sekolah merupakan masalah sosial yang meluas yang berdampak negatif terhadap kesejahteraan psikologis dan perkembangan sosial siswa. Penelitian ini mengusulkan suatu model matematika kompartemen untuk menggambarkan dinamika perilaku perundungan di lingkungan sekolah, di mana penyebaran perundungan dipengaruhi oleh interaksi antar siswa yang dipicu oleh kekerasan. Populasi dibagi menjadi empat kompartemen: Rentan (S), Pelaku Perundungan (B), Terpapar (E), dan Kekerasan (V). Suatu sistem persamaan diferensial nonlinier diformulasikan untuk merepresentasikan dinamika perpindahan antar kelompok tersebut. Model ini dianalisis untuk menentukan titik kesetimbangan dan sifat kestabilannya. Bilangan reproduksi dasar R_0 diturunkan untuk mengkarakterisasi perilaku ambang dalam penyebaran perundungan. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas perundungan bersifat stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemik ada dan stabil ketika $R_0 > 1$, berdasarkan Kriteria Routh–Hurwitz. Simulasi numerik dilakukan untuk mendukung hasil analitik dan mengilustrasikan dampak transmisi yang dipicu oleh kekerasan terhadap penyebaran perilaku perundungan.

Kata Kunci: Perilaku perlindungan, Pemodelan matematika, Analisis kestabilan

Abstract. *Bullying in schools is a pervasive social issue that negatively affects students' psychological well-being and social development. This study proposes a compartmental mathematical model to describe the dynamics of bullying behavior in a school environment, where the transmission of bullying is influenced by violence-driven interactions among students. The population is divided into four compartments: Susceptible*

*Penulis korespondensi

(S), Bullies (B), Exposed (E), and Violent (V). A nonlinear system of differential equations is formulated to represent the transition dynamics between these groups. The model is analyzed to determine equilibrium points and their stability properties. The basic reproduction number R_0 is derived to characterize the threshold behavior of bullying spread. The analysis shows that the bullying-free equilibrium is locally asymptotically stable when $R_0 < 1$, while the endemic equilibrium exists and is stable when $R_0 > 1$, based on the Routh–Hurwitz Criterion. Numerical simulations are performed to support the analytical findings and illustrate the impact of violence-driven transmission on the spread of bullying behavior.

Keywords: *Bullying* behavior, Mathematical modeling, Stability analysis

1. Pendahuluan

Bullying merupakan salah satu permasalahan sosial serius di lingkungan sekolah yang berdampak jangka panjang terhadap kesehatan mental dan perkembangan sosial peserta didik. Tindakan ini bersifat sistemik, terjadi secara berulang, dan sering kali tidak terdeteksi oleh pengawasan sekolah. Di berbagai negara, termasuk Indonesia, prevalensi *bullying* masih tergolong tinggi. Data dari *National Center for Education Statistics* (2021 – 2022) menunjukkan bahwa sekitar 19% siswa di Amerika Serikat mengalami *bullying*, sementara di Indonesia, Komisi Perlindungan Anak Indonesia (KPAI) melaporkan sekitar 3.800 kasus *bullying* sepanjang tahun 2023, dengan sebagian besar terjadi di lingkungan pendidikan [1,2]. Temuan ini menunjukkan bahwa *bullying* merupakan fenomena yang persisten dan memiliki pola interaksi yang kompleks sehingga memerlukan pendekatan kuantitatif untuk memahami dinamika penyebarannya secara lebih komprehensif.

Pendekatan melalui model matematika memungkinkan analisis terhadap interaksi berbagai faktor yang memengaruhi suatu fenomena, termasuk pola penyebaran berbagai perilaku sosial. Salah satu pendekatan yang banyak digunakan adalah model kompartemen yang diadaptasi dari model epidemi karena mampu menggambarkan proses perpindahan individu antar keadaan akibat interaksi sosial. Ashi [3] mengembangkan model dua populasi yang menggambarkan dinamika antara korban dan pelaku bullying serta menunjukkan adanya titik kesetimbangan dan fenomena bifurkasi. Selanjutnya, Crokidakis [4] memperluas model tersebut dengan memasukkan pengaruh interaksi sosial dalam penyebaran perilaku *bullying*. Di Indonesia, Syafruddin dkk. [5] mengadaptasi model tersebut menggunakan data lokal dari Kabupaten Gowa untuk menggambarkan karakteristik penyebaran bullying pada lingkungan sekolah.

