

**ON THE METRIC DIMENSION OF
 BUCKMINSTERFULLERENE-TYPE $(B_{60}(1, t))$
 FOR $1 \leq t \leq 5$
 (DIMENSI METRIK GRAF
 BUCKMINSTERFULLERENE-TYPE $(B_{60}(1, t))$
 UNTUK $1 \leq t \leq 5$)**

DES WELYYANTI*, MUTIA AMALIA, LYRA YULIANTI, RIFDA SASMI ZAHRA

*Departemen Matematika dan Sains Data,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis, Padang, 25163.
 email : wely@sci.unand.ac.id, mutiaamalia04@gmail.com,
 lyra@sci.unand.ac.id, rifdasasmizahra83@gmail.com*

Diajukan 21 Januari 2026 Direvisi 21 Oktober 2026
 Diterima 22 Oktober 2026 Diterbitkan 23 Oktober 2026

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Misalkan u dan v adalah titik-titik dalam graf terhubung G , panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G dinotasikan $d(u, v)$. Jika $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ suatu himpunan terurut dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik $v \in V(G)$ maka representasi dari titik v terhadap A , dinotasikan $r(v|A)$ adalah $r(v|A) = (d(v, a_1), d(v, a_2), \dots, d(v, a_k))$. Jika $r(v|A)$ untuk setiap titik $v \in V(G)$ berbeda, maka A dinamakan himpunan pemisah dari G . Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum dinamakan himpunan pemisah minimum, dan kardinalitas dari himpunan pemisah minimum dinamakan dimensi metrik (metric dimension) dari G , dinotasikan $\dim(G)$. Pada penelitian ini dibahas mengenai dimensi metrik graf *Buckminsterfullerene-type* yang dinotasikan $B_{60}(1, t)$ untuk $1 \leq t \leq 5$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai $\dim(G) = 4$ untuk $t = 1$ dan $\dim(G) = 2t + 1$ untuk $2 \leq t \leq 5$.

Kata Kunci: Dimensi metrik, graf *Buckminsterfullerene*, graf *Buckminsterfullerene-type*, himpunan pemisah, representasi

Abstract. Let $G = (V, E)$ is a connected graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. Define u and v is vertices in G connected graph, the length of the shortest path from u to v of G , denoted by $d(u, v)$. If $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ an ordered set from vertices of G connected graph and vertex $v \in V(G)$, then representation from vertex v with respect to A , denoted by $r(v|A)$ is $r(v|A) = (d(v, a_1), d(v, a_2), \dots, d(v, a_k))$. If $r(v|A)$ have distinct representation, then A is called the resolving set of G . The resolving set with minimum cardinality is called minimum resolving set, and the cardinality from minimum resolving set is called the metric dimension of G , denoted by $\dim(G)$. In this

*penulis korespondensi

paper, we discuss about metric dimension of Buckminsterfullerene-type graph, denoted by $B_{60}(1, t)$ for $1 \leq t \leq 5$. Specifically, the main results reveal that $\dim(G) = 4$ for $t = 1$ and $\dim(G) = 2t + 1$ for $2 \leq t \leq 5$.

Keywords: Continuous mortality modelling, Gaussian Process, TMPI 2023

1. Pendahuluan

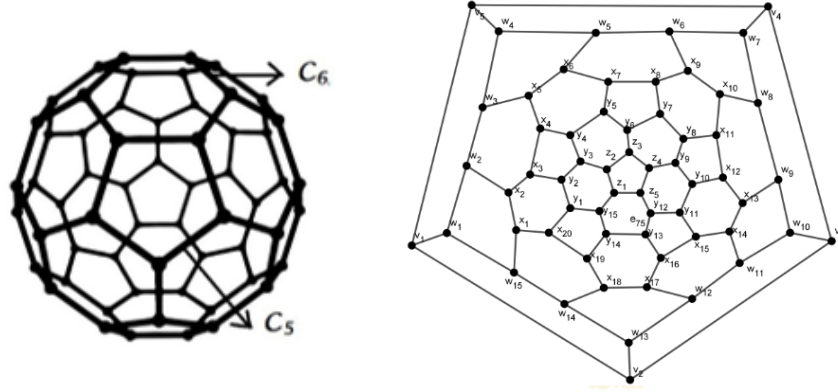
Suatu graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dinotasikan $G = (V, E)$, dengan V merupakan himpunan tidak kosong yang anggota-anggotanya dinamakan **titik** (*vertex*) dari G , dan E merupakan **himpunan sisi** (*edge*) yang menghubungkan dua titik di graf G [1]. Salah satu kajian dalam teori graf yang dibahas dalam penelitian ini adalah dimensi metrik. Istilah dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Melter [2].

Definisi baku dimensi metrik diberikan oleh Chartrand dkk. [3] sebagai berikut. Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Misalkan u dan v adalah titik-titik dalam graf terhubung G , panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G dinotasikan $d(u, v)$. Jika $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ suatu himpunan terurut dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik $v \in V(G)$ maka representasi dari titik v terhadap A , dinotasikan $r(v|A)$ adalah $r(v|A) = (d(v, a_1), d(v, a_2), \dots, d(v, a_k))$. Jika $r(v|A)$ untuk setiap titik $v \in V(G)$ berbeda, maka A dinamakan **himpunan pemisah** dari G . Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum dinamakan **himpunan pemisah minimum**, dan kardinalitas dari himpunan pemisah minimum dinamakan **dimensi metrik** (*metric dimension*) dari G , dinotasikan $\dim(G)$.

Simanjuntak dkk. [4] menentukan batas atas dan batas bawah dimensi metrik graf hasil operasi amalgamasi. Kemudian, Yulianti dkk. [5] memperoleh dimensi metrik graf hasil operasi *thorn* dan subdivisi terhadap graf lengkap. Selanjutnya, Febrianti dkk. [6] dan Putri dkk. [7] memperoleh dimensi metrik amalgamasi graf tangga segitiga diperumum homogen berukuran kecil. Kemudian Yulianti dkk. [8] memperumum hasil [6] dan [7] dengan menentukan dimensi metrik graf amalgamasi graf tangga segitiga diperumum sebarang. Hasil lainnya adalah dimensi metrik graf hasil operasi *comb product* oleh Saputro dkk. [9], graf hasil operasi join antara graf roda dengan graf siklus $W_n + C_n$ untuk $n \in \{3, 4\}$ oleh Putra [10], graf amalgamasi dari graf Theta oleh Welyyanti dkk. [11], dan amalgamasi dari graf lengkap oleh Abdurrahman dkk. [12].

Molekul *Fullerene* dapat direpresentasikan dengan atom sebagai titik dan ikatan antar atom sebagai sisi [13]. Graf *Fullerene* yang merupakan representasi dari molekul tersebut memiliki sisi banyak (polihedral) yang terbuat dari atom karbon, seperti yang dapat dilihat pada Gambar 1(a).

Graf *Fullerene* yang memiliki titik $n = 20$ dinamakan graf Dodecahedral dan graf *Fullerene* yang memiliki titik $n = 60$ dinamakan graf *Buckminsterfullerene* [14]. Graf $(k, 6)$ -*Fullerene* didefinisikan oleh Akhter dkk. [15] sebagai graf *Fullerene* yang memuat graf siklus C_k dan graf siklus C_6 , untuk beberapa nilai k . Pada artikel yang sama, Akhter dkk. [15] menunjukkan bahwa dimensi metrik graf $(3, 6)$ -*Fullerene* dan $(4, 6)$ -*Fullerene* adalah 3. Dalam [15] juga diberikan masalah terbuka yang berkaitan

Gambar 1. (a) Graf *Fullerene* dan (b) Graf *Buckminsterfullerene*

dengan penentuan dimensi metrik graf $(5, 6)$ -*Fullerene*. Salah satu bentuk sederhana dan representatif dari graf $(5, 6)$ -*Fullerene* adalah graf *Buckminsterfullerene* (B_{60}) yang terdiri dari 12 muka segi-lima (C_5) dan 20 muka segi-enam (C_6), dapat dilihat pada Gambar 1(b).

Putri [16] menunjukkan bahwa dimensi metrik graf *Buckminsterfullerene* B_{60} adalah 3. Kemudian, Yulianti dkk. [17] menentukan dimensi metrik dua graf hasil modifikasi graf B_{60} , yaitu graf *Buckminsterfullerene*-subdivisi dan *Buckminsterfullerene*-star. Sebagai upaya untuk memperluas kajian dan menjadi jembatan dalam menyelesaikan masalah terbuka mengenai graf $(5, 6)$ -*Fullerene* dari Akhter dkk. [15], graf yang menjadi perhatian pada penelitian ini adalah modifikasi dari graf *Buckminsterfullerene*, yaitu graf *Buckminsterfullerene*-type yang dinotasikan $B_{60}(1, t)$ untuk $1 \leq t \leq 5$. Konstruksi graf tersebut dilakukan oleh Putri dkk. [18]. Pembatasan $1 \leq t \leq 5$ dilakukan karena untuk $t > 5$, pola representasi koordinat metrik mengalami pergeseran struktur yang memerlukan pendekatan pembuktian yang berbeda.

2. Graf *Buckminsterfullerene*-type

Dinotasikan B_{60} sebagai graf *Buckminsterfullerene* dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$$V(B_{60}) = \{v_i, z_i | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w_j, y_j | 1 \leq j \leq 15\} \cup \{x_k | 1 \leq k \leq 20\}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} E(B_{60}) = & \{v_l v_{l+1}, z_l z_{l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \cup \{w_m w_{m+1}, y_m y_{m+1} | 1 \leq m \leq 14\} \\ & \cup \{x_n x_{n+1} | 1 \leq n \leq 19\} \cup \{v_1 v_5, z_1 z_5, w_1 w_{15}, y_1 y_{15}, x_1 x_{20}\} \\ & \cup \{v_1 w_{3i-2} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w_{3i-1} x_{4i-2} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w_{3l} x_{4l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \\ & \cup \{x_{4i-1} y_{3i-1} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{x_{4l} y_{3l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \cup \{y_{3l} z_{l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \\ & \cup \{w_{15} x_1, x_{20} y_1, y_{15} z_1\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dalam [18] Putri dkk. mendefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi graf *Buckminsterfullerene*-type sebagai berikut. Misalkan t ialah bilangan bulat positif

untuk $1 \leq t \leq 5$, dan dinotasikan $B_{60}^{(t)}$ sebagai graf *Buckminsterfullerene* ke- t , sehingga himpunan titik dan himpunan sisi $B_{60}^{(t)}$ untuk $1 \leq t \leq 5$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$V(B_{60}^{(t)}) = \{v_{t,i}, z_{t,i} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w_{t,j}, y_{t,j} | 1 \leq j \leq 15\} \cup \{x_{t,k} | 1 \leq k \leq 20\}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} E(B_{60}^{(t)}) = & \{v_{t,l}v_{t,l+1}, z_{t,l}z_{t,l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \cup \{w_{t,m}w_{t,m+1}, y_{t,m}y_{t,m+1} | 1 \leq m \leq 14\} \\ & \cup \{x_{t,n}x_{t,n+1} | 1 \leq n \leq 19\} \cup \{v_{t,1}v_{t,5}, z_{t,1}z_{t,5}, w_{t,1}w_{t,15}, y_{t,1}y_{t,15}, x_{t,1}x_{t,20}\} \\ & \cup \{v_{t,1}w_{t,3i-2} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w_{t,3i-1}x_{t,4i-2} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w_{t,3l}x_{t,4l+1} | \\ & 1 \leq l \leq 4\} \cup \{x_{t,4i-1}y_{t,3i-1} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{x_{t,4l}y_{t,3l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \\ & \cup \{y_{t,3l}z_{t,l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \cup \{w_{t,15}x_{t,1}, x_{t,20}y_{t,1}, y_{t,15}z_{t,1}\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Graf *Buckminsterfullerene-type* dikonstruksi dengan mengidentifikasi titik v_t dan $v_{t,1}$, dan dinotasikan titik yang baru dengan $v_{t,1}$ untuk $1 \leq t \leq 5$. Dinotasikan graf *Buckminsterfullerene-type* dengan $G = B_{60}(1, t)$ untuk $1 \leq t \leq 5$, dan dinotasikan B_{60} sebagai graf *Buckminsterfullerene*, sehingga dari Persamaan (2.1), (2.2), (2.3), dan (2.4) diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G sebagai berikut:

$$V(G) = \bigcup_{t=1}^5 V(B_{60}^{(t)}) \cup V(B_{60}) \setminus \{v_i | 1 \leq i \leq 5\}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} E(G) = & \bigcup_{t=1}^5 E(B_{60}^{(t)}) \cup E(B_{60}) \setminus \{v_l v_{l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \cup \{v_{1,1}v_{5,1}\} \\ & \cup \{v_{i,1}w_{3i-2} | 1 \leq i \leq 5\} \setminus (\{v_l v_{l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \cup \{v_1 v_5\} \\ & \cup \{v_i w_{3i-2} | 1 \leq i \leq 5\}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Graf *Buckminsterfullerene-type* $G = B_{60}(1, t)$ untuk $1 \leq t \leq 5$ diberikan pada Gambar 2.

3. Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas mengenai dimensi metrik graf *Buckminsterfullerene-type* yang dinotasikan dengan $G = B_{60}(1, t)$ untuk $1 \leq t \leq 5$.