Meskipun demikian, sebagian besar model yang telah dikembangkan mengasumsikan bahwa populasi siswa bersifat tertutup sehingga belum mempertimbangkan dinamika masuk dan keluarnya individu dari sistem sekolah. Dalam kenyataannya, populasi sekolah bersifat dinamis karena adanya penerimaan siswa baru, perpindahan sekolah, kelulusan, maupun putus sekolah. Perubahan komposisi populasi tersebut berpotensi memengaruhi tingkat penyebaran perilaku *bullying*, keberadaan titik kesetimbangan, serta efektivitas strategi pengendalian. Oleh karena itu, memasukkan laju rekrutmen dan laju keluar populasi ke dalam model tidak hanya menghasilkan representasi yang lebih realistis terhadap kondisi sekolah, tetapi juga

memungkinkan analisis mengenai pengaruh pergantian populasi terhadap keberlangsungan perilaku *bullying* dalam jangka panjang.

Berdasarkan kesenjangan tersebut, penelitian ini mengembangkan model matematika dinamika perilaku *bullying* di lingkungan sekolah dengan mempertimbangkan mekanisme *violence-driven transmission* serta dinamika populasi terbuka melalui penambahan laju rekrutmen dan laju keluar populasi. Selain itu, penelitian ini menganalisis pengaruh tekanan sosial terhadap munculnya pelaku *bullying*. Model yang diusulkan membagi populasi ke dalam empat subpopulasi, yaitu individu rentan (*susceptible*), korban terpapar atau pasif (*exposed*), pelaku (*bullies*), dan individu yang merespons dengan kekerasan (*violent*). Dibandingkan dengan penelitian sebelumnya, model ini memberikan kontribusi baru berupa analisis pengaruh dinamika pergantian populasi terhadap kondisi bebas *bullying* maupun kondisi endemik, sehingga dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai faktor-faktor yang memengaruhi persistensi *bullying* di lingkungan sekolah. Selain itu, model ini diharapkan dapat menjadi dasar dalam merancang strategi pencegahan yang mempertimbangkan dinamika populasi siswa, misalnya melalui program orientasi siswa baru, pembinaan berkelanjutan, dan intervensi pada kelompok yang paling berisiko.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan melalui studi literatur terhadap berbagai sumber yang relevan, seperti jurnal ilmiah, buku, dan artikel yang berkaitan dengan pemodelan matematika dan dinamika perilaku *bullying*. Berdasarkan kajian tersebut, diidentifikasi variabel dan parameter yang memengaruhi interaksi antarindividu dalam lingkungan sekolah. Selanjutnya, dengan menggunakan sejumlah asumsi yang sesuai, dikonstruksi suatu model matematika berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier yang merepresentasikan dinamika perilaku *bullying* dalam empat subpopulasi, yaitu *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Bullies* (B), dan *Violent* (V). Diagram alir model disusun untuk menggambarkan mekanisme transisi antar kompartemen. Analisis matematis dilakukan dengan menentukan titik ekuilibrium model, yaitu titik ekuilibrium bebas bullying dan titik ekuilibrium endemik. Kestabilan lokal dari masing-masing titik ekuilibrium dianalisis menggunakan matriks Jacobian melalui penentuan nilai eigen serta kriteria Routh–Hurwitz. Selain itu, bilangan reproduksi dasar R_0 dihitung menggunakan metode Next Generation Matrix untuk menentukan kondisi ambang penyebaran perilaku *bullying*. Untuk mendukung hasil analisis, dilakukan simulasi numerik menggunakan perangkat lunak komputasi guna menggambarkan dinamika solusi sistem serta memverifikasi kestabilan titik ekuilibrium yang diperoleh secara analitik.