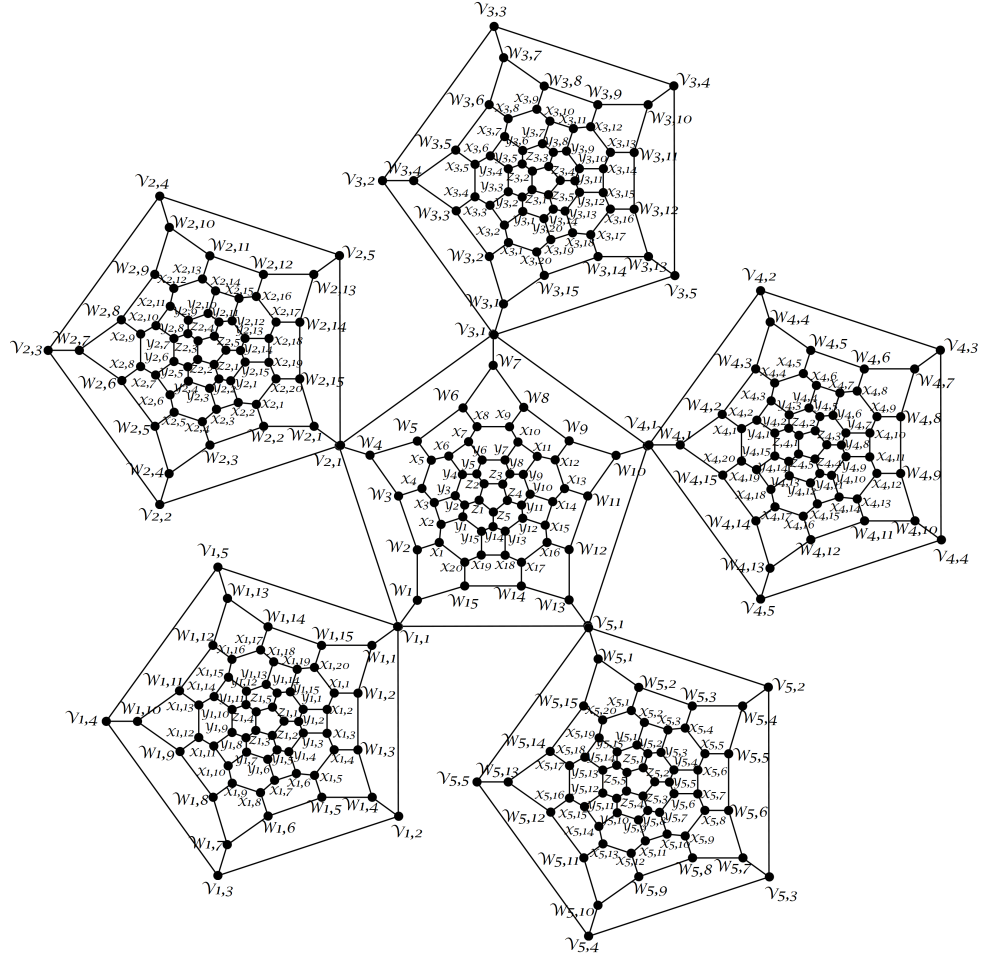
Teorema 3.1. Misalkan $G = B_{60}(1, t)$ untuk $1 \leq t \leq 5$ adalah graf *Buckminsterfullerene-type*. Maka:

$$\dim(G) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } t = 1 \\ 2t + 1, & \text{untuk } 2 \leq t \leq 5. \end{cases}$$

Bukti. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. $t = 1$.

Untuk menunjukkan $\dim(G) \leq 4$, ambil $A = \{v_{1,3}, x_{1,17}, x_{13}, v_2\}$, dengan $v_{1,3}, x_{1,17}, x_{13}$ dan v_2 merupakan titik-titik di G seperti yang dapat dilihat pada Gambar 3. Notasikan representasi setiap titik di G terhadap A adalah $r(v|A = (d(v, v_{1,3}), d(v, x_{1,17}), d(v, x_{13}), d(v, v_2))$, $\forall v \in V(G)$. Diperoleh representasi semua titik pada graf G terhadap A adalah:

Gambar 2. Graf Buckminsterfullerene-type $G = B_{60}(1, t)$ untuk $1 \leq t \leq 5$

$$\begin{array}{lll}
 r(v_{1,1}|A) = (2, 4, 5, 1), & r(v_{1,2}|A) = (1, 5, 6, 2), & r(v_{1,3}|A) = (0, 5, 7, 3), \\
 r(v_{1,4}|A) = (1, 4, 7, 3), & r(v_{1,5}|A) = (2, 3, 6, 2), & r(v_2|A) = (3, 5, 5, 0), \\
 r(v_3|A) = (4, 6, 4, 1), & r(v_4|A) = (4, 6, 3, 2), & r(v_5|A) = (3, 5, 4, 2), \\
 r(w_1|A) = (3, 5, 6, 2), & r(w_2|A) = (4, 6, 7, 3), & r(w_3|A) = (5, 7, 7, 2), \\
 r(w_4|A) = (4, 6, 6, 1), & r(w_5|A) = (5, 7, 6, 2), & r(w_6|A) = (6, 8, 5, 3), \\
 r(w_7|A) = (5, 7, 4, 2), & r(w_8|A) = (6, 8, 3, 3), & r(w_9|A) = (6, 8, 2, 4), \\
 r(w_{10}|A) = (5, 7, 2, 3), & r(w_{11}|A) = (6, 8, 1, 4), & r(w_{12}|A) = (5, 7, 2, 4), \\
 r(w_{13}|A) = (4, 6, 3, 3), & r(w_{14}|A) = (5, 7, 4, 4), & r(w_{15}|A) = (4, 6, 5, 3), \\
 r(w_{1,1}|A) = (3, 3, 6, 2), & r(w_{1,2}|A) = (4, 4, 7, 3), & r(w_{1,3}|A) = (3, 5, 8, 4), \\
 r(w_{1,4}|A) = (2, 6, 7, 3), & r(w_{1,5}|A) = (3, 7, 8, 4), & r(w_{1,6}|A) = (2, 7, 9, 5), \\
 r(w_{1,7}|A) = (1, 6, 8, 4), & r(w_{1,8}|A) = (2, 6, 9, 5), & r(w_{1,9}|A) = (3, 5, 9, 5), \\
 r(w_{1,10}|A) = (2, 4, 8, 4), & r(w_{1,11}|A) = (3, 3, 9, 5), & r(w_{1,12}|A) = (4, 2, 8, 4), \\
 r(w_{1,13}|A) = (3, 2, 7, 3), & r(w_{1,14}|A) = (4, 1, 8, 4), & r(w_{1,15}|A) = (4, 2, 7, 3),
 \end{array}$$