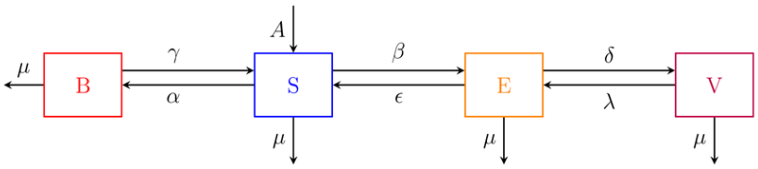
3. Hasil dan Pembahasan

3.1. *Model Matematika Bullying*

Tahap awal dalam konstruksi model matematika perilaku *bullying* di lingkungan sekolah dimulai dengan identifikasi variabel dan parameter yang merepresentasikan

dinamika interaksi antarindividu dalam populasi siswa. Populasi dibagi ke dalam empat subpopulasi, yaitu *Susceptible* (S), individu yang belum terlibat dalam perilaku *bullying*; *Exposed* (E), individu yang menjadi korban namun tidak merespons secara agresif; *Bullies* (B)), individu yang secara aktif melakukan bullying; serta *Violent* (V), individu yang merespons bullying dengan perilaku kekerasan. Model dikembangkan berdasarkan beberapa asumsi dasar, antara lain adanya laju rekrutmen individu baru ke dalam populasi rentan serta laju keluar populasi akibat kelulusan, perpindahan, atau putus sekolah. Perpindahan antar subpopulasi terjadi akibat interaksi sosial antarindividu, di mana setiap individu hanya dapat berada pada satu kompartemen dalam satu waktu. Berbeda dengan model-model sebelumnya, dalam penelitian ini diperkenalkan mekanisme*violence-driven transmission*, di mana keberadaan individu dalam kompartemen *Violent* (V) berperan dalam meningkatkan intensitas interaksi agresif yang dapat mempercepat transisi individu rentan atau terpapar menjadi pelaku bullying. Dengan demikian, kompartemen V tidak hanya merepresentasikan respons individu, tetapi juga bertindak sebagai faktor penguat dalam dinamika penyebaran perilaku bullying.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, model diformulasikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier yang menggambarkan laju perubahan masing-masing subpopulasi terhadap waktu. Struktur model ini selanjutnya digunakan untuk menganalisis dinamika sistem, termasuk penentuan titik ekuilibrium serta kestabilannya. Diagram alir yang menggambarkan perpindahan individu dari setiap kompartemen, digambarkan pada Gambar 1.



Gambar 1: Diagram Aliran Transisi antar Subpopulasi

Misalkan $S = S(t)$, $B = B(t)$, $E = E(t)$, $V = V(t)$ masing-masing merepresentasikan jumlah individu (siswa) dalam populasi yang bergantung terhadap waktu. Berdasarkan Gambar 1, maka model dinamika perilaku *bullying* di sekolah diberikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= A - \beta SB - \alpha SB - \mu S + \gamma B + \epsilon E, \\
\frac{dB}{dt} &= -\gamma B + \alpha SB - \mu B, \\
\frac{dE}{dt} &= -\epsilon E - \delta E + \beta SB + \lambda V - \mu E, \\
\frac{dV}{dt} &= -\lambda V + \delta E - \mu V,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

dimana A merupakan laju rekrutmen siswa baru ke dalam populasi rentan;

μ menunjukkan laju keluar dari setiap subpopulasi; α menunjukkan laju transisi dari individu rentan menjadi pelaku karena tekanan sosial; β merepresentasikan kemungkinan individu rentan menjadi korban non-kekerasan akibat interaksi dengan pelaku; ε menggambarkan korban yang berhenti mengalami *bullying* dan kembali rentan; γ menunjukkan pelaku yang berhenti melakukan *bullying*; δ menunjukkan korban yang beralih menjadi pelaku kekerasan; dan λ merepresentasikan pelaku kekerasan yang kembali menjadi korban non-kekerasan. Parameter A adalah konstanta positif dan $\beta,\ \alpha,\ \gamma,\ \epsilon,\ \delta,\ \lambda,\ \mu$ adalah konstanta dalam rentang $0-1$.