$r(x_1 A) = (5, 7, 7, 4),$	$r(x_2 A) = (6, 8, 8, 5),$	$r(x_3 A) = (7, 9, 9, 4),$
$r(x_4 A) = (6, 8, 8, 3),$	$r(x_5 A) = (6, 8, 7, 3),$	$r(x_6 A) = (7, 9, 7, 4),$
$r(x_7 A) = (8, 10, 6, 5),$	$r(x_8 A) = (7, 9, 5, 4),$	$r(x_9 A) = (7, 9, 4, 4),$
$r(x_{10} A) = (8, 10, 3, 5),$	$r(x_{11} A) = (8, 10, 2, 6),$	$r(x_{12} A) = (7, 9, 1, 5),$
$r(x_{13} A) = (7, 9, 0, 5),$	$r(x_{14} A) = (8, 10, 1, 6),$	$r(x_{15} A) = (7, 9, 2, 6),$
$r(x_{16} A) = (6, 8, 3, 5),$	$r(x_{17} A) = (6, 8, 4, 5),$	$r(x_{18} A) = (7, 9, 5, 6),$
$r(x_{19} A) = (6, 8, 6, 5),$	$r(x_{20} A) = (5, 7, 6, 4),$	$r(x_{1,1} A) = (5, 4, 8, 4),$
$r(x_{1,2} A) = (6, 5, 9, 5),$	$r(x_{1,3} A) = (5, 6, 10, 6),$	$r(x_{1,4} A) = (4, 6, 9, 5),$
$r(x_{1,5} A) = (4, 7, 9, 5),$	$r(x_{1,6} A) = (5, 8, 10, 6),$	$r(x_{1,7} A) = (4, 9, 11, 7),$
$r(x_{1,8} A) = (3, 8, 10, 6),$	$r(x_{1,9} A) = (3, 7, 10, 6),$	$r(x_{1,10} A) = (4, 7, 11, 7),$
$r(x_{1,11} A) = (5, 6, 11, 7),$	$r(x_{1,12} A) = (4, 5, 10, 6),$	$r(x_{1,13} A) = (4, 4, 10, 6),$
$r(x_{1,14} A) = (5, 3, 11, 7),$	$r(x_{1,15} A) = (6, 2, 10, 6),$	$r(x_{1,16} A) = (5, 1, 9, 5),$
$r(x_{1,17} A) = (5, 0, 9, 5),$	$r(x_{1,18} A) = (6, 1, 10, 6),$	$r(x_{1,19} A) = (6, 2, 9, 5),$
$r(x_{1,20} A) = (5, 3, 8, 4),$	$r(y_1 A) = (7, 9, 7, 6),$	$r(y_2 A) = (8, 10, 7, 6),$
$r(y_3 A) = (8, 10, 8, 5),$	$r(y_4 A) = (8, 10, 7, 5),$	$r(y_5 A) = (9, 11, 6, 6),$
$r(y_6 A) = (9, 11, 5, 6),$	$r(y_7 A) = (9, 11, 4, 6),$	$r(y_8 A) = (10, 12, 4, 7),$
$r(y_9 A) = (9, 11, 3, 7),$	$r(y_{10} A) = (9, 11, 2, 7),$	$r(y_{11} A) = (9, 11, 3, 8),$
$r(y_{12} A) = (8, 10, 3, 7),$	$r(y_{13} A) = (8, 10, 4, 7),$	$r(y_{14} A) = (8, 10, 5, 7),$
$r(y_{15} A) = (7, 9, 6, 6),$	$r(y_{1,1} A) = (7, 4, 10, 6),$	$r(y_{1,2} A) = (7, 5, 11, 7),$
$r(y_{1,3} A) = (6, 6, 11, 7),$	$r(y_{1,4} A) = (6, 7, 11, 7),$	$r(y_{1,5} A) = (6, 7, 12, 8),$
$r(y_{1,6} A) = (5, 8, 12, 8),$	$r(y_{1,7} A) = (5, 7, 12, 8),$	$r(y_{1,8} A) = (6, 6, 13, 9),$
$r(y_{1,9} A) = (6, 5, 12, 8),$	$r(y_{1,10} A) = (6, 4, 12, 8),$	$r(y_{1,11} A) = (7, 4, 12, 8),$
$r(y_{1,12} A) = (7, 3, 11, 7),$	$r(y_{1,13} A) = (7, 2, 11, 7),$	$r(y_{1,14} A) = (8, 3, 11, 7),$
$r(y_{1,15} A) = (7, 3, 10, 6),$	$r(z_1 A) = (9, 11, 6, 7),$	$r(z_2 A) = (10, 12, 6, 7),$
$r(z_3 A) = (11, 13, 5, 8),$	$r(z_4 A) = (10, 12, 4, 9),$	$r(z_5 A) = (9, 11, 5, 8),$
$r(z_{1,1} A) = (8, 5, 12, 8),$	$r(z_{1,2} A) = (7, 6, 13, 9),$	$r(z_{1,3} A) = (7, 6, 14, 10),$
$r(z_{1,4} A) = (8, 5, 13, 9),$	$r(z_{1,5} A) = (9, 4, 12, 8).$	

Karena setiap titik pada G memiliki representasi yang berbeda, maka A adalah himpunan pemisah, sehingga:

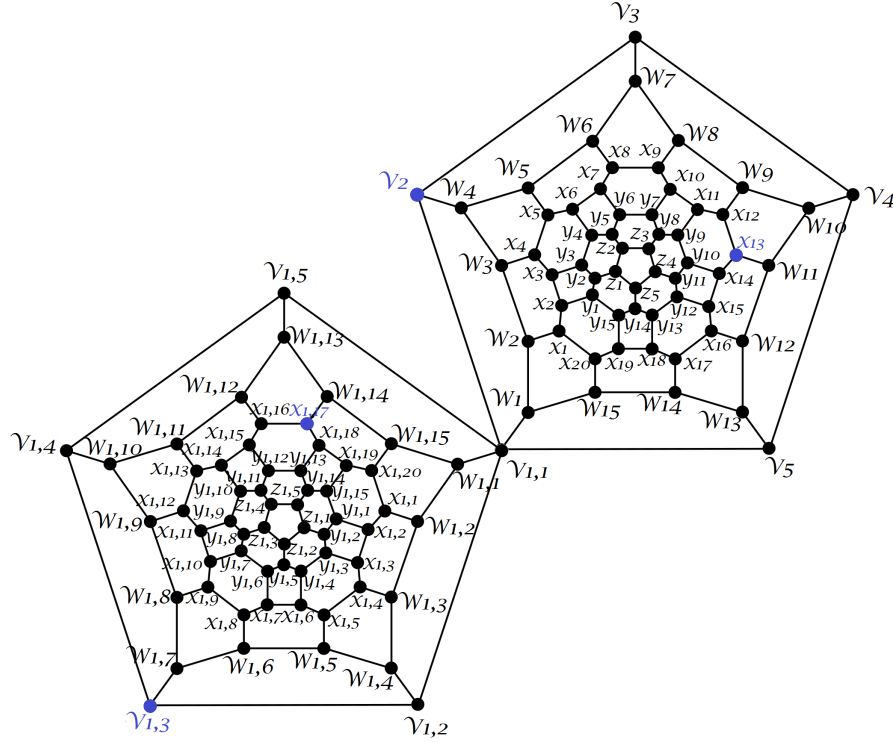
$$\dim(G) \leq 4. \quad (3.1)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang kemungkinan A dengan $|A| < 4$, akan selalu terdapat minimal dua titik dengan representasi yang sama. Jika diambil sebarang kemungkinan A dengan $|A| = 3$, maka akan terdapat dua kasus, yaitu:

Kasus 1.1 Misalkan terdapat paling banyak satu anggota A di $B_{60}^{(1)}$. Terdapat beberapa kemungkinan:

- (1) Anggota A di $B_{60}^{(1)}$ adalah $v_{1,i}$ atau $z_{1,i}$ untuk $1 \leq i \leq 5$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $A_1 = v_{1,4}, x_{13}, v_2$. Dengan demikian terdapat dua titik $w_{1,9}$ dan $w_{1,11}$ dengan representasi yang sama, yaitu:

$$r(w_{1,9}|A_1) = r(w_{1,11}|A_1) = (2, 9, 5).$$



Gambar 3. Penempatan empat titik anggota himpunan pemisah $A = \{v_{1,3}, x_{1,17}, x_{1,13}, v_2\}$ (ditandai dengan titik berwarna biru) pada graf $B_{60}(1, 1)$.

- (2) Anggota A di $B_{60}^{(1)}$ adalah $w_{1,j}$ atau $y_{1,j}$ untuk $1 \leq j \leq 15$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $A_2 = w_{1,1}, x_{1,13}, v_2$. Dengan demikian terdapat dua titik $w_{1,2}$ dan $w_{1,15}$ dengan representasi yang sama, yaitu:

$$r(w_{1,2}|A_2) = r(w_{1,15}|A_2) = (1, 7, 3).$$

- (3) Anggota A di $B_{60}^{(1)}$ adalah $x_{1,k}$ untuk $1 \leq k \leq 15$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $A_3 = x_{1,17}, x_{1,13}, v_2$. Dengan demikian terdapat dua titik $w_{1,13}$ dan $w_{1,15}$ dengan representasi yang sama, yaitu:

$$r(w_{1,13}|A_3) = r(w_{1,15}|A_3) = (2, 7, 3).$$

- (4) Tidak terdapat anggota A di $B_{60}^{(1)}$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $A_4 = v_2, x_{1,13}, v_3$. Dengan demikian terdapat tiga titik $v_{1,2}, v_{1,5}$ dan $w_{1,1}$ dengan representasi yang sama, yaitu:

$$r(v_{1,2}|A_4) = r(v_{1,5}|A_4) = r(w_{1,1}|A_4) = (2, 6, 3).$$

Berdasarkan kemungkinan (1) sampai (4) dapat dilihat bahwa A_1, A_2, A_3 , dan A_4 terdapat minimal dua titik yang memiliki representasi yang sama, sehingga A_1, A_2, A_3 , dan A_4 bukan himpunan pemisah.

Kasus 1.2 Misalkan terdapat paling banyak satu anggota A di B_{60} . Tanpa mengurangi keumuman, ambil contoh $A = \{v_{1,3}, x_{1,17}, v_2\}$ dengan $v_{1,3}, x_{1,17} \in V(B_{60}^{(1)})$ dan $v_2 \in V(B_{60})$. Berdasarkan perhitungan jarak, terdapat dua titik $w_3, w_5 \in V(B_{60})$ yang memiliki representasi sama terhadap A , yaitu:

$$r(w_3 | A) = r(w_5 | A) = (7, 9, 2).$$

Secara umum, karena minimal dua anggota A berada pada komponen $B_{60}^{(1)}$, informasi jarak untuk membedakan titik-titik yang simetris di B_{60} menjadi tidak cukup, sehingga selalu terdapat minimal dua titik di B_{60} dengan representasi sama. Dengan demikian, A bukan merupakan himpunan pemisah.

Dari **Kasus 1.1** dan **Kasus 1.2** dapat dilihat bahwa jika $|A| = 3$, maka akan selalu terdapat minimal dua titik dengan representasi yang sama sehingga, haruslah

$$\dim(G) > 3 \text{ atau } \dim(G) \geq 4. \quad (3.2)$$

Dengan demikian dari Persamaan (3.1) dan (3.2) dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik graf $G = B_{60}(1, t)$ untuk $t = 1$ adalah empat.

Kasus 2. $2 \leq t \leq 5$.

Secara struktural, graf $G = B_{60}(1, t)$ terdiri dari satu graf pusat B_{60} yang dihubungkan secara simetris dengan t buah subgraf identik $B_{60}^{(i)}$ ($1 \leq i \leq t$). Karena setiap subgraf $B_{60}^{(i)}$ hanya terhubung melalui titik tunggal $v_{i,1}$, maka setiap subgraf $B_{60}^{(i)}$ membutuhkan tepat dua titik pemisah internal $\{v_{i,3}, x_{i,17}\}$ untuk membedakan titik-titik di dalamnya, sedangkan graf pusat B_{60} membutuhkan satu titik pemisah x_{13} . Oleh karena itu, himpunan $A = \{x_{13}\} \cup \bigcup_{i=1}^t \{v_{i,3}, x_{i,17}\}$ dengan $|A| = 2t + 1$ merupakan himpunan pemisah kandidat untuk sebarang $2 \leq t \leq 5$.

Berikut diberikan pembuktian eksplisit untuk kasus $t = 5$ ($|A| = 11$). Karena sifat jarak antar titik pada $B_{60}^{(i)}$ bersifat independen terhadap nilai t , maka argumen pembuktian untuk $t \in \{2, 3, 4\}$ analog dengan mengambil t buah komponen pertama dari himpunan A . Tanpa mengurangi perumuman, ambil $t = 5$.

Untuk menunjukkan $\dim(G) \leq 2t + 1$, pilih:

$$A = \{v_{1,3}, x_{1,17}, x_{13}, v_{2,3}, x_{2,17}, v_{3,3}, x_{3,17}, v_{4,3}, x_{4,17}, v_{5,3}, x_{5,17}\},$$

Titik=titik anggota A diberikan pada Gambar 4.

Representasi semua titik pada graf G dapat dibedakan dengan cara menunjukkan jarak yang berbeda pada setiap titik B_{60} dan di $B_{60}^{(t)}$ untuk $1 \leq t \leq 5$ terhadap anggota himpunan A . Perhatikan representasi titik-titik di B_{60} terhadap A .

Kasus 2.1 Terdapat titik di B_{60} yang memiliki jarak yang sama terhadap anggota himpunan A yang berada di B_{60} , tetapi memiliki jarak yang berbeda terhadap anggota himpunan A yang lain yang berada di $B_{60}^{(t)}$, yaitu:

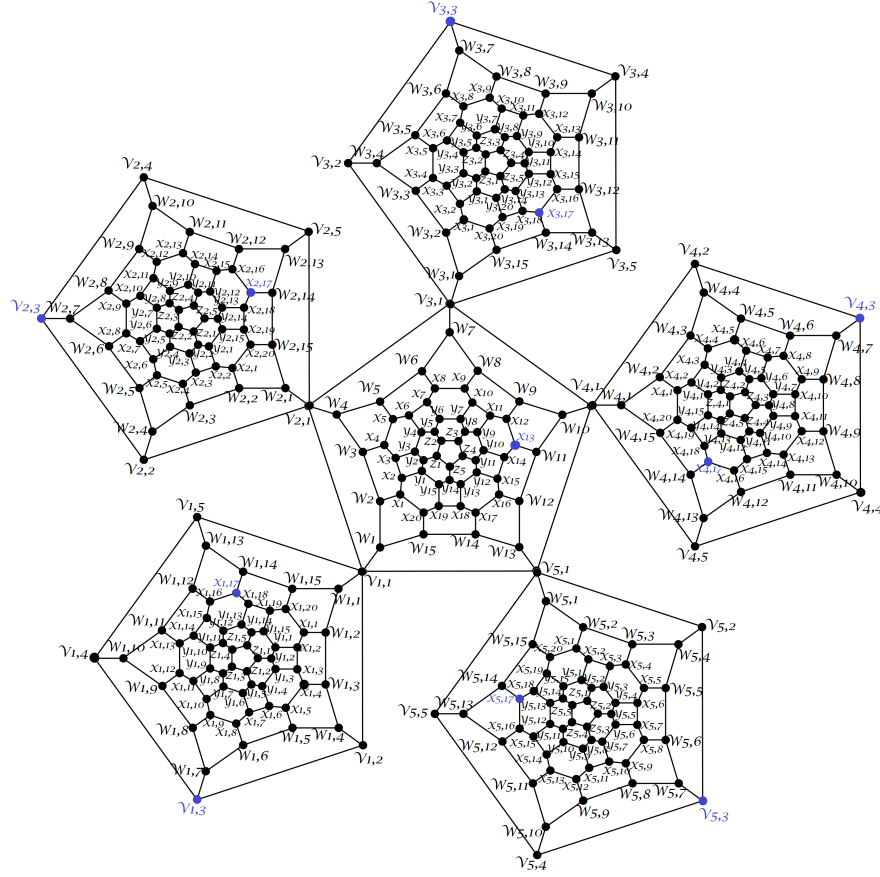
Karena $d(w_1, v_{3,3}) \neq d(w_4, v_{3,3})$ maka $r(w_1|A) \neq r(w_4|A)$.