3.2. *Titik Ekuilibrium dan Analisis Kestabilan*

Terdapat dua titik ekuilibrium dari Sistem (3.1), yaitu titik ekuilibrium bebas *bullying* dimana hanya individu rentan yang ada dalam populasi, tidak terdapat individu yang terlibat dalam perilaku *bullying*, baik sebagai pelaku maupun korban:

$$T^0 = \left(S^0, B^0, E^0, V^0\right) = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0\right), \tag{3.2}$$

dan titik ekuilibrium endemik, yang merepresentasikan bahwa bullying tetap ada dalam populasi:

$$T^* = \left(S^*, B^*, E^*, V^*\right), \tag{3.3}$$

dimana:

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{\mu+\gamma}{\alpha},\\
B^* &= \frac{A}{\mu + \frac{\beta}{\alpha}(\mu+\gamma)\left(1-\frac{\epsilon}{C}\right)}\left(1-\frac{1}{R_0}\right),\\
E^* &= \frac{A\beta(\mu+\gamma)}{\alpha C\left[\mu + \frac{\beta}{\alpha}(\mu+\gamma)\left(1-\frac{\epsilon}{C}\right)\right]}\left(1-\frac{1}{R_0}\right),\\
V^* &= \frac{A\delta\beta(\mu+\gamma)}{\alpha C(\lambda+\mu)\left[\mu + \frac{\beta}{\alpha}(\mu+\gamma)\left(1-\frac{\epsilon}{C}\right)\right]}\left(1-\frac{1}{R_0}\right),\\
C &= \epsilon + \mu + \frac{\mu\delta}{\lambda+\mu}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditentukan bilangan reproduksi dasar (R_0), yang didefinisikan sebagai rata-rata jumlah individu yang dapat terinfeksi oleh satu orang terinfeksi dalam suatu populasi yang seluruhnya rentan [6]. Bilangan R_0 dapat memprediksi apakah suatu penyakit akan menyebar dalam suatu populasi atau justru menghilang. Nilai ini digunakan untuk menilai seberapa parah suatu wabah [7]. Jika $R_0 > 1$, wabah diperkirakan akan berlanjut; jika $R_0 < 1$, wabah akan berakhir; dan jika $R_0 = 1$, infeksi tetap ada dalam populasi namun tidak berkembang menjadi wabah [8].

Berdasarkan metode *Next Generation Matrix* [9], bilangan reproduksi dasar dari model (3.1) diberikan oleh:

$$R_0 = \frac{\alpha A}{\mu(\gamma+\mu)}.$$

Nilai R_0 akan meningkat apabila nilai α dan A meningkat, karena keduanya berkontribusi langsung terhadap bertambahnya jumlah pelaku bullying baru. Sebaliknya, peningkatan nilai γ dan μ akan menurunkan nilai R_0, karena mempercepat transisi individu keluar dari subpopulasi *Bullies*.

Kestabilan dari titik ekuilibrium dianalisis dengan menggunakan matriks Jacobian dari model (3.1), yaitu:

$$J = \begin{pmatrix} -B(\beta+\alpha)-\mu & -S(\beta+\alpha)+\gamma & \epsilon & 0 \\ \alpha B & \alpha S-\gamma-\mu & 0 & 0 \\ \beta B & \beta S & -(\epsilon+\delta+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \delta & -(\lambda+\mu) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Untuk menentukan matriks Jacobian titik ekuilibrium bebas-*bullying*, substitusi Persamaan (3.2) ke matriks pada Persamaan (3.4), sehingga diperoleh:

$$J(T^0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\frac{A}{\mu}(\beta+\alpha)+\gamma & \epsilon & 0 \\ 0 & \frac{\alpha A}{\mu}-\gamma-\mu & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta A}{\mu} & -(\epsilon+\delta+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \delta & -(\lambda+\mu) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Berdasarkan matriks pada Persamaan (3.5), diperoleh persamaan karakteristik dengan nilai eigen x,

$$(-\mu-x)\left(\frac{\alpha A}{\mu}-\gamma-\mu-x\right)[(\epsilon+\delta+\mu+x)(\lambda+\mu+x)-\lambda\delta] = 0.$$

Menggunakan kriteria Routh-Hurwitz [10], maka persamaan:

$$(\epsilon+\delta+\mu+x)(\lambda+\mu+x)-\lambda\delta = 0$$

memiliki bagian riil dari semua nilai eigen x bernilai negatif. Selain itu, diperoleh kedua nilai eigen lainnya, yaitu:

$$x_1 = -\mu \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{\alpha A}{\mu}-\gamma-\mu.$$

Perhatikan bahwa x_2 dapat ditulis menjadi:

$$x_2 = (\mu+\gamma)(R_0-1),$$

dan agar x_2 bernilai negatif, maka $R_0 - 1 < 0$ atau $R_0 < 1$. Dengan demikian, jika $R_0 < 1$, maka bagian riil dari seluruh nilai eigen matriks (3.5) bernilai negatif yang menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas-*bullying* stabil asimtotik.

Selanjutnya, analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik diperoleh dengan cara yang sama dengan sebelumnya. Matriks Jacobian untuk titik ekuilubrium endemik diberikan oleh:

$$J(T^*) = \begin{pmatrix} -B^*(\beta+\alpha)-\mu & -S^*(\beta+\alpha)+\gamma & \epsilon & 0 \\ \alpha B^* & \alpha S^*-\gamma-\mu & 0 & 0 \\ \beta B^* & \beta S^* & -(\epsilon+\delta+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \delta & -(\lambda+\mu) \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Berdasarkan matriks pada Persamaan (3.6), diperoleh persamaan karakteristik dengan berderajat empat $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$, dengan:

$$\begin{aligned}
a_1 &= (\alpha+\beta)B^* + \epsilon + \delta + \lambda + 3\mu,\\
a_2 &= K + (\alpha+\beta)(\lambda+\mu)B^* + \mu(\lambda+\mu) + [\alpha(\epsilon+\delta+\mu) + \beta(\delta+\mu)]\,B^*\\
&\quad + \mu(\epsilon+\delta+\mu) + \alpha\mu B^* + (\mu+\gamma)\beta B^*,\\
a_3 &= K(\mu+\alpha B^*) + \mu\beta B^*(\lambda+\mu+\delta) + B^*(\lambda+\mu)(\alpha\mu+\beta\gamma+\beta\mu)\\
&\quad + \alpha\mu B^*(\epsilon+\delta+\mu) + B^*\beta(\mu+\gamma)(\delta+\mu),\\
a_4 &= B^*\left[\epsilon\alpha\mu(\lambda+\mu) + \beta\mu(\lambda+\delta+\mu)(\mu+\gamma) + \alpha\mu^2(\lambda+\delta+\mu)\right],\\
K &= \lambda(\epsilon+\mu) + \mu(\epsilon+\delta+\mu).
\end{aligned}$$

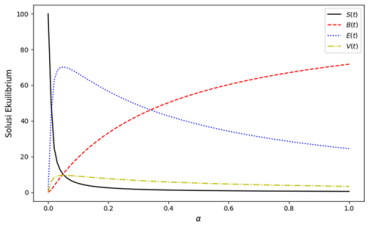
Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz [10], titik ekuilibrium endemik T^* bersifat stabil asimtotik lokal apabila memenuhi syarat $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, dan $a_4 > 0$, serta $a_1a_2 - a_3 > 0$, $a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2 > 0$. Karena seluruh parameter model bernilai positif dan $R_0 > 1$, maka diperoleh $B^* > 0$, sehingga seluruh koefisien $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, dan $a_4 > 0$ bernilai positif. Selain itu, kedua determinan Hurwitz, yaitu $a_1a_2 - a_3$ dan $a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2$ juga bernilai positif. Dapat disimpulkan bahwa seluruh syarat kriteria Routh–Hurwitz terpenuhi, sehingga titik kesetimbangan endemik T^* dinyatakan stabil asimtotik lokal.