Karena $d(x_{11}, x_{4,3}) \neq d(x_{15}, x_{4,3})$ maka $r(x_{11}|A) \neq r(x_{15}|A)$.

Karena $d(x_7, v_{3,3}) \neq d(x_{19}, v_{3,3})$ maka $r(x_7|A) \neq r(x_{19}|A)$.

Karena $d(z_1, v_{3,3}) \neq d(z_2, v_{3,3})$ maka $r(z_1|A) \neq r(z_2|A)$.

Karena $d(z_3, v_{4,3}) \neq d(z_5, v_{4,3})$ maka $r(z_3|A) \neq r(z_5|A)$.



Gambar 4. Penempatan $2t + 1$ titik anggota himpunan pemisah $A = \{x_{13}\} \cup \bigcup_{i=1}^5 \{v_{i,3}, x_{i,17}\}$ (ditandai dengan titik berwarna biru) pada graf $B_{60}(1, 5)$.

Kasus 2.2 Terdapat titik di B_{60} yang memiliki jarak yang sama terhadap anggota himpunan A yang berada di B_{60} , tetapi memiliki jarak yang berbeda terhadap anggota himpunan A yang lain yang berada di $B_{60}^{(t)}$, yaitu:

Karena $d(w_3, x_{13}) \neq d(w_5, x_{13})$ maka $r(w_3|A) \neq r(w_5|A)$.

Karena $d(w_6, x_{13}) \neq d(w_8, x_{13})$ maka $r(w_6|A) \neq r(w_8|A)$.

Karena $d(w_9, x_{13}) \neq d(w_{11}, x_{13})$ maka $r(w_9|A) \neq r(w_{11}|A)$.

Karena $d(w_{12}, x_{13}) \neq d(w_{14}, x_{13})$ maka $r(w_{12}|A) \neq r(w_{14}|A)$.

Karena $d(w_{15}, x_{13}) \neq d(w_2, x_{13})$ maka $r(w_{15}|A) \neq r(w_2|A)$.

Karena $d(x_1, x_{13}) \neq d(x_{20}, x_{13})$ maka $r(x_1|A) \neq r(x_{20}|A)$.

Karena $d(x_4, x_{13}) \neq d(x_5, x_{13})$ maka $r(x_4|A) \neq r(x_5|A)$.

Karena $d(x_8, x_{13}) \neq d(x_9, x_{13})$ maka $r(x_8|A) \neq r(x_9|A)$.

Karena $d(x_{12}, x_{13}) \neq d(x_{13}, x_{13})$ maka $r(x_{12}|A) \neq r(x_{13}|A)$.

Karena $d(x_{16}, x_{13}) \neq d(x_{17}, x_{13})$ maka $r(x_{16}|A) \neq r(x_{17}|A)$.

Karena $d(y_1, x_{13}) \neq d(y_{15}, x_{13})$ maka $r(y_1|A) \neq r(y_{15}|A)$.

Karena $d(y_3, x_{13}) \neq d(y_4, x_{13})$ maka $r(y_3|A) \neq r(y_4|A)$.
 Karena $d(y_6, x_{13}) \neq d(y_7, x_{13})$ maka $r(y_6|A) \neq r(y_7|A)$.
 Karena $d(y_9, x_{13}) \neq d(y_{10}, x_{13})$ maka $r(y_9|A) \neq r(y_{10}|A)$.
 Karena $d(y_{12}, x_{13}) \neq d(y_{13}, x_{13})$ maka $r(y_{12}|A) \neq r(y_{13}|A)$.

Kasus 2.3 Terdapat titik di B_{60} yang memiliki jarak yang berbeda terhadap anggota himpunan A yaitu:

Karena $d(w_7, x_{13}) \neq d(w_{10}, x_{13}) \neq d(w_{13}, x_{13})$ maka $r(w_7|A) \neq r(w_{10}|A) \neq r(w_{13}|A)$.
 Karena $d(x_2, x_{13}) \neq d(x_3, x_{13}) \neq d(x_6, x_{13}) \neq d(x_{10}, x_{13}) \neq d(x_{14}, x_{13}) \neq d(x_{18}, x_{13})$ maka $r(x_2|A) \neq r(x_3|A) \neq r(x_6|A) \neq r(x_{10}|A) \neq r(x_{14}|A) \neq r(x_{18}|A)$.
 Karena $d(y_2, x_{13}) \neq d(y_5, x_{13}) \neq d(y_8, x_{13}) \neq d(y_{11}, x_{13}) \neq d(y_{14}, x_{13})$ maka $r(y_2|A) \neq r(y_5|A) \neq r(y_8|A) \neq r(y_{11}|A) \neq r(y_{14}|A)$.
 Karena $d(z_4, x_{13}) \neq d(z_3, x_{13}) \neq d(z_1, x_{13})$ maka $r(z_4|A) \neq r(z_3|A) \neq r(z_1|A)$.
 Perhatikan representasi titik-titik di $B_{60}^{(t)}$ untuk $1 \leq t \leq 5$ terhadap A.

Kasus 2.4 Terdapat titik di $B_{60}^{(t)}$ yang memiliki jarak yang sama terhadap salah satu anggota himpunan A yang berada di $B_{60}^{(t)}$, tetapi memiliki jarak yang berbeda terhadap anggota himpunan A yang lain, yaitu:

Karena $d(v_{t,1}, x_{t,17}) \neq d(v_{t,5}, x_{t,17})$, maka $r(v_{t,1}|A) \neq r(v_{t,5}|A)$.
 Karena $d(v_{t,2}, v_{t,3}) \neq d(v_{t,3}, v_{t,3})$, maka $r(v_{t,2}|A) \neq r(v_{t,3}|A)$.
 Karena $d(v_{t,2}, x_{t,17}) \neq d(v_{t,4}, x_{t,17})$, maka $r(v_{t,2}|A) \neq r(v_{t,4}|A)$.
 Karena $d(w_{t,4}, x_{t,17}) \neq d(w_{t,7}, x_{t,17})$, maka $r(w_{t,4}|A) \neq r(w_{t,7}|A)$.
 Karena $d(x_{t,15}, v_{t,3}) \neq d(x_{t,19}, v_{t,3})$, maka $r(x_{t,15}|A) \neq r(x_{t,19}|A)$.
 Karena $d(x_{t,3}, v_{t,3}) \neq d(x_{t,11}, v_{t,3})$, maka $r(x_{t,3}|A) \neq r(x_{t,11}|A)$.
 Karena $d(z_{t,1}, x_{t,13}) \neq d(z_{t,4}, x_{t,13})$, maka $r(z_{t,1}|A) \neq r(z_{t,4}|A)$.
 Karena $d(z_{t,2}, x_{t,13}) \neq d(z_{t,3}, x_{t,13})$, maka $r(z_{t,2}|A) \neq r(z_{t,3}|A)$.