3.3. *Simulasi Numerik*

Seluruh parameter model diasumsikan bernilai positif dengan kondisi awal yang tidak negatif, yang merepresentasikan jumlah individu pada masing-masing kompartemen. Dengan demikian, solusi sistem tetap berada pada daerah tak-negatif sehingga seluruh variabel keadaan mempertahankan makna fisiknya sebagai jumlah individu pada setiap kompartemen selama periode pengamatan. Oleh karena itu, analisis dinamika dalam penelitian ini dibatasi pada daerah layak yang terdiri atas solusi-solusi tak-negatif.

Parameter dan nilai awal yang digunakan dalam model adalah $A = 30$; $\mu = 0,30$; $\beta = 0,30$; $\gamma = 0,20$; $\delta = 0,05$; $\lambda = 0,07$; $\epsilon = 0,10$; $S(0) = 100$; $B(0) = 30$; $E(0) = 30$; *dan* $V(0) = 2$. Gambar 2 menyajikan solusi ekuilibrium, baik untuk kondisi bebas-*bullying* maupun solusi endemik, pada masing-masing subpopulasi. Nilai ekuilibrium S, B, E, V ditampilkan sebagai fungsi dari α. Analisis difokuskan pada parameter α karena parameter tersebut merepresentasikan laju transisi individu rentan (*susceptible*) menjadi pelaku *bullying (bullies)* akibat tekanan sosial dari lingkungan sekolah. Parameter ini merupakan mekanisme utama yang menggambarkan proses penyebaran perilaku *bullying* dalam model yang diusulkan, sehingga perubahan nilainya secara langsung memengaruhi jumlah pelaku *bullying* dan dinamika sistem secara keseluruhan. Oleh karena itu, variasi parameter α digunakan untuk mengevaluasi pengaruh tekanan sosial terhadap kestabilan sistem dan perkembangan perilaku *bullying*, sedangkan parameter lainnya dipertahankan konstan agar pengaruh spesifik dari α dapat diamati secara lebih jelas.

Gambar 2 menunjukkan bahwa perubahan parameter α memberikan pengaruh yang signifikan terhadap nilai ekuilibrium masing-masing kompartemen dalam



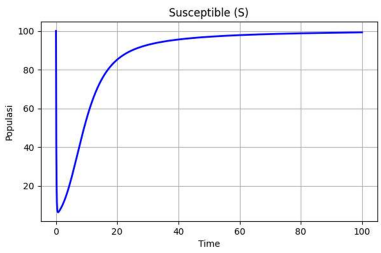
Gambar 2: Solusi ekuilibrium berubah terhadap α.

model. Seiring meningkatnya α, jumlah individu rentan $S(t)$ mengalami penurunan yang sangat tajam, yang mengindikasikan bahwa semakin kuat pengaruh interaksi berbasis kekerasan, semakin sedikit individu yang tetap berada dalam kondisi rentan. Sebaliknya, jumlah pelaku perundungan $B(t)$ meningkat secara konsisten, menunjukkan bahwa peningkatan α mempercepat pertumbuhan perilaku bullying dalam populasi. Sementara itu, jumlah individu terpapar $E(t)$ mengalami peningkatan pada awalnya hingga mencapai titik maksimum, kemudian menurun secara bertahap, yang menandakan adanya transisi individu dari status terpapar menuju status lain, khususnya menjadi pelaku.

Di sisi lain, jumlah individu yang mengalami kekerasan $V(t)$ menunjukkan kecenderungan menurun secara perlahan seiring bertambahnya α, yang mengindikasikan bahwa dalam jangka panjang proporsinya menjadi relatif kecil dibandingkan kompartemen lainnya. Secara keseluruhan, dinamika ini menunjukkan bahwa peningkatan α mendorong sistem menuju kondisi ekuilibrium di mana perilaku perundungan menjadi lebih dominan dalam populasi. Hal ini menegaskan bahwa parameter α, yang merepresentasikan intensitas pengaruh kekerasan, memiliki peran penting dalam menentukan tingkat penyebaran bullying, sehingga pengendalian terhadap faktor ini menjadi kunci dalam upaya menekan perkembangan perilaku perundungan di lingkungan sekolah.