Kasus 2.5 Terdapat titik di $B_{60}^{(t)}$ yang memiliki jarak yang berbeda terhadap salah satu anggota himpunan A yang berada di $B_{60}^{(t)}$, tetapi memiliki jarak yang sama terhadap anggota himpunan A yang lain, yaitu:

Karena $d(w_{t,2}, x_{t,17}) \neq d(w_{t,15}, x_{t,17})$, maka $r(w_{t,2}|A) \neq r(w_{t,15}|A)$.
 Karena $d(w_{t,3}, x_{t,17}) \neq d(w_{t,5}, x_{t,17})$, maka $r(w_{t,3}|A) \neq r(w_{t,5}|A)$.
 Karena $d(w_{t,6}, x_{t,17}) \neq d(w_{t,8}, x_{t,17})$, maka $r(w_{t,6}|A) \neq r(w_{t,8}|A)$.
 Karena $d(w_{t,9}, x_{t,17}) \neq d(w_{t,11}, x_{t,17})$, maka $r(w_{t,9}|A) \neq r(w_{t,11}|A)$.
 Karena $d(w_{t,12}, x_{t,17}) \neq d(w_{t,14}, x_{t,17})$, maka $r(w_{t,12}|A) \neq r(w_{t,14}|A)$.
 Karena $d(x_{t,1}, x_{t,17}) \neq d(x_{t,20}, x_{t,17})$, maka $r(x_{t,1}|A) \neq r(x_{t,20}|A)$.
 Karena $d(x_{t,4}, x_{t,17}) \neq d(x_{t,5}, x_{t,17})$, maka $r(x_{t,4}|A) \neq r(x_{t,5}|A)$.
 Karena $d(x_{t,8}, x_{t,17}) \neq d(x_{t,9}, x_{t,17})$, maka $r(x_{t,8}|A) \neq r(x_{t,9}|A)$.
 Karena $d(x_{t,12}, x_{t,17}) \neq d(x_{t,13}, x_{t,17})$, maka $r(x_{t,12}|A) \neq r(x_{t,13}|A)$.
 Karena $d(x_{t,16}, x_{t,17}) \neq d(x_{t,17}, x_{t,17})$, maka $r(x_{t,16}|A) \neq r(x_{t,17}|A)$.
 Karena $d(y_{t,1}, x_{t,17}) \neq d(y_{t,15}, x_{t,17})$, maka $r(y_{t,1}|A) \neq r(y_{t,15}|A)$.
 Karena $d(y_{t,3}, x_{t,17}) \neq d(y_{t,4}, x_{t,17})$, maka $r(y_{t,3}|A) \neq r(y_{t,4}|A)$.
 Karena $d(y_{t,6}, x_{t,17}) \neq d(y_{t,7}, x_{t,17})$, maka $r(y_{t,6}|A) \neq r(y_{t,7}|A)$.

Karena $d(y_{t,9}, x_{t,17}) \neq d(y_{t,10}, x_{t,17})$, maka $r(y_{t,9}|A) \neq r(y_{t,10}|A)$.

Karena $d(y_{t,12}, x_{t,17}) \neq d(y_{t,13}, x_{t,17})$, maka $r(y_{t,12}|A) \neq r(y_{t,13}|A)$.

Kasus 2.6 Terdapat titik di $B_{60}^{(t)}$ yang memiliki jarak yang berbeda terhadap anggota himpunan A yaitu:

Karena $d(w_{t,1}, x_{t,17}) \neq d(w_{t,10}, x_{t,17}) \neq d(w_{t,13}, x_{t,17})$, maka $r(w_{t,1}|A) \neq r(w_{t,10}|A) \neq r(w_{t,13}|A)$.

Karena $d(x_{t,2}, x_{t,17}) \neq d(x_{t,6}, x_{t,17}) \neq d(x_{t,7}, x_{t,17}) \neq d(x_{t,10}, x_{t,17}) \neq d(x_{t,14}, x_{t,17}) \neq d(x_{t,18}, x_{t,17})$, maka $r(x_{t,2}|A) \neq r(x_{t,6}|A) \neq r(x_{t,7}|A) \neq r(x_{t,10}|A) \neq r(x_{t,14}|A) \neq r(x_{t,18}|A)$.

Karena $d(y_{t,2}, x_{t,17}) \neq d(y_{t,5}, x_{t,17}) \neq d(y_{t,8}, x_{t,17}) \neq d(y_{t,11}, x_{t,17}) \neq d(y_{t,14}, x_{t,17})$, maka $r(y_{t,2}|A) \neq r(y_{t,5}|A) \neq r(y_{t,8}|A) \neq r(y_{t,11}|A) \neq r(y_{t,14}|A)$.

Karena $d(z_{t,5}, x_{t,17}) \neq d(z_{t,4}, x_{t,17}) \neq d(z_{t,3}, x_{t,17})$, maka $r(z_{t,5}|A) \neq r(z_{t,4}|A) \neq r(z_{t,3}|A)$.

Dari **Kasus 2.1** sampai **Kasus 2.6** terlihat bahwa setiap titik pada graf G memiliki representasi yang berbeda. Karena setiap titik pada G memiliki representasi yang berbeda, maka A adalah himpunan pemisah, sehingga diperoleh batas atas $\dim(G)$ adalah $2t + 1$, maka dengan demikian

$$\dim(G) \leq 2t + 1. \quad (3.3)$$

Akan ditunjukkan $\dim(G) \geq 2t + 1$ yaitu dengan menunjukkan bahwa untuk sebarang kemungkinan A dengan $|A| = 2t$, akan selalu terdapat minimal dua titik dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $t = 5$. Jika diambil sebarang kemungkinan A dengan $|A| = 10$, maka akan terdapat dua kemungkinan berikut.

Kasus A. Misalkan terdapat paling banyak satu anggota A di $B_{60}^{(t)}$. Terdapat beberapa kemungkinan:

- (1) Anggota A di $B_{60}^{(t)}$ adalah $v_{t,i}$ atau $z_{t,i}$ untuk $1 \leq t \leq 5$ dan $1 \leq i \leq 5$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan:

$$A_5 = \{v_{1,3}, x_{13}, v_{2,3}, x_{2,17}, v_{3,3}, x_{3,17}, v_{4,3}, x_{4,17}, v_{5,3}, x_{5,17}\}.$$

Dengan demikian terdapat dua titik $w_{1,9}$ dan $w_{1,11}$ dengan representasi yang sama, yaitu:

$$r(w_{1,9}|A_5) = r(w_{1,11}|A_5) = (3, 9, 7, 9, 8, 10, 8, 10, 7, 9).$$

- (2) Anggota A di $B_{60}^{(t)}$ adalah $w_{t,j}$ atau $y_{t,j}$ untuk $1 \leq t \leq 5$ dan $1 \leq j \leq 15$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan:

$$A_6 = \{w_{1,3}, x_{13}, v_{2,3}, x_{2,17}, v_{3,3}, x_{3,17}, v_{4,3}, x_{4,17}, v_{5,3}, x_{5,17}\}.$$