Gambar 3 menyajikan solusi ekuilibrium bebas-*bullying* dengan nilai parameter $\alpha = 0,0048$ dan nilai $R_0 = 0,96$, sedangkan Gambar 4 menyajikan solusi ekuilibrium endemik dengan nilai α yang beragam. Pada Gambar 3a dapat diamati bahwa subpopulasi S menunjukkan pola stabil di sekitar nilai ekuilibrium $S^0 = 100$. Kestabilan ini mengindikasikan bahwa tanpa adanya tekanan *bullying* berkelanjutan, populasi rentan cenderung mempertahankan jumlah konstan. Pada Gambar 3b dan Gambar 3c, terlihat penurunan eksponensial menuju nilai ekuilibrium $B^0 = E^0 = 0$. Hal ini disebabkan oleh nilai $R_0 = 0.96 < 1$ yang menunjukkan ketidakmampuan *bullying* untuk bertahan dalam populasi. Gambar 3d menunjukkan subpopulasi V yang langsung menuju $V^0 = 0$ tanpa peningkatan signifikan, disebabkan oleh rendahnya transisi dari *Exposed* ke *Violent* ($\delta = 0.05$).

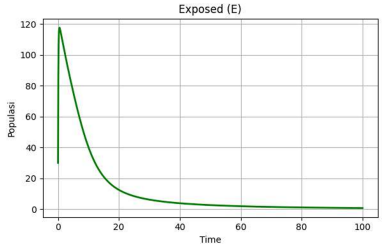
Pada Gambar 4 dapat diamati bahwa untuk keempat nilai α, seluruh subpopulasi mencapai keadaan stabil seiring waktu. Hal ini menunjukkan bahwa sistem berada pada kondisi titik ekuilibrium endemik yang bersifat stabil asimtotik. Untuk semua nilai α, $E(t)$ menunjukkan jumlah tertinggi dan mencapai kestabilan paling



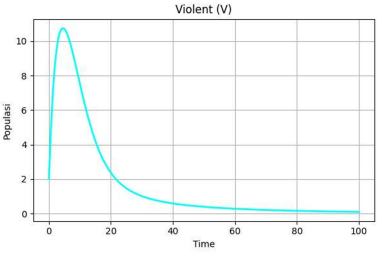
(a) Grafik Subpopulasi *Susceptible*



(b) Grafik Subpopulasi *Bullies*



(c) Grafik Subpopulasi *Exposed*



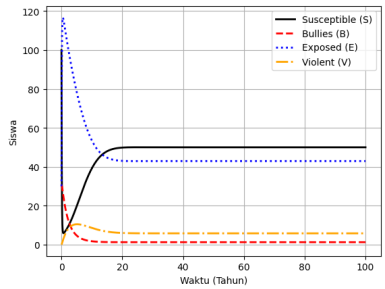
(d) Grafik Subpopulasi *Violent*

Gambar 3: Grafik solusi untuk titik ekuilibrium bebas-*bullying*.

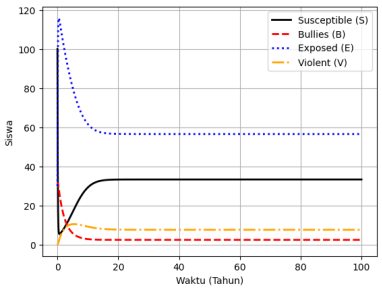
lambat. Ini mengindikasikan bahwa dalam dinamika jangka panjang, sebagian besar individu yang terpapar *bullying* cenderung tidak membalas dengan kekerasan, melainkan tetap berada di posisi korban pasif. Hal ini sejalan dengan asumsi bahwa tidak semua korban berubah menjadi pelaku atau menjadi agresif.

4. Kesimpulan

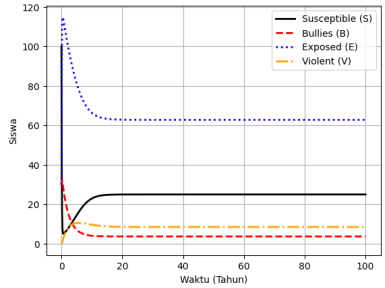
Penelitian ini mengembangkan model matematika berbasis sistem persamaan diferensial nonlinier untuk menggambarkan dinamika perilaku *bullying* di lingkungan sekolah melalui empat subpopulasi, yaitu individu rentan, pelaku *bullying*, korban, dan korban yang merespons dengan kekerasan. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas *bullying* bersifat stabil ketika $R_0 < 1$, sedangkan titik ekuilibrium endemik stabil ketika $R_0 > 1$ dengan memenuhi syarat kriteria Routh–Hurwitz. Dalam konteks model ini, R_0 diinterpretasikan sebagai indikator keberlanjutan perilaku bullying akibat interaksi sosial di lingkungan sekolah. Simulasi numerik mendukung hasil analitik dan menunjukkan bahwa peningkatan parameter α, yang merepresentasikan laju transisi individu rentan menjadi pelaku akibat tekanan sosial, meningkatkan persistensi perilaku *bullying* dalam populasi sekolah. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pengurangan tekanan sosial berpotensi menekan keberlanjutan perilaku *bullying*. Dengan demikian, model yang dikembangkan memberikan dasar kuantitatif untuk memahami dinamika *bullying* serta mendukung perumusan strategi pencegahan dan pengendalian *bullying* di lingkungan sekolah.



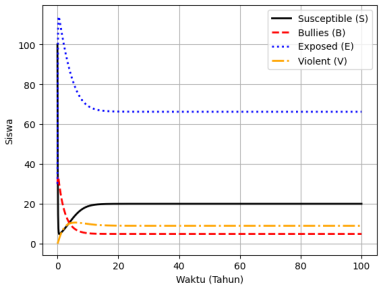
(a) Grafik untuk $\alpha = 0.01$



(b) Grafik untuk $\alpha = 0.015$



(c) Grafik untuk $\alpha = 0.02$



(d) Grafik untuk $\alpha = 0.025$

Gambar 4: Grafik solusi kondisi titik ekuilibrium endemik untuk berbagai nilai α.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Andalas atas pendanaan penelitian skema Penelitian Skripsi Sarjana (PSS) dengan nomor kontrak 199/UN16.19/PT.01.03/PSS/2025.

Daftar Pustaka

[1] National Center for Education Statistics, 2024, Student Bullying, accessed: 2026

[2] KPAI, 2024, KPAI ungkap sekitar 3.800 kasus perundungan sepanjang 2023, hampir separuh terjadi di lembaga pendidikan, Suara Surabaya

[3] Ashi, H.A., 2022, Stability analysis of a simple mathematical model for school bullying, *AIMS Mathematics*, Vol. **7**: 4936–4945

[4] Crokidakis, N., 2025, A mathematical model for the bullying dynamics in school, *Applied Mathematics and Computation*

[5] Asya, A.Z.R., Damang, D., Side, S., Yusuf, M.R., Pratama, M.I., 2024, Solusi Masalah Bullying Menggunakan Pemodelan Matematika Dengan Bimbingan Dan Kounseling Pada Pelajar Madrasah Di Kabupaten Gowa, *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika Dan Pendidikan Matematika*, Vol. **7**: 604–615

[6] Sooknanan, J., Comissiong, D.M.G., 2018, A mathematical model for the treatment of delinquent behaviour, *Socio-Economic Planning Sciences*, Vol. **63**

[7] Lauren, R., Evans, N., O, J., 2022, COVID-19 Pandemic: World in Turmoil,

Train Education
[8] Delameter, P.L., Street, E.J., Leslie, T.F., Yang, Y.T., Jacobsen, K.H., 2019, Complexity of the basic reproduction number (R_0), *Emerging Infectious Diseases*, Vol. **25**
[9] Martcheva, M., 2015, An Introduction to Mathematical Epidemiology, Springer, New York
[10] Murray, J.D., 2007, Mathematical Biology: I. An Introduction, Springer Science & Business Media