Dengan demikian terdapat dua titik $w_{1,9}$ dan $w_{1,11}$ dengan representasi yang sama, yaitu:

$$r(w_{1,9}|A_6) = r(w_{1,11}|A_6) = (6, 9, 7, 9, 8, 10, 8, 10, 7, 9).$$

- (3) Anggota A di $B_{60}^{(t)}$ adalah $x_{t,k}$ untuk $1 \leq t \leq 5$ dan $1 \leq k \leq 20$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan:

$$A_7 = \{x_{1,16}, x_{13}, v_{2,3}, x_{2,17}, v_{3,3}, x_{3,17}, v_{4,3}, x_{4,17}, v_{5,3}, x_{5,17}\}.$$

Dengan demikian terdapat dua titik $x_{1,7}$ dan $y_{1,4}$ dengan representasi yang sama, yaitu:

$$r(x_{1,7}|A_7) = r(y_{1,4}|A_7) = (1, 11, 9, 11, 10, 12, 10, 12, 9, 11).$$

- (4) Tidak terdapat anggota A di $B_{60}^{(t)}$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan:

$$A_8 = \{v_{2,1}, x_{13}, v_{2,3}, x_{2,17}, v_{3,3}, x_{3,17}, v_{4,3}, x_{4,17}, v_{5,3}, x_{5,17}\}.$$

Dengan demikian terdapat tiga titik $v_{1,2}$, $v_{1,5}$ dan $w_{1,1}$ dengan representasi yang sama, yaitu:

$$r(v_{1,2}|A_8) = r(v_{1,5}|A_8) = r(w_{1,1}|A_8) = (2, 6, 4, 6, 5, 7, 5, 7, 4, 6).$$

Berdasarkan kemungkinan (1) sampai (4) dapat dilihat bahwa A_5, A_6, A_7 , dan A_8 terdapat minimal dua titik yang memiliki representasi yang sama, sehingga A_5, A_6, A_7 , dan A_8 bukan himpunan pemisah.

Kasus B. Tidak terdapat anggota A di B_{60} . Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $A_9 = \{v_{1,4}, x_{1,4}, v_{2,3}, x_{2,17}, v_{3,3}, x_{3,17}, v_{4,3}, x_{4,17}, v_{5,3}, x_{5,17}\}$. Dengan demikian terdapat dua titik w_9 dan w_{11} dengan representasi yang sama, yaitu:

$$r(w_9|A_9) = r(w_{11}|A_9) = (6, 8, 6, 8, 5, 7, 4, 6, 5, 7).$$

Dari **Kasus A** dan **Kasus B** dapat dilihat bahwa jika $|A| = 2t$ maka akan selalu terdapat minimal dua titik dengan representasi yang sama, sehingga haruslah haruslah

$$\dim(G) > 2t \text{ atau } \dim(G) \geq 2t + 1. \quad (3.4)$$

Dengan demikian dari Persamaan (3.3) dan (3.4) dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik graf $G = B_{60}(1, t)$ adalah $2t + 1$, untuk $2 \leq t \leq 5$. $\square$

4. Kesimpulan

Dimensi metrik graf *Buckminsterfullerene-type* yang dinotasikan dengan $B_{60}(1, t)$ dengan $1 \leq t \leq 5$ adalah

$$\dim(G) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } t = 1 \\ 2t + 1, & \text{untuk } 2 \leq t \leq 5. \end{cases}$$

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J. A., dan Murty, U. S. R., 1976, *Graph Theory with Application*, Elsevier Science Publishing, New York.
- [2] Harary, F., dan Melter, R. A., 1976, On the Metric Dimension of a Graph, *Ars Combin.*, **2** : 191 – 195.
- [3] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M., dan Oellerman, O., 2000, Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of a Graph, *Discrete Applied Mathematics*, **105**: 99 – 113.
- [4] Simanjuntak, R., Uttunggadewa, S., Saputro, S.W., 2015, Metric Dimension of Amalgamation of Graphs, *Lecture Notes on Computer Science* (LNCS) Vol. **8986**: 330 – 337
- [5] Yulianti, L., Narwen, Hariyani, S., 2019, A note on the metric dimension of subdivided thorn graphs, *Indonesian Journal of Combinatorics* Vol. **3**(1): 34 – 40
- [6] Febrianti, F., Yulianti, L., Narwen, N., 2019, Dimensi Metrik Pada Graf Amalgamasi Tangga Segitiga Diperumum Homogen, *Jurnal Matematika UNAND* Vol **8** (1): 84 – 90
- [7] Putri, A.F, Yulianti, L., Rudianto, B., 2019, Dimensi Metrik dari graf $AmalTr_n, vm$ untuk $n = 5$ dan $m = 3$, *Jurnal Matematika UNAND* Vol **8**(4) : 77 – 84
- [8] Yulianti, L., Putri, A., Rudianto, B., Yanita, Y., Welyyanti, D., 2024, On the metric dimension of the triangle-net graph, *AIP Conference Proceeding* Vol. **2920**, 040002
- [9] Saputro, S.W., Mardiana, N., Purwasih, I.A., 2017, The metric dimension of comb product graphs, *Matematički Vesnik* Vol. **69** (4): 248 – 258.
- [10] Putra, R. N. S., Yulianti, L., dan Sy, S., 2018, Dimensi Metrik dari Graf $W_n + C_n$ untuk $n \in \{3, 4\}$, *Jurnal Matematika UNAND*, **7**(2) : 165–169.
- [11] Welyyanti, D., Arsyad, A., Yulianti, L., 2023, Dimensi Metrik Amalgamasi Graf Theta, *Limits*, **20**(2) : 241–253.
- [12] Abdurrahman, F., Welyyanti, D., Sandy, I.P., 2025, The Metric Dimension and Partition Dimension of The Amalgamation of Complete Graphs, *Mathline: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika* Vol. **10**(1): 287 – 298
- [13] Andova, V., Kardos, F., dan Skrekovski, R., 2014, Fullerene Graphs and Some Relevant Graph Invariants, *Topics in Chemical Graph Theory*, University of Kragujevac and Faculty of Science, *Kragujevac*, pp: 39–54, Mathematical Chemistry Monographs. 978-86-6009-027-2.
- [14] Yadav, B. C., dan Kumar, R., 2008, Structure Properties and Applications of Fullerene, *International Journal of Nanotechnology and Applications*, (2): 15–24.
- [15] Akhter, S., dan Farooq, R., 2019, Metric Dimension of Fullerene Graphs, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, **7**(1): 91–103.
- [16] Putri, A. H., Yulianti, L., Welyyanti, D., 2019, Dimensi Metrik dari Graf Buckminsterfullerene, *Jurnal Matematika UNAND*, **8**(4) : 91–100.
- [17] Yulianti, L., Hidayati, L., Welyyanti, D., 2023, Dimensi Metrik Graf Buckminsterfullerene-subdivisi dan Buckminsterfullerene-star, *Limits*, **20**(2) : 219–229.
- [18] Putri, Y. S., Yulianti, L., dan Yanita, 2020, On the Locating Chromatic Number of Some Buckminsterfullerene-type Graphs. *Journal of Physics*, **1836** (2021) 012005